









Jan 74
110



CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII,
CONSILIARII REGIMINIS, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ
PROFESSORIS PRIMARIJ IN ACADEMIA MARBURGENSI,
PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARIJ, ACADEMIÆ
REGIÆ SCIENTIARUM PARISIÆ SOCIETATUMQUE
REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

ELEMENTA
MATHESIOS
UNIVERSÆ.

TOMUS QUINTUS.

*Qui COMMENTATIONEM DE PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHE-
MATICIS, COMMENTATIONEM DE STUDIO MATHEMATICO
RECTE INSTITUENDO & INDICES IN TOMOS QUINQUE
MATHESIOS UNIVERSÆ CONTINET.*

EDITIO NOVA,

PRIORI MULTO AUCTION ET CORRECTION.



GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & Socios.

MDCCXLI.

CONSISTENTLY WELL

THE

ATLANTA
2033

THE

THE

THE

THE

THE

THE

THE



PRÆFATIO.



PRODIT tandem Tomus Quintus novæ Editionis Elementorum nostrorum Matheſeos uni-
 verſæ, qui dudum lucem adſpexiſſet, niſi alii
 labores aliaque impedimenta indeclinabilia
 moram injeciſſent. Equidem nihil reſtabat
 quam recensio Autorum, qui Matheſin vel
 ſuis inventis, vel ſcriptis illuſtrarunt, quam
 adjeceramus tam Germanicæ Elementorum Matheſeos, quam
 primæ Latinæ Editioni; una cum Indice in quatuor Elemen-
 torum horum Tomos: ne tamen nimis ſterilis judicaretur
 Tomus quintus, addere lubuit Commentationem de Studio
 mathematico recte inſtituendo. Primo igitur loco ſiſtitur bre-
 vis Commentatio de præcipuis Scriptis mathematicis. Omnia
 recensere nec potuimus, nec recenseri conſultum fuit. Recen-
 ſuimus

fuimus ea, quæ ipsimet possidemus, & pauca quædam, quæ aliunde nobis nota sunt. Hanc Autorum noticiam abunde sufficere credimus ei, qui vel se totum Mathesi dare, vel ejus aliquam partem sibi quasi propriam reddere decreverit. Et quoniam singulis adhuc annis scripta mathematica prodeunt, unusquisque, cui volupe fuerit, hanc recensitionem facile continuabit. Qui vero Mathesi tantummodo operam navare voluerit, ut non modo divinæ hujus scientiæ compos fiat, verum etiam intellectus cum perfectionis gradum conciliet, ut eodem in omni cognitione reliqua rite ac prompte utatur; ei abunde satisficient sola Elementa nostra, ut nullo alio librorum apparatu indigeat. Quodsi autem quis in aliqua ejus parte ulterius progredi voluerit; ex commentatione nostra facile videbit, quem vel quosnam sibi eligere debeat duces, ut voti sui compos reddatur. Ceterum cum nemo Autorum sibi proposuerit, ut eam omni perspicuitate explicaret, quam tyro merito desideraverit, ac demonstrationes daret consummatas, quas in Logica appellamus; suademus serio ne quis ad lectionem aliorum Autorum accedat, antequam nostra sibi familiaria reddiderit. Verendum enim, ne confundatur, & perplexitate defertor studii utilissimi efficiatur. Si quis, solius intellectus perficiendi gratia, ad Mathesin animum appellit, is vel in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ Elementaris & Trigonometriæ plane subsistere, vel ex ceteris addere potest, quæ maxime sunt ad ipsius palatum; modo sibi caveat, ne negligat eas disciplinas, ex quibus demonstrandi principia petuntur, nisi hæc tanquam certa sumere voluerit, etsi eorum evidentiam non perceperit. Et quænam hic ob-

servan-

P R Æ F A T I O.

servanda sint, ex Commentatione de Studio mathematico recte instituendo haud difficulter addiscet.

Secundo loco hic comparet Commentatio de Studio mathematico recte instituendo. Non omnes, qui eidem sese dedunt, eodem fine ad ipsum accedunt. Quamobrem nostrum fuit, non idem singulis dare consilium; sed potius pro diversitate finis diversa. Equidem Elementa nostra eo modo concinnavimus, ut singulis satisfaciant, quocunque tandem animo ad Mathesin accedant; cum tamen omnibus non conveniant omnia, indicandum omnino erat, quænam omittenda sint, quænam prætermitti minime debeant, & quomodo in iis percipiendis sit versandum, prouti unusquisque hunc vel alium finem sibi proposuerit; quamvis iis, qui sciendi cupidine flagrant, & in Philosophia aliisque scientiis cum laude versari voluerint, commendanda sit lectio integrorum nostrorum Elementorum. Ea sane hoc modo conscripsimus, ut haud multo temporis spatio integram Mathesin addiscere liceat, ac deinde qualibet ejus parte ulterius progredi detur, quantum libuerit. Cognitu nimirum utilissima & quæ ad ulteriora viam sternunt, cum primis principiis ita connexa sunt, ut ideas maxime adæquatas ex his Elementis haurire & ex aliis operibus petenda cum iisdem connectere liceat: id quod etiam in operibus nostris philosophicis eadem methodo conscriptis intendimus. Neque enim alia datur via, qua ad certam & solidam rerum cognitionem perveniatur. Etsi autem Mathesis multas afferat utilitates ad felicitatem generis humani promovendam, ut adeo digna sit, quæ excolatur; non tamen hinc recte infertur, eam omnibus omnino esse addiscendam, qui

P R Æ F A T I O.

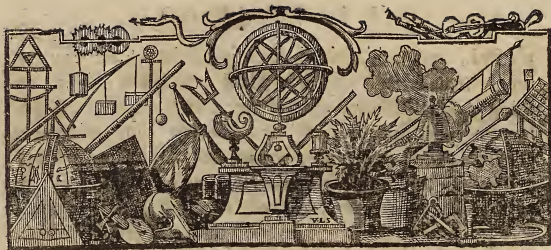
studiis literariis operam navant. Sufficit enim esse aliquos, qui eidem, vel uni alterive parti, se consecrant, ut humanum genus utilitates istas consequatur. Enim vero quatenus Studium mathematicum perficit intellectum, ea ejus utilitas est, ut nemo ad scientias alias tractandas admitti debeat nisi in Mathesi versatus. Hæc ipsa utilitas omni ævo agnita, ex quo scientiæ honos fuit. Semper enim unanimi consensu assertum, ac hodiernum asseritur, studio Matheſeos perfici intellectum. Non tamen defuere, qui utilitatem istam in dubium vocarunt, cum viderent viros in Mathesi præstantes nihil agere, ubi extra eandem demonstrationes dare audent. Immo hinc enata est opinio, quasi solius Matheſeos sit ea, quæ affirmantur vel negantur, demonstrare; in Philosophia vero & facultatibus, quæ vocantur superioribus ad demonstrationes perveniri non posse. Ex hoc labyrintho patet egrediendi via, si paulo intimius inspicias, cur Mathesis acuat intellectum. Memini jam alias plus simplici vice me monuisse, methodo tribuendum esse, ut Matheſeos studio perficiatur intellectus. Ut vero methodum distincte cognoscas, eamque in potestatem tuam redigas, non quælibet tractatio sufficit, sed legitimo quodam modo tractanda est Mathesis. Quinam igitur sit modus, a quo tam præclara utilitas unice speranda, in Commentatione nostra ex instituto docemus. Neque enim hætenus satis hoc animadvertum ab aliis: unde accidit, ut Mathematici summi, qui divinis prorsus inventis scientiam nobilissimam ditarunt, genuinam demonstrationis formam non perspexerint, quemadmodum in ipsa Commentatione clarissime ostendi. Quicquid igitur alii sentiant de Tomo hoc quinto Elementorum

rum

rum Matheseos, quorum unicuique liberum suum relinquitur iudicium; ego hoc nomine eundem maximi facio, quod genuinum facultatum mentis nostræ usum hinc addiscere liceat, quo ad solidam rerum cognitionem pervenitur. Non nego eundem usum regulis comprehendendi in Logica, & a nobis in opere præsertim Latino majore, quod de Logica conscripsimus, demonstrari. Monui tamen jam alias, studio Matheseos rite instituto eum acquirendum esse. Quomodo igitur id ipsum rite instituatur, ut in omni cognitionis genere facultatum humanarum rectum facere addiscas usum, in Commentatione nostra tanta perspicuitate docuimus, ut, quid amplius desiderari possit, non videamus. Quamobrem, si quis consilio nostro uti voluerit, is in se ipso experietur, quod non modo regulas logicas, quas in opere nostro exposuimus, nunc penitus intelligat, & nihil in iis supersit obscuri; verum etiam quod iisdem prompte ac sine ulla aberratione satisfacere possit, modo attentionem suam in se desiderari minime patiatur. Dari aliquam Artem inveniendi, quæ hætenus absque regulis exercetur, Mathematici exemplo suo abunde confirmant, qui nostro præsertim ævo novis indies inventis Mathesin augent. Nemo diffitebitur, qui vel ad ea animum advertit, quæ speciminis loco in Arithmetica (*) tradidimus, ab exemplis abstrahi posse regulas. Quoniam igitur summa intellectus perfectio est, eum facere facultatum nostrarum usum, qui ad veritatem latentem investigandam requiritur; id quoque egimus in Commentatione nostra ut ostenderemus, quomodo versandum sit in Mathesi, ut usum istum consequamur. Hætenus

tenus Ars inveniendi regulis comprehensa non est, quæ enim sub hoc titulo prostant, augustum istud nomen non merentur. Demus autem mox affore tempus, quo Ars inveniendi omnibus suis numeris absoluta exactisque regulis comprehensa in publicum prosteret; minime tamen hinc sequitur, ea, quæ in Commentatione nostra in usum hujus Artis acquirendæ præcipiuntur, nullius fore utilitatis: valent enim de hac Arte eadem quo modo de Logica annotavimus. Quid, quod etiam consilium nostrum de studio Matheseos in usum Artis inveniendi acquirendæ instituendo ei prodesse possit, qui eam regulis comprehendere voluerit?

Ultimo demum loco sequuntur Indices, de quibus ut multa dicam opus non est. Unicum tantummodo moneri consultum duxi. Initio constitueram Indices omnes rerum & verborum in Elementis nostris contentorum in unum compingere. Enimvero cum consultissimum videretur in iis citari paragraphos, literis autem alphabeti singulæ partes non commode distingui possent; potius visum est singulos singulorum Tomorum Indices sigillatim conficere. Quoniam enim ini separato Tomo leguntur, absque ulla opera, quæ in uno non inveniuntur, in alio quærentur. Ac ita tandem Elementa nostra Matheseos universæ ad umbilicum perduximus; nil magis in votis habentes, quam ut iisdem in addiscenda Mathesi utentes eum consequantur usum, quem Commentatio nostra promittit. Dabam Marburgi Cattorum d. 17. Septembr. A. O. R. 1740.



PRÆFATIO.



On nobis propositum est condere Historiam
Matheseos universæ, ut ortus ejus pateat at-
que progressus ad nostra usque tempora.
Opus enim hoc arduum est ac difficile, quod
infinitam propemodum requirit lectionem
& Bibliothecam libris omnibus tam anti-
quis, quam recentioribus instructissimam.

Nostrum jam non est in hunc campum descendere. Quod
ordinaria negotia nobis relinquunt otium, in Philosophia re-
formanda totum consumendum, etiamsi alia non obstarent,
de quibus in præsentī dicere nil attinet. Neque etiam nobis
animus est recensendi Autores omnes, qui vel de Mathesi
integra, vel de una aut altera ejus parte, vel etiam de par-
ticularibus quibusdam argumentis commentati sunt: Sufficit
recensuisse scripta præcipua, quorum lectione in studio Ma-
theseos feliciter progredi licet. Etsi enim hodie reperiantur

P. R Æ F A T I O.

plurimi, qui in historia literaria industriam suam exercent: nullibi tamen magis quam in Mathematicorum scriptis recensendis eandem deficere animadvertes, cum plerumque Mathematicum rudes sint, qui ad hoc studiorum genus animum appellant. Utile tamen est, immo necessarium nosse libros, a quorum lectione recedas doctior, ne in legendis iis, qui ad scopum minime faciunt, tempus fallas & magno conatu parum aut nihil discas. Me igitur non inutilem operam præstitisse confido iis, qui ad Mathesin addiscendam sese convertunt. Patebit hoc ex sequente commentatione de studio mathematico, in qua indicaturus sum, quinam pro diverso discentium scopo legendi sint autores. Ceterum non dubito, hanc recensionem Autorum etiam prodesse posse iis, qui ad Historiam Matheseos condendam sese accingent observaturi eas leges, quas præscripsimus in opere nostro Logico. Vix tamen eandem ab uno homine expectes. Rationes perspicies ex iis, quæ de Historia scientiarum in Logica tradidimus. Optandum foret, ne pars eruditionis longe utilissima diutius negligeretur, & bene de humano genere merebitur, qui vel unius Matheseos partis historiam exarsciatam dederit, exemplo suo excitaturus alios ad socias operas conferendas.



D E
 PRÆCIPUIS SCRIPTIS
 MATHEMATICIS
 BREVIS COMMENTATIO.

CAPUT PRIMUM.

De Cursibus, Operibus atque Lexicis Mathematicis.

§. 1.

Primus *Cursus mathematicum* Latino & Gallico idiomate edidit PETRUS HERIGONIUS *Parisiis* 1644. in 8. (10 Alph. 2 plag.). Constat Tomis sex. Primo continentur 1. Elementa EUCLIDIS XV. 2. Data EUCLIDIS, 3. APOLLONII PERGÆ de determinata sectione Geometria, a WILLEBRORDO SNELLIO restituta, 5. Ejusdem APOLLONII inclinationum Geometria, a MARINO GHETALDO restituta, 6. Ejusdem APOLLONII Tactionum Geometria, a FRANCISCO VIETA restituta, 7. Doctrina Sectionum angulorum. Tomus secundus complectitur 1. Arithmeticam practicam, & 2. Algebram tum vulgarem, tum speciosam, una cum ratione componen-

di ac demonstrandī per regressum sive repetitionem vestigiorum Analyseos. Tomus tertius exhibet 1. Constructionem Canonum, Sinuum, atque Tangentium & Logarithmorum, 2. ipsos hos Canones, 3. Trigonometriam planam, 4. Geometriam practicam, 5. Architecturam militarem, 6. Tractatum de militia Græcorum, Romanorum, & hodierna, 7. Mechanicam. Tomus quartus continet 1. Doctrinam de Sphæra mundi, 2. Geographiam tam veterem, quam novam, 3. Histiodromiam, seu Artem navigandi. In Tomo quinto extant, 1. Optica EUCLIDIS aucta & novis demonstrationibus illustrata, 2. Catoptrica EUCLIDIS, 3. Dioptrica, 4. Perspectiva, 5. THEODOSII Sphæricorum

libri tres, quibus additur quartus de triangulis sphaericis & trigonometria sphaerica, 6. Theorica planetarum, 6. Gnomonica, 8. Musica EUCLIDIS. Denique Tomus sextus supplementis destinatur 1. in Algebram, 2. in Perspectivam, 3. in Theoriam Planetarum: quibus additur introductio in Chronologiam. Apparet adeo, præter inventa recentiora, quæ Autor suo tempore tradere nondum potuit, desiderari adhuc 1. Theoremata Archimedeæ, 2. Doctrinam Conicorum, 3. Staticam, 5. Hydraulicam, 6. Architecturam civilem, 7. Pyrotechniam. Quæ vero de singulis disciplinis monenda sunt, ea inferius suo loco annotabimus. Nunc in genere observamus, Autorem ubique accurata uti demonstrandi methodo, eaque nova, per notas reales & universales, ita ut demonstrationes ipsius ab eo, qui notarum vim animo comprehendit, citra usum cujuscunque idiomatis intelligi possint. Sed cum signa sint Autori peculiariora & diversa, ab iis, quibus hodie in casibus similibus utimur; nonnihil difficultatis facessunt sub initium lectionis, aliis præsertim signis jam adfuerit. Ubi tamen signa familiaria evaserint, multum facilitatis habet hæc demonstrandi methodus: quia integra demonstratio uno obtutu haud difficulter comprehenditur & una singulæ ejus partes distincte exhibentur. Ceterum HERIGONIUS theoriam magis, quam praxin cordi habet, &

ab ejus tempore pleræque disciplinæ mathematicæ multum mutationis subierunt, ad altius fastigium erectæ, ita ut nostro ævo non satisfaciat iis, qui ad Mathesin universam addiscendam animum appellant.

§. 2. Anno 1662, CASPARUS SCHOTTUS, e Societate Jesu, *Cursum Mathematicum* edidit *Herbipoli* in fol. reeufum *Frankfurti ad Mœnum* An. 1674, & denuo *Bambergæ* An. 1677, in fol. (7 Alph. 19. plag. una cum 2 Alph. 4. plag. figurarum æri incisarum). Constat opus Libris 28 quorum primus Isagogen continet ad Mathesin, in qua problemata facillima Geometriæ practicæ explicantur: secundus Arithmeticam; tertius Libros VI priores Elementorum EUCLIDIS, quartus & quintus Trigonometriam; sextus Geometriam practicam secundum pantometron KIRCHERI; septimus elementa Astronomiæ; octavus Theoricas planetarum; nonus problemata Astronomiæ practicæ; decimus Astrologiam judicariam; undecimus Chronographiam; duodecimus Geographiam; decimus tertius Hydrographiam; decimus quartus Horographiam; decimus quintus Mechanicam; decimus sextus Staticam; decimus septimus Hydrostaticam; decimus octavus Hydrotechniam; decimus nonus Opticam; vigesimus Catoptricam; vigesimus primus Dioptricam; vigesimus secundus & tertius Architecturam militarem; vigesimus quartus Tacticam hodiernam;

nam; vigesimus quintus. Musicam; vigesimus sextus. Algebram; vigesimus septimus. Logarithmorum doctrinam; vigesimus octavus. Synopsin Matheseos tradit. Desiderantur adeo Pyrotechnia, Architectura civilis & Ars navigandi; pleræque disciplinæ nimis breviter pertractantur, nec demonstrativa methodus ubique adhibetur: defunt etiam recentiora inventa, nec sublimiora attingit Autor, ipsius præsertim ævo parum trita. Non ergo satisfacit, nostro tempore, iis qui ad solidam Mathematicum notitiam adspirant.

§. 3. Anno 1681, *Londini* in 4. idiomate Anglico prodiit JONÆ MOORE Novum systema Mathematicum (*A new Systeme of the Mathematics*). Constat Tomis duobus, quorum primo continentur 1. Arithmetica tum decadica, tum decimalis, tum speciosa, 2. sex libri priores Elementorum EUCLIDIS, una cum undecimo & duodecimo, atque Geometria practica, 3. Trigonometria plana & Sphærica, 4. Cosmographia, 5. Ars navigandi, 6. Doctrina Sphærica secundum hypothesein terræ motæ: in altero autem extant Tabulæ astronomiæ, Sinuum versorum & Logarithmorum, atque Geographia seu descriptio præcipuarum Regionum. Eorum potissimum conatibus inservit hoc opus, qui Artem navigandi solidioribus fundamentis superstructam addiscere gestiunt. Commendatur quoque doctrina Sphærica talia con-

tinens, quæ alibi frustra quæviseris.

§. 4. CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES, Camberiensis, e Societate Jesu, An. 1674, edere coepit *Cursum* seu *Mundum mathematicum*, tribus Tomis: sed cum novam editionem multo auctiorem meditatus ante diem obiisset, AMATUS VARNIUS ex eadem Societate An. 1690, editionem ex MSC. Autoris auctam & emendatam dedit *Lugduni Gallorum* in fol. (32 Alph.) Editio posthuma in 4. Tomos digesta, quorum primo continentur 1. Tractatus de progressu Matheseos & de illustribus Mathematicis, 2. EUCLIDIS Elementa XIV. 3. THEODOSII Sphærica, 4. Tractatus de sectionibus Conicis, 5. Arithmetica practica, 6. Trigonometria, 7. Algebra, 8. Hypothesium Cartesianarum refutatio: secundo 1. Geometria practica, 2. Mechanica, 3. Statica, 4. Geographia, 5. Tractatus de Magnete, 6. Architectura civilis, 7. Ars tignaria, 8. Tractatus de lapidum sectione: tertio 1. Architectura militaris, 2. Hydrostatica, 3. Tractatus de fontibus & fluviis, 4. Hydraulica, 5. Ars navigandi, 6. Optica, 7. Perspectiva, 8. Catoptrica, 9. Dioptrica: quarto denique 1. Musica, 2. Pyrotechnia, 3. Astrolabium, 4. Gnomonica, 5. Astronomia, 6. Astrologia, 7. Tractatus de Meteoris, 8. Calendarium. Autor, in Mathesi purâ, antiqua & vulgaria bene explicat; recentiora vero inventa &

sublimiora non attingit. De disciplinis ad Mathesin mixtam spectantibus dicemus suo loco, id unice nunc annotasse contenti sumus, quod ad discursus physicos sæpius digrediat. In demonstrando rigori veterum perspicuitatem jungit. Cursuum Mathematicorum, qui hætenus lucem publicam adspexerunt, absolutissimus est.

§. 5. Anno 1690, WILHELMUS LEYBORN, Anglus, patrio idioma te publicavit Cursum Mathematicum sub titulo: *Mathematical Sciences in nine Books; Londini* in fol. (11 Alph. Tab. æn. 43). Liber primus explicat Arithmeticam, vulgarem pariter, ac decimalem, cum logarithmica; secundus Geometriam elementarem (cui appendicis instar subjungitur brevis ad Algebram speciosam introductio); tertius doctrinam de primo mobili; quartus Cosmographiam, Geographiam & Chronologicam doctrinam de epochis; quintus Trigonometriam planam & sphericam; sextus usum instrumentorum Geometricorum in Geodæsia, Planimetria & Architectura tam civili, quam militari; septimus Artem navigandi; octavus Gnomonicam; nonus librum secundum Institutionum Astronomicarum NICOLAI MERCATORIS de theoria planetarum. Plurimas disciplinas Mathematicas in hoc cursu desiderari statim apparebit, si quidem eam cum cursu precedente conferre libuerit.

§. 6. ABRAHAMUS DE GRAAF, Batavus, idiomate patrio *Amsteloda-*

mi An. 1694, in 4. (1 Alph. 21 plag. Tab. æn. 94.) sub titulo *De geheele Mathesis of Wiskonst* publici juris fecit Cursum Mathematicum, in quo reperiuntur 1. tractatus brevis de Proportione, 2. Arithmetica practica, 3. Geometria elementaris, 4. Trigonometria plana & spherica, 5. Astro nomia, 6. Ars agrimenfioria cum Stereometria doliorum, 7. Ars navigandi, 8. Architectura militaris, 9. Gnomonica, 10. Perspectiva, 11. Dioptrica cum Catoptrica, 12. Mechanica, 13. Algebra. In plerisque nimis brevis, Algebra excepta.

§. 7. Anno 1697, OZANAM, Gallus, vir variis scriptis mathematicis suo loco commendandis celebris, in publicum emisit Cursum Mathematicum, quatuor Tomis comprehensum, sub tit. *Cours de Mathematique, Parisiis* in 8., recusum *Amstelodami* (quamvis Parisiorum nomen præ se ferat) An. 1699. (4 Alph. 14 plag. Tab. æn. 155.). Tomus primus complectitur Elementa EUCLIDIS sex priora, una cum undecimo & duodecimo, atque Arithmetica litterali; secundus Trigonometriam planam & Sphericam, cum Tabulis Sinuum, Tangentium, atque Logarithmorum; tertius Geometriam practicam; quartus Mechanicam atque Perspectivam; quintus Geographiam & Gnomonicam. Desunt adco disciplinae quam plurimæ. Ceterum in demonstrando rigorem veterum pulchre observat Cl. Autor.

§. 8. JAC. TAYLOR in *Theſaurio Mathematicæ*, quod An. 1707, W. ALINGHAM *Londini* in 8. recudi fecit (1 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 18.) ſermone Anglico ſub Titulo *Treafury of the Mathematicks*, explicat præcipua problemata Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Trigonometriæ utriuſque, Aſtronomiæ Sphæricæ, Geographiæ, Navigationis, Geodeſiæ, Stereometriæ, Gnomonicæ, Architeſturæ militaris & Pyrotechniæ, ſuppoſitis terminorum definitionibus, & demonſtrationibus ſepoſitis. Adduntur Tabulæ Logarithmorum, & Tabulæ Sinuum atque Tangentium.

§. 9. Cum ſub finem An. 1706, munus docendi publice Matheſin in Academia Halenſi in me tranſlatum eſſet; ſtatim animadverti, me eidem ex voto ſatiſfacere non poſſe, quamdiu deſit liber, multiplici ſtudioſorum ad celeberrimam hanc Muſarum ſedem undiquaque confluentium ſcopo conveniens. Prælectiones mathematicæ in Academiis Germaniæ tum inſtituebantur in *Matheſin Compendiarium* JOANNIS CHRISTOPHORI STURMII, Philoſophiæ Naturalis & Mathæſeos in Academia Altorſina Profeſſoris, paucis Tabulis comprehenſam. Sed cum in iis nonniſi prima Mathæſeos rudimenta continerentur, ac inprimis deſideraretur methodus, qua intellectus juvenum ad reliqua ſtudia rectius abſolvenda formatur; meo, quem in docenda & diſcenda

Matheſi mihi præfixeram, ſcopo eadem parum conveniebant. Equidem idem An. 1699, duobus Tomis *Norimbergæ* in 8. ediderat *Matheſin Juvenilem*, quorum prior Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, cum palmariis Geometriæ elementaris theorematis, Trigonometriam planam, Architeſturam militarem atque civilem, & Staticam ſeu Artem mechanicam; poſterior Opticam, Catoptricam & Dioptricam, Aſtronomiam, Chronologiam, & Gnomonicam continet: in ea tamen nonniſi uberiori diſcurſu illuſtrantur, quæ in Tabulis conciſus proponuntur. Utitur Autor methodo erotematica, nec demonſtrationibus locum concedit, ut ipſe in præſatione moneat, non quærendam in hoc libro eſſe Matheſin ſuis numeris abſolutam, ac demonſtrationibus exactiſſimis ubique firmatam, ſed facilem, planam ac demonſtrationibus diſcentium captui accommodatis illuſtratam: verius, quam corroboratam. (Tom. I. 2 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 52. Tom. II. 2 Alph. 9 plag. Tabb. æn. 57.)

§. 10. Filius ejus LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS, Francofurti ad Oderam Mathæſeos Profeſſor, Compendium Mathæſeos conſcripſit in uſum Prælectionum ſuarum, idiomate patrio, methodo erotematica, ad imitationem Mathæſeos juvenilis parentis ſui, in quinque partes diviſam, quarum prima Matheſin univerſalem, Arithmeticam, Geometriam elementarem

elementarem, Phoronomiam, Algebram; secunda Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, Architecturam militarem & civilem, Pyrotechniam, Mechanicam; tertia Astronomiam, Geographiam & Chronologiam; quarta Gnomonicam, Opticam, Perspectivam & Acusticam, quinta Tabulas quasdam mathematicas continet. Prodiit secunda vice *Francofurti ad Oderam*, 1710, in 8. sub Titulo: *Kurtzer Begriff der gesammten Mathesis*. Autor totum se dederat studio Architecturæ civilis ac militaris & Geometriæ practicæ, ut adeo in theoria elementari cespitet. In ceteris vestigia parentis in Mathesi juvenili legit, quantum ipsi dabatur.

§. 11. Ut igitur ad verum Mathematicos studium juventutem Academicam manuducere, Universitæ Mathematicos Elementa idiomate patrlo conscripsi, & quatuor Tomis *Hale*, 1710, in 8. sub Titulo: *Anfangs-Gründe der Mathematischen Wissenschaften*, vulgavi (5 Alph. 10 plag. Tabb. æn. 111.) Tomus primus continet Commentationem de Methodo mathematica, Arithmetica, Geometriam, Trigonometriam & Architecturam civilem; secundus Pyrotechniam, Architecturam militarem, Mechanicam, Hydrostaticam, Aërometriam & Hydraulicam; tertius Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perspectivam, Trigonometriam Sphæricam, Astronomiam, Chronologiam, Geographiam & Gnomoni-

cam: quartus denique Algebra communem, Analyfin infinitesimalem Illustris LEIBNITII, & appendixem de præcipuis scriptis mathematicis. Theoretica parcius exposui, ut tempori ac loco servirem, quantum ad praxes, quas uberius tradidi, demonstrandas sufficere deprehendi, reliquis in parte quarta per Analyfin erutis. Ubivis tamen methodi rationem habui, ut verioris Logicæ praxis animis discentium insinuaretur, & ad solidam doctrinam capiendam discentes apti efficerentur. Non inutilem fuisse huncce laborem, tum propria experientia me quotidie adhuc edocet, tum alii publice confessi sunt. Videantur Acta Eruditorum An. 1711, pag. 279; An. 1713, pag. 222, 428; & An. 1714, p. 250. Quinta vice recusa sunt hæc Elementa An. 1738, in 8. (6 Alph. Tabb. æn. 121.) Prodeunt nunc *Amstelodami* in linguam Batavorum translata & *Lausanne* in Latinum versa eduntur.

§. 12. Quoniam hæc Elementa nonnullis prolixiora videbantur, quam ut tyronibus promiscue proponerentur, & inprimis Algebra in parte quarta prolixius explicata eorum captui non convenire, nec ad omnium palatum esse judicaretur; desiderio aliorum satisfaturus eadem in *Compendium* redegei & An. 1713, *Hale* in 8. edidi (2 Alph. Tabb. æn. 45). Continetur in hoc compendio Commentatio de Methodo mathematica, Arithmetica, Geometria, Trigonometria

metria plana, Mechanica, Hydrostatica, Aërometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Perspectiva, Astronomia, Geographia, Chronologia, Pyrotechnia, Architectura militaris & civilis, Algebra speciosa ad exempla arithmetica applicata. Editio sexta prodiit *Hale* An. 1737.

§. 13. Quid me impulerit, ut *Elementa Matheseos* Latina a Germanicis diversa ederem, in præfatione Tomi primi exposui. An finem mihi propositum fuerim consecutus, aliorum esto judicium. Editio altera, quæ ab Anno 1730 prædiit & cui nunc Tomo quinto colophonem imponimus, recusa est *Geneva* in 4. ab Anno 1732 forma majore. Enimvero editionem nitidissimam & ab omnibus mendis expurgatam Veronæ parat JOSEPHUS SERERIUS, Medicinæ ac Philosophiæ Doctor, in omni Mathesi ac Philosophia versatissimus. Ad commodiorem usum figuræ ipsi textui inferuntur. Eandem operam iisdem impendit, quam orbi erudito in recudendis operibus nostris philosophicis Latinis abunde comprobavit. Ut Gallorum commodis inserviat JOANNES THEOBALDUS BION, *Elementa* hæc nostra quoad substantiam in linguam Gallicam transfundit; satis ingenue ac feliciter, quemadmodum ex speciminibus ad me transmissis intellexi.

§. 14. Ab eo tempore, ex quo *Elementa Matheseos*, tam patrio, *Walsii Oper. Mathem.* Tom. V.

quam Latino sermone conscripta edidi, plura in Germania passim prodire Compendia Matheseos; Nostris satis nota & in bibliopolis nostris ubivis obvia. Sed de singulis dicere nimis foret prolixum & a præsentī instituto alienum.

§. 15. CONRADUS DASIPODIUS, Mathematicum Professor Argentoratensis, *Argentorati*, an. 1573, edidit *Dictionarium Mathematicum* Græcæ atque Latine conscriptum in 8. (plag. 12.) Continentur in eo definitiones ac divisiones Arithmetica, Logistica, Geometria, Geodesia, Astronomia, & Harmonica. Non ordinem alphabeti sequitur Autor, sed disciplinarum. In iis etiam disciplinis, quas attingit, opera ejus est admodum imperfecta.

§. 16. HIERONYMI VITALIS, Capuani, Clerici Regularis Theatini, *Lexicon Mathematicum, Parisiis* 1668, in 8. prodiit (1 Alph. 18 plag.) In eo tamen nonnisi voces Geometriæ elementaris, Astronomiæ & Astrologiæ explicantur. Idem An. 1690, *Rome* in 4., recusum & ex omnibus fere disciplinis Mathematicis insigniter auctum, multis inutilibus passim rescissis. (6 Alph. 3 plag.)

§. 17. OZANAM supra laudatus *Lexicon Mathematicum*, secundum ordinem disciplinarum disposuit, editum *Parisiis* An. 1691, in 4. (4 Alph.) Explicat Cl. Autor terminos Arithmetica, Algebra, Geometriæ speculativæ & practica, Cosmographiæ, Astro-

nomiæ, Navigationis, Geographiæ tum astronomicæ, tum naturalis, tum historica, Opticæ, Perspectivæ, Gnomonica, Catoptrica, Dioptrica, Artis pictoriæ, Mechanicæ, Staticæ, Hydrostaticæ, Architecturæ civilis & militaris, atque Musicæ.

§. 18. J. HARRIS in Lexico Technico magno, cujus Tomus primus *Londini* 1704, alter ibidem 1710, in fol. prodit, præter alios terminos Artium & Scientiarum non modo Mathematicos terminos, verum etiam res ipsas explicat. Titulus operis est: *An universal English Dictionary of Arts and Sciences, explaining not only the Terms of Arts, but themselves.*

§. 19. E. CHAMBERS. *Londini* An. 1728, duobus Voluminibus in fol. forma majore edidit Lexicon Universale artium & scientiarum, sub Titulo, *Cyclopædia, or an Universal Dictionary of Arts and Sciences* ordine alphabetico conscriptum (Alph. 22. plag. 8. Tabb. æn. 28.) In eo etiam explicantur, quæ ad Mathesin spectant, ita ut Lexici Mathematici nomen simul tucatur. Mathematica pleaque ex Elementis hisce nostris petuntur, quæ etiam passim citat.

§. 20. An. 1716, lucem publicam adspexit *Lipsiæ* in 8. forma majore, *Lexicon Mathematicum*, (2. Alph. 5. plag. cum multis figuris textui insertis) quod nonnullorum precibus fatigatus, idioma vernaculo, secundum ordinem alphabeticum, ita digessi, ut non modo singulos terminos in

disciplinis Mathematicis passim obvios explicuerim, verum etiam Auctores citaverim, qui vel primi res iisdem notatas invenerunt, vel optima ratione exposuerunt, ac præterea præcipua dogmata recensuerim, singulorumque usum indicaverim, ut scilicet usui sit illis, qui vel historicam Matheseos cognitionem affectant, vel in lectione Auctorum ob voces non intellectas hærent, vel denique ducem in cognoscendo aliquo argumento desiderant. In Italicum idioma idem transtulit JOSEPHUS SERERIUS supra laudatus (§. 13.)

§. 21. Cum bibliopola novam hujus Lexici editionem dare vellet, a me desideravit, ut idem ad mentem ipsius reformarem aut alteri hunc laborem committerem, sed paterer, ut nomen meum eidem præfigeretur. Quoniam non possideo calamus venalem, insulso petito deferre nec volui, nec potui. Bibliopola itaque, cum Lexicon istud diu desideraretur, tandem aliud edidit An. 1734, (2. Alph. Tabb. æn. 26) de quo judicium meum lubens suspendo. Sed quia vulgo pro meo Lexico venditur ac emitur; monendus est Lector, me istud pro meo non agnoscere, nec mea facere, quæ in eodem immutata. Præfationem quoque, quæ eidem præfigitur, diversam esse ab ea, quæ a me profecta fuerat, ipsa collatio utriusque prodit. Ne tamen abusui nominis mei locus daretur; Auctorejus nomen suum præfigere debuisset.

§. 22. In gratiam eorum, qui castra sequuntur, Lexicon militare, pyrotechnicum & navale conscripsit JOANNES LUDOLPHUS FÆSCH, quod *Dresda* An. 1735, in 8. forma majore (2. Alph. 8. plag. Tab. æn. 21.) prodiit sub Titulo: *Kriegs-Ingenieur-Artillerie-und See-Lexicon*. Explicantur in iis termini, qui in Architectura & re militari, Pyrotechnia, & Architectura navali ac navigatione occurrunt, figurisque æri incisis, ubi opus est, illustrantur.

§. 23. SIMON STEVINUS varia Opera mathematica conscripsit, quæ sub titulo: *Les Oeuvres Mathématiques de SIMON STEVIN de Bruges, Lugduni Batavorum* in fol. publicavit An. 1634, ALBERTUS GIRARDUS (1. Alph. 19. plag.) Continentur in iisdem 1. Arithmetica tam rationalium, quam irrationalium cum regulis Algebræ; 2. Sex libri DIOPHANTI *Alexandrini*, quorum quatuor priores opera STEVINI, duo posteriores a GIRARDO traducti, 3. Usurarum computus, Logistica decimalis, & incommensurabilium doctrina, ubi simul Elementum EUCLIDIS decimum illustratur; 4. Trigonometria plana & spherica, 5. Geographia, 6. Astronomia, 7. Geometria practica, 8. Statica, 9. Optica, 10. Castrametatio, 11. Ratio muniendi per catarractas, 12. Architectura militaris. Autor & in theoria, & in praxi cum laude verifatus.

§. 24. CHRISTOPHORI CLAVII,

Bambergenfis, e Societate Jesu, *Opera Mathematica* in quinque Tomos distributa, & ab Autore ipso correctæ, plurimisque locis auctæ, prodire *Moguntia* An. 1612, in fol. (40 Alph. 9 plag.) Tomus primus complectitur XVI Elementa EUCLIDIS & Libres tres Sphæricorum THEODOSII, cum Commentariis CLAVII in utrumque Autorem, Sinuum, Tangentium & Secantium rationem & Canones; Tractationem triangulorum, tum rectilincorum, tum Sphæricorum. Tomus secundus Geometriam practicam, Arithmeticam, & Algebram, una cum refutatione Cyclometriæ JOSEPHI SCALIGERI. Tomus tertius JOANNIS DE SACRO BOSCO, libellum de Sphæra, cum prolixo Commentario CLAVII in eundem, atque libros tres de Astrolabio. Tomus quartus Gnomonicam, Fabricam & usum instrumenti ad Horologiorum descriptionem peropportuni, Horologiorum novam descriptionem, Compendium brevissimum describendorum Horologiorum horizontalium ac declinantium, cum notis in idem. Tomus denique quintus Romani Calendarii a GREGORIO XIII P. M. restituti explicationem, Novi Calendarii Romani Apologiam adversus MICHAELEM MÆSTLINUM, & Appendicem ad Novi Calendarii Romani Apologiam, in qua JOSEPHUS SCALIGER, GEORGIUS GERMANUS & FRANCISCUS VIETA, qui Calendarium aliter instaurandum esse contenderunt, seorsim

sim singuli confutantur. CLAVIUS instar veterum, EUCLIDIS, ARCHIMEDIS & APOLLONII, demonstrator rigidus.

§. 25. FRANCISCI VIETÆ Galli, *Opera Mathematica* in unum volumen congesta *Lugduni Batavorum*, in fol. An. 1646, edidit FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenſis, in Academia patriâ Mathematicum Profeſſor (6 Alph.) Continentur in iisdem 1. *ſtaſoge in Artem analyticam*, 2. ad *Eogifticen Specioſam Notæ priores*, 3. *Zeteticorum libri quinque*, 4. De *æquationum recognitione & emendatione Tractatus duo*, 5. de *numeroſa poteſtatum ad exegeſin reſolutione*, 6. *Effectuum Geometricarum Canonica recenſio*, 7. *Supplementum Geometriæ*, 8. *Pſeudo-Meſolabum & alia quædam adjuncta capitula*, 9. *Theoremata ad ſectiones angulares*, 10. *Reſponſum ad problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis conſtruendum propoſuit ADRIANUS ROMANUS*, 11. *Apollonius Gallus*, 12. *Variorum de rebus Mathematicis Reſponſorum Liber VIII*, 13. *Munimen adverſus nova Cyclometrica*, 14. *Ratio-Calendarii vere Gregoriana*, 15. *Calendarium Gregorianum perpetuum*, 16. *Adverſus CHRISTOPHORUM CLAVIUM Expoſtulatior*.

§. 26. PHILIPPI LANSBERGII *Opera omnia* prodire, *Middelburgi in Selandia* A. 1663, in fol. (10 Alph.) Continentur in iisdem 1. *Triangulorum Geometriæ libri quatuor*, 2. *Cyclo-*

metriæ novæ libri duo, 3. *Uranometriæ libri tres*, 4. in *quadrantem tum Aſtronomicum, tum Geometricum*, nec non in *Aſtrolabium Introductio*, 5. *Horologiographia plana*, 6. *Commentationes in motum Terræ diurnum & annuum, & in verum adſpectabilis cœli typum*, 7. *Tabulæ motuum cœleſtium perpetuæ, cum novis motuum cœleſtium Theoricis & Aſtronomicarum Obſervationum theſauro*, 8. *Chronologiæ Sacræ libri tres*, in quibus *annorum mundi ſeries*, ab orbe condito ad everſa per Romanos Hieroſolyma, nova methodo oſtenditur.

§. 27. In *Opusculis Mathematicis* GUILIELMI OUGHTRED, quondam Collegii Regalis in Cantabrigienſi Academia Socii, *Oxonii*, An. 1677, in 8. editis, habentur 1. *Inſtitutiones Mechanicæ*, 2. *De variis corporum generibus, gravitate & magnitudine comparatis Tractatus* ex MARINI GHETALDI *Archimede promoti* excerptus, 3. *Tractatus alius de Automatis*, 4. *quæſtionum DIOPHANTI Alexandrini Libri tres*, 5. *de triangulis planis reſtangularis*, 6. *de diſiſione ſuperficierum Tractatus*, 7. *Muſicæ Elementa*, 8. *Architecturæ militaris*, 9. *Tractatus de ſectionibus angularibus* (15 plag.).

§. 28. ANDRÆ TACQUET, Antverpienſis, e Societate Jeſu, *Opera Mathematica*, *Antverpie* An. 1669, in fol. publicavit SIMON LAURENTIUS VETERANUS ex Comitibus *Montis Calvi*, e Societate Jeſu (9 Alph. 15 plag.).

plag. Tab. æn. 88.) Extant in iisdem
1. Astronomiæ libri octo. cum Ap-
pendice, 2. Geometriæ practicæ libri
tres, 3. Opticæ libri tres, 4. Catoptri-
cæ libri tres, 5. Architecturæ militaris
liber unus, 6. Cylindricorum & An-
nularium libri quinque, 7. Disserta-
tio Physico-Mathematica de Circu-
lorum volutionibus.

§. 29. Anno 1692, prodiit *Pari-
sis* in 12. Synopsis Tractatum Ma-
thematicorum, qui necessarij esse pos-
sunt Nobilibus terra marive operam
militiæ daturis; auctore P. HOSTO,
e Societate Jesu, Mathematicum Pro-
fessore Tulonensi. Titulus operis:
*Recueil des Traités de Mathématique,
qui peuvent être nécessaires à un Gentil-
homme, pour servir par mer, ou par
terre.* (Plag. 26, Tab. æn. 67.) Con-
stat hæc synopsis tribus Tomis, quo-
rum primus Elementa EUCLIDIS,
Arithmeticam & Trigonometriam; se-
cundus Geometriam practicam, Sphæ-
ricam, Mechanicam, Artem munien-
di & Pyrotechniam; tertius denique
Artem navigandi complectitur.

§. 30. Anno 1693, munificentia
LUDOVICI MAGNI, Galliarum Régis,
Paris in fol. reg. lucem adspexer-
unt *Veterum Mathematicorum Opera*,
Græce & Latine, pleraque tum pri-
mum edita. (4 Alph. Fig. æn. 174.)
Continentur in istorum numero
ATHENÆUS de machinis; APOLLODORI
Poliorcetica; PHILONIS liber quartus
de telorum constructione, & quintus
de rationibus tolerandæ instituendæ-

que obsidionis; BITON de construc-
tione machinarum bellicarum & ca-
tapultarum; HERONIS Belopœeca,
Spiritalia, & Automata, JULII
AFRICANI Cesti; Anonymi liber
de toleranda obsidione. Adduntur
BERNARDINI BALDI scholia in HE-
RONIS Belopœeca & nonnulla alia.

§. 31. Ex eadem typographia Re-
gia An. 1693, in fol. prodire, Varia
Opera Mathematica & Physica, Au-
toribus Academicis Regiis scientia-
rum. Titulus operis: *Divers Ouvrages
de Mathématique & de Physique par
Messieurs de l'Académie Royale des
sciences* (Plag. 108.) Reperies in hoc
Volumine 1. FRENICLIJ Tractatum de
Exclusionibus; 2. ejusdem compen-
dium Combinationum; 3. ejusdem
Tractatus de quadratis magicis; 4.
ROBERVALLI observationes super
compositionem motuum, quam ad
tangentes curvarum ducendas appli-
cat; 5. Delinatio libri Mechanici
de motu composito; 6. de recogni-
tione æquationum liber; 7. Tractatus
de indivisibilibus; 8. Liber de Tro-
choide; 9. Epistola ad MERSENUM
de TORRICELLIJ quibusdam proposi-
tionibus; 10. TORRICELLIJ litteræ
ad ROBERVALLIUM missæ occasione
præcedentis epistolæ; 11. ROBERVALLII
Epistola, qua sua sibi inventa con-
tra TORRICELLIUM aliosque Italos vin-
dicat; 12. HUGENII opusculum de
causa gravitatis; 13. Æquilibrii in
libra demonstratio; 14. Potentiarum
fila fusesque trahentium vires; 15.

Nova vis movens ope pulveris pyrii & aeris; 16. Constructio ingeniosa loci ad hyperbolam per asymptotos; 17. Regula FERMATII de maximis & minimis demonstrata & ad mirabilem breviter perducta; 18. Problema Opticum sive 39 Prop. lib. 5. ALHAZENI, aut 22. lib. 6. VITELLIONIS constructum; 19. PICARDI praxis magnorum sciaticorum per calculum absolvenda; 20. Schediasma de mensuris; 21. Mensuræ ab originalibus desumptæ; 22. de mensura liquorum & aridorum; 23. de proportionibus aquarum effluentium; 24. experimenta circa aquas effluentes; 25. Fragmenta dioptrica de vitrorum potissimum focus determinandis; 26. AUZOUT Tractatus de micrometro; 27. MARIOTTI Regulæ de aquæ jactibus; 28. ROEMERI Regulæ de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros; 29. ejusdem experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium.

§. 32. FRANCISCI MAUROLYCI, Abbatis Messanenensis, *Opuscula Mathematica*, Venetiis 1575, in 4. edita (1. Alph. 18½ plag.) complectuntur 1. de Sphæra librum unum, in quo termini in hac doctrina obvii explicantur: 2. Computum Ecclesiasticum: 3. Tractatum instrumentorum Astronomicorum, nempe de Quadrato Geometrico, Quadrante, Astrolabio, Armillis, Sphæra Solida: 4.

De lineis horariis Tractatum Gnomonicum: 5. Propositiones libri decimi tertii Elementorum EUCLIDIS: 6. Musicæ traditiones, continentes epitomen Musicæ Boëtianæ & paucas de Musica regulas: 7. De lineis horariis libros tres, Gnomonicæ uberiora fundamenta exponentes: 8. Arithmeticorum libros duos.

§. 33. *Opuscula Mathematica* THOMÆ CEVÆ, e Societate Jesu, Mediolani 1699, in 8. typis descripta (plag. 4.), constant ex nonnullis demonstrationibus de ratione æquilibrii, de sectione Geometrico-harmonica & arithmetica; de sectione anguli rectilinei in quotvis partes tum organice, tum per quasdam lineas curvas, Cycloides scilicet anomalas; de parabola consideranda instar ellipsis maximæ atque instar hyperbolæ habentis transversam diametrum infinitam; de lineis phantasticis & flexilincis. Adduntur quædam excerpta ex VINCENTII VIVIANI Exercitatione mathematica, cui titulus *Formatione di tutti cieli*, & ex idea universali Mathecos Cl. OZANAMI.

§. 34. JOHANNIS WALLISII, SS. Theol. Doct. & Geometriæ Professoris Saviliani in Academia Oxoniensi celeberrimi, *Opera Mathematica* tribus voluminibus prostant. Volumen primum editum Oxonii An. 1665, in fol. (11. Alph. 17. plag.) continet 1. Orationem inauguralem An. 1649. d. ultimo Octobris habitam, cum publicam Professionem auspicaretur: 2.

Ma-

Mathesein universalem seu Arithmeti-
cum opus integrum, tam philologi-
ce, quam mathematice traditum : 3.
Tractatum elenchticum adversus MAR-
CI MEIBOMII de Proportionibus
Dialogum : 4. Tractatum de Sectio-
nibus Conicis nova methodo expo-
situm : 5. Arithmetica infinitorum :
6. Tractatus duos de Cycloide &
Cissoide ac corporibus inde genitis,
& de curvarum tum linearum *εὐθύνουσι*,
tum superficierum *πλατυσμός* : 7. ob-
servationem eclipsis solaris An. 1654,
d. 2 Aug. Oxonii visæ : 8. Mechanicam,
sive de motu Tractatum Geometri-
cum. Volumen secundum, quod ibi-
dem An. 1693, in fol. prodit. (10.
Alph. 17. plag.) complectitur, 1. Trac-
tatum Historicum & practicum de Al-
gebra, 2. de combinationibus, alter-
nationibus & partibus aliquotis, 3.
de Sectionibus angularibus, 4. de
angulo contactus & semicirculi, 5.
defensionem ejusdem Tractatus, 6.
disceptationem Geometricam de pos-
tulato quinto & quinta definitione lib.
6 EUCLIDIS, 7. Cono-Cuneum, seu
Corpus partim Conum, partim Cu-
neum representans, Geometrice con-
sideratum, 8. de gravitate & gravita-
tione disquisitionem Geometricam,
9. de æstu maris hypothesein novam,
10. commercium epistolicum de
quæstionibus quibusdam Mathematicis
11. JOH. CASWELLI Trigonometriam
planam & Sphæricam. In tertium de-
nique volumen, quod 1699, in fol.
lucem adspexit (14. Alph.), congesta

sunt 1. CLAUDII PTOLEMÆI, POR-
PHYRII & MANUELIS BRIENNII Har-
monica ; 2. ARCHIMEDIS Arenarius
& dimensio circuli cum EUTOCII
Ascalonite in hanc Commentario ;
3. ARISTARCHI *Samii* liber de ma-
gnitudinibus & distantis Solis & Lu-
næ ; 4. Fragmentum libri secundi
Collectionis Mathematicæ PAPPI *Ale-
xandrini* desideratum ; 5. Collectio
epistolarum quarundam COLLINII,
LEIBNITII, NEWTONI, WALLISII,
FLAMSTEDII rem mathematicam spec-
tantium ; 6. opera quædam miscella-
nea, nimirum Tractatus de loquela,
Grammatica linguæ Anglicanæ, In-
stitutio Logica ad communes usus
accommodata, Mens sobria serio
commendata, in concione latine ha-
bita, Epistolæ ad Titum expositio alia-
que nonnulla Theologica, quæ hujus
non sunt loci.

§. 35. CHRISTIANUS HUGENIUS,
Mathematicus summus, multa præ-
clara conscripsit opera, de quibus suo
loco dicemus. Post obitum ejus jun-
ctim prodierunt quatuor voluminibus
in 4. sub Titulo, Operum variorum, &
reliquorum. *Opera varia* lucem ad-
spexerunt *Lugduni Batavorum*, An.
1724, duobus voluminibus : *Opera
reliqua*, *Amstelodami* An. 1728, duo-
bus itidem voluminibus. Volumen
primum variorum continet 1. Horo-
logium, 2. Horologium Oscillatorium,
sive de motu pendulorum ad horolo-
gia aptato Demonstrationes Geome-
tricas, 3. brevem Institutionem de usu
horo-

horologiorum ad inveniendas longitudes, 4. de Hugeniā centri oscillationis determinatione Controversiam, 5. Machinas quasdam & varia circa Mechanicam. (Alph. 1, plag. 17, Tab. æn. 33.) ; secundum vero 1. Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus sub-juncta est *Eſſenſis* Cyclometria Cl. Viri GREGORII A S. VINCENTIO editæ An. 1647. 2. Epistolam ad Cl. Vir. FRANCISCUM XAVERIUM AINS-*COM* S. J. qua diluuntur ea, quibus *Eſſenſis* Cyclometria GREGORII A S. VINCENTIO impugnata fuit, 3. De Circuli magnitudine Inventæ & problematum quorundam illustrium constructiones, 4. de Circuli & Hyperbolæ Quadratura Controversiam, 5. Geometrica varia, 6. de Saturni Luna Observationem novam, 7. Systema Saturnium, 8. EUSTACHII DE DIVINIS Septempedani brevem annotationem in systema Saturnium CHRISTIANI HUGENII, 8. brevem assertionem systematis Saturnii sui, 9. de Saturni Anulo observationes, 10. Cosmotheoron, sive de Terris celestibus earumque ornatu conjecturas, 11. Ratiocinia in Ludo aleæ, 12. Novum Cyclum harmonicum, 13. Varia de Optica, 14. Experimenta physica (Alph. 2, plag. 14, Tab. æn. 23.) In Reliquorum volumine primo extant 1. Tractatus de Lumine & Dissertatio de causa gravitatis, 2. Geometrica demonstratio Theorematum Hugen-

nianorum circa Logisticam, GUIDONIS GRANDI, 3. ejusdem GRANDI epistola Geometrica ad V. C. THOMAM CEVAM e Societate Jesu (Alph. 1, plag. 18, Tab. æn. 15.) In altero autem comprehenduntur opera posthuma, nimirum 1. Dioptrica, 2. Commentarii de poliendis vitris, 3. Dissertatio de Coronis & Parheliis, 4. Tractatus de motu corporum ex percussione, 5. Tractatus de vi centrifuga, 6. Descriptio Automati Planetarii. (Alph. 2, plag. 6, Tab. æn. 43.) De præclaris hæc operibus specialia monuimus suo loco.

§. 36. Inprimis hic commemoranda sunt Acta Societatum Scientiarum, quæ nostro ævo ad promovendam Mathesin præsertim atque Physicam fuere institutæ. Pertinent huc Acta Philosophica Societatis Regiæ Anglicanæ, quæ a Secretariis eduntur sub Titulo: *Philosophical Transactions giving some account of the present undertakings, studies and labours of the ingenious, in many considerable parts of the World; & quorum usque ad annum 1734, prostant volumina 38.* De his singulis dicere ab instituto nostro alienum est. Sufficit itaque monuisse, quod in iis contineantur plurima ad mathesin spectantia lectu dignissima iis, quibus curæ cordique est Scientiam Mathematicam ultra limites præ-sentes promovere. Anno 1705, JOHANNES LOWTHORP Volumina 21, quæ usque ad Annum 1700 prodierunt, in epitomen redegit & in iis contin-

contenta per capita generalia disposuit. Lucem adspexit hoc opus sub Titulo: *The Philosophical Transactions and Collections to the end of the year 1700, abridg'd and dispos'd under general heads*, tribus voluminibus, *Londini* in 4. Volumine primo continentur Mathematica, ad Geometriam, Arithmetica, Algebram, Logarithmoticam, Trigonometriam, Artem libellandi, Opticam, Astronomiam, Mechanicam, Acusticam, Hydrostaticam, Hydraulicam, Artem navigandi, Architecturam civilem & navalem, Perspectivam, Sculpturam, Artem pictoriam & Musicam spectantia. Constat Alph. 4. plag. 4. Tab. æn. 7. Specialius ad singulas Mathematicas partes pertinentia recensentur in Actis Eruditorum, Supplementorum Tom. IV. sect. 7. p. 290. & seqq. Epitomen hanc Actorum Philosophicorum ab An. 1700 usque ad An. 1720, continuavit BENJAMINUS MOTTE, & ab An. 1720 usque ad An. 1732, REIDIIUS & JOHANNES GRAY. Continuationis primæ Volumen I, quod *Londini* 1721, in 4. prædiit (Alph. 3. plag. 18. Tab. æn. 18.) Mathematica, Anatomica, Medica; secundæ vero Voluminis I pars prima, quæ *Londini* 1733, in 4. lucem adspexit, (Alph. 2. plag. 7. Tab. æn. 12.) Mathematica sola continet. Illa *Wolffii Oper. Mathem.* Tom. V.

specialius recensentur in Actis Eruditorum An. 1723, p. 89. & seqq. hæc vero in Novis Actis Eruditorum An. 1735, p. 125. Cum lingua Anglica sit minus trita & libri in Anglia impressi in aliis terris difficulter haberi possint; optandum foret, ut in Linguam Latinam, aut minimum Gallicam verterentur. Equidem cum prima volumina in linguam Latinam translata superiori seculo Lipsiæ ederentur, nullos fere invenerunt emtores, ut versio continuata non fuerit: non tamen dubitandum est, fore ut nostro ævo, ubi Mathesis & Physica plures numerat cultores, majore applausu excipiantur *.

§. 37. Ab Anno 1699, quo Academia Regia scientiarum Parisiis florens, instaurata, singulorum annorum Historiam Gallico idiomate conscripsit ejusdem Secretarius FONTENELLIUS, quibus accedunt Commentarii Mathematici & Physici. Titulus cujuslibet Voluminis est: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique*. Imprimatur *Parisii* in 4. forma majore & recuditur in *Batavia* caractere minore, ut leviori pretio comparari possint hæc opera. In singulis voluminibus continentur, quæ ad Physicam generalem, ad Anatomiam, Chimiâ, Botanicam, Geometriam,

* Autoris nostri voto satisfecit Cl. BREMOND, non compendii *Louvorthopiani*, sed ipsorum Actuum Societatis Londinensis versionem Gallicam suscipiens. Ejus duo Volumina jam prodire sub Titulo, *Transactions Philosophiques de la Société*

Royale de Londres, années 1735 & 1736, Paris. 4to. 1738. Item, années 1733 & 1734, Paris. 4to. 1740. Addatur Volumen sub hoc Titulo, Table des matières imprimées dans les Transactions Philosophiques depuis 1665, jusques en 1735. &c. Paris. 4. 1739.

metriam, Astronomiam, Geographiam, Chronologiam & Mechanicam spectant, siquidem ad singulas hasce classes referendum schediasmata a Membris fuerint exhibita & sub finem Historiæ subjiuntur Elogia Membrorum, quæ isto anno, cuius historia exhibetur, diem supremum obierunt. Opus præclarum & omnibus Matheseos ac Physicæ cultoribus nunquam satis commendandum continuatur in hodiernum usque diem. Prolixum nimis foret de tot voluminibus sigillatim dicere & in iis contenta recensere. Adeat Diaria Eruditorum, in quibus eadem recensentur, qui hoc desiderat. Enimvero ne deessent ea, quæ ante instaurationem acta fuere, recentius edere libuit Collectionem Commentariorum Academiae Regiæ scientiarum ab An. 1666, quo fundata fuit, usque ad An. 1699, eadem forma, qua nunc pro singulis annis Historia cum suis commentariis edisoleat, Tomis undecim. Tomo primo continetur Historia a prima origine An. 1666, usque ad An. 1686; secundo Historia ab An. 1686 usque ad An. 1699; tertio Commentarii in usum Historiæ naturalis Animalium autore PERRALTIO; quarto Dissertatio de principiis mixtorum naturalium DU CLOS; observationes ejusdem de aquis mineralibus plurium Provinciæ Gallicæ, Commentarii DODARTI in usum Historiæ plantarum, ejusdem descriptiones novarum quarundam plantarum, DE BEZE & S. J. De-

scriptiones quarundam arborum & plantarum exoticarum; quinto diversa opera FRENICLI DE BESSY, scilicet Methodus inveniendi solutionem problematum per Exclusiones, Compendium Combinationum, Tractatus de Triangulis reſtanguis in Numeris, Tractatus de Quadratis magicis, Tabula generalis Quadratorum magicorum, & BLONDELLI Resolutio quatuor problematum principum Architecturæ; sexto diversa opera ROBERVALLII, scilicet observationes de compositione motuum, & de modo inveniendi tangentes curvarum, Idea libri Mechanicæ de motibus compositis, Tractatus de recognitione æquationum, de geometrica planarum & cubicarum æquationum resolutione, de Indivisibilibus, de Trochoide ejusque spatio, epistola ÆGIDII PERSONERI de ROBERVAL ad Cl. P. MERSENNUM, epistola EVANGELISTÆ TORRICELLII ad ROBERVALLIUM, & Epistola ROBERVALLII ad TORRICELLIUM; præterea diversa opera PICARDI, nimirum Praxis horologiorum solarium majorum per calculum, dissertatio de Mensuris, una cum AUZOUTI comparatione mensurarum, de mensura liquidorum & aridorum, Experimenta circa aquas effluentes, fragmenta dioptrica, Tractatus de libellatione, ROEMERI de crassitie & viribus tuborum in aquaductibus, secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros & ejusdem Experimenta circa altitudines & amplitudines

lines projectionis corporum gravium, instituta cum argento vivo; septimo Tractatus & observationes astronomicæ atque physicæ factæ in pluribus itineribus a Membris Academiæ & pluribus, quibus commercium literarium cum Academiâ fuit: octavo diversa opera CASSINI, scilicet de Origine & progressu Astronomiæ & de ejus usu in Geographiâ & Navigatione, Elementa Astronomiæ rectificatâ ex observationibus RICHERII factis in Insula Cayennæ, Luminis cœlestis, quod in Zodiaco apparet, detectio, Regulæ Astronomiæ Indorum computandi motus Solis & Lunæ, Reflexiones de Chronologia Sinarum, de Insula *Taprobane*, Hypotheses & Tabulæ Satellitum Jovis ex observationibus recentioribus reformatæ, Tabularum Satellitum Jovis usus præcipui; nono diversa opera DE LA HIRE, scilicet Tractatus de Mechanica, Tractatus de Epicycloidibus & earum usu in Mechanica, Explicatio præcipuorum effectuum glaciæ & frigoris, Dissertatio de differentia sonorum chordæ & Tubæ Marinæ, Tractatus de differentiis accidentibus visus, Tractatus de Praxi Picturæ; decimo commentarii Mathematici & Physici Academiæ scientiarum Annum 1692, 1693, &c. & Commentarii Mathematici & Physici Memborum Academiæ scientiarum ex diversis Diariis Eruditorum extracti; undecimo denique Analysis generalis seu Methodi novæ resolvendi proble-

mata omnis generis & omnis gradus in infinitum, autore DE LAGNY. Volumen septimum in duas partes dividitur, quarum utraq; justum volumen constituit & multa continet, quæ sigillatim recensere nimis prælixum foret.

§. 38. Anno 1710, *Berolini* in 4. prodierunt *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum ex scriptis Societati Regiæ exhibitis edita* (Alph. 2, plag. 6, Tabb. æn. 31.) Dividitur in tres partes, quarum prima literaria, secunda physica & medica, tertia Mathematica & Mechanica continet. Tertia mole sua longe superat duas priores. Hæc *Miscellanea* deinceps continuata fuere ac in posterum continuabuntur. Continuatio prima lucem adspexit *Berolini* An. 1723, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. æn. 8), secunda ibidem An. 1727, in 4. (Alph. 1, plag. 21, Tab. æn. 10.), tertia sub Titulo Tomi quarti ibidem An. 1734, in 4. (Alph. 2, plag. Tabb. æn. 11.)

§. 39. Academia Scientiarum Petropolitana quinque ab Anno 1728 usque ad An. 1738, *Petropoli* edidit Volumina in 4. charta augusta sub Titulo: *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitane* pro annis 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, & 1731. Sunt verò horum Commentariorum tres classes, nimirum Mathematica, Physica & Historica. Quæ in classe mathematica continentur, hujus sunt loci & Mathefin inprimis sublimiorem multum promoveant, quem-

quemadmodum suo loco clarius edisseremus. Cum enim hoc opus continuandum sit in posterum, ut de singulis in classe mathematica cujusvis voluminis contenta sigillatim dicamus præsentis instituti ratio non fert.

§. 40. Denique hic quoque commemorandi sunt, *De Bononiensi scientiarum & Artium Instituto atque Academia Commentarii*, qui *Bononia* An. 1731, in 4. charta itidem augusta lucem publicam adspexerunt (Alph. 3, plag. 13, Tab. æn. 9.). Præfationis loco præmittitur Historia Bononiensis scientiarum Instituti: in Commentariis vero præter ea, quæ ad Historiam naturæ spectant, atque Chymica, Anatomica, Medica, Physica, continentur etiam Mechanica, Analytica, Geographica, Astronomica & Meteorologica. Subjunguntur iisdem opuscula varia quorundam Academicorum, inter quæ ad Mathesin spectant DOMINICI GUILIELMINI epistola hydrostatica, EUSTACHII MANFREDII de meridianæ lineæ, quæ in D. *Petronii* exstat, dimensione & de novissimis circa fixarum siderum errores observationibus, GABRIELIS MANFREDII de formulis quibusdam integrandis, JACOBI RICCATI virium elasticarum leges, JOANNIS RIZETTI de corporum collisionibus & inde orta motuum communicatione, & FRANCISCI MARIE ZANOTTI de motu composito & de reflexionibus globi in plano rectangulo.

§. 41. Ad præsentem scriptorum

classẽ etiam referimus CASPARIS SCHOTTII, supra laudati, *Organon Mathematicum & Magiam Universalem Naturæ & Artis*. *Organon Mathematicum* editum est *Herbipoli* An. 1688, in 4. (5 Alph. Fig. æn. 1, Alph. 7 plag.). Ope tabularum quarundam Mathematicarum problemata Arithmetica, Geometrica, Architecturæ militaris, Chronologiæ, Gnomoniæ, Astronomiæ, Astrologiæ judiciaræ, Steganographiæ & Musicæ facilia redduntur tyronibus. *Magia* in quatuor partes divisa *Bambergæ* 1677, in 4. lucem adspexit (14 Alph. Tab. æn. 89.) In Tomo primo continentur Optica, Catoptrica & Dioptrica; in secundo Acustica & Musica; in tertio Mechanica, Statica, Hydrostatica, Hydrotechnica, Aërotechnica, nec non Arithmetica, Geometrica: in quarto denique Cryptographica, Pyrotechnica, Magnetica, Sympathica, Medica, divinatoria, Physiognomica & Chiromantica.

§. 42. In eundem censum veniunt DANIELIS SCHWENTERI *Mathematicum & Linguarum orientalium in Academia Altorffina Professoris, Deliciæ Physico-Mathematicæ*, *Norimbergæ* 1636, in 4. primum editæ (3 Alph. 4 plag.) & postea a PHILIPPO HARSCHDORFFERO duobus Tomis auctæ (10 Alph. 8 plag.) Continentur in iisdem ludicra varia, nonnulla etiam utilia, ex Arithmetica, Geometria, Stereometria, Musica, Optica, Catoptrica, Astronomia, Astrologia, Gnomonica & Thaumato-

poë-

poëtica, Statica, Mechanica, Pyrobolia, Pneumatica, Hydraulica, Arte scriptoria, Architectura & Chymia.

§. 43. Majorem selectum in simili scripto fecit OZANAM, quod sub titulo *Recréations de Mathématique & de Physique*, Parisiis 1696, in 8. reg. edidit (3 Alph. 7 pl. Tabb. æn. 44.) Recusæ sunt hæ Recreations multo auctiores, quatuor Tomis, ibidem An. 1725, in 8. forma majore, (Alph. 5; plag. 6, Tabb. æn. 132). Tomus primus continet problemata Arithme-

tica, Geometriæ & Opticæ; secundus problemata Gnomonica, Cosmographia, Mechanica; tertius problemata Pyrotechniæ & Physicæ, & Tractatum de Horologiis elementaribus DOMINICI MARTINELLI ex Italico in Gallicum idioma translatus. In quarto denique Tomo agitur de Phosphoris naturalibus & artificialibus & lampadibus perpetuis, atque præstigiatorum artificia, una cum aliis ludicris explicantur.

CAPUT II.

De Arithmetica.

§. 1. **A**rithmetica veterum ab Arithmetica hodierna prorsus erat diversa. Veteres enim in eadem nonnisi varias numerorum divisiones considerabant. Videre hoc est ex duobus *Arithmetices* libris, quos tertio Urbis condita seculo consignavit NICOMACHUS, editis Parisiis 1538. Eum sequitur pressò pede, sexto a Christo nato seculo, ANITIUS MANLIUS SEVERINUS BOETHIUS in Arithmetica sua.

§. 2. *Compendium Arithmetica* veterum composuit, nono post Christum natum seculo, PSELLUS, a GUILIELMO XYLANDRO ex Græco idiomate in Latinum translatus, annotationibus auctum & Basileæ 1556, in 8. in lu-

cem publicam emissum. Recentius simile Compendium conscripsit JODOCUS WILlichius, sub titulo: *Arithmetica libri tres* editum Argentorati 1540, in 8. (plag. 8.) Usum habet in Idea exemplari definitionum animis tyronum ingeneranda, ut præcepta Logicæ facilius comprehendant & ad divisionem rerum in sua genera & species intimius perspicuam: de quo suo loco plura.

§. 3. Prolixius hoc Arithmetica genus illustrant, duodecimo post Christum natum seculo, JORDANUS in duodecim *de Arithmetica* libris; & JACOBUS FABER *Stapulensis* in Commentario in eosdem An. 1480 edito.

§. 4. Arithmetica theoreticam, quæ



quæ numerorum proprietates expendit, illustravit EUCLIDES Elementorum libro VII, VIII, & IX. Sed de his Elementis dicemus plura in sequente capite.

§. 5. Exactam theoriam ad demonstrandas operationes communes Arithmeticæ practicæ cum in numeris integris, tum fractis sive vulgaribus, sive sexagenariis, dedit BARLAAMUS MONACHUS in *Logistica*, quam Latine reddidit & scholiis illustratam Parisiis An. 1600, in 4. edidit JOANNES CHAMBERUS, Collegii Etonensis apud Anglos socius. (1 Alph. 3 plag.) Sed captum tyronum transcendit, quibus nimia accuratio inutilis, immo ridicula videtur.

§. 6. *Frater* LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI, Ordinis Minorum, Sacræ Theologiæ Magister, idiomate Italico An. 1523, edidit opus in fol. (6 Alph. 10 plag.) de *Arithmetica & Geometria*. Maxima operis pars Arithmeticæ impenditur, & in ea non modo divisiones numerorum ex NICOMACHO & proprietates ex EUCLIDE traduntur; verum etiam Algorithmus cum in integris, tum in fractis, una cum extractionibus radicum, regulis proportionum & progressionum, nec non regula falsi & Algebra explicatur.

§. 7. MICHAEL STIFELIUS, Pastor Ecclesiæ Holtzdorffianæ, An. 1544, in 4. edidit *Arithmetica integrum* (1 Alph. 13 plag.), in qua multa tradit de numerorum cum rationa-

lium, tum irrationalium, immo etiam Cossicorum praxi, quæ alibi frustra quæsieris, sed sine demonstrationibus.

§. 8. *Arithmetica practicæ* opus absolutum An. 1556 dedit NICOLAUS TARTAGLIA, Venetus, in duas partes divisum, quarum prima arithmetica practicam ad usum vitæ humanæ applicatam, altera vero Algebrae fundamenta explicat.

§. 9. FRANCISCUS MAUROLYCUS in suis *Arithmetica* libris supra laudatis (§. 32. C. 1.) doctrinam de numeris figuratis promovit, & algorithmum, cum extractionibus radicum, atque aliis Arithmeticæ practicæ regulis rigoroſe demonstravit: Sed ejus demonstrationes non sunt ad cujusvis captum accommodatæ.

§. 10. GEORGIUS HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta & demonstrata* (Augusta Vindelicorum 1609, in 4. 2 Alph. 6 plag.) omnem praxin de numero vulgari, Cossico & astronomico demonstrat, & id singulare habet, quod demonstrationes in syllogismos resolverit.

§. 11. ANDREAS TACQUET in *Theoria & praxi Arithmetices* sæpius recusa (e. gr. *Amselodami* 1704, in 8. plag. 34. Tabb. 8.) Elementa EUCLIDIS Arithmetica facilius demonstrat & praxes arithmeticas suis quoque demonstrationibus munit. Unde non immerito commendatur hoc opus.

§. 12. Demonstrationes in Arithmetica practica etiam affert DECHA-

LES (§. 4. C. 1.) Sed negligunt CLAVIUS, HERIGONIUS, VINCENTIUS LEOTAUDUS è Societ. Jesu, qui *Institutionum arithmeticarum* libros quatuor composuit, SCHOTTUS & plerique alii (§. 5. & seqq. Cap. cit.). WALLISIUS calculum litteralem cum numerorum algorithmo conjunxit, & illius ope regulas fractionum, proportionum & extractionum radicum demonstravit: ex quo compendium dedit EDUARDUS WELLS sub titulo *Elementorum Arithmeticae*, 1698, in 8. tyronibus calculi utriusque commendandum.

§. 13. In *Elementis Arithmeticae* non modo praxin, verum etiam theoriam demonstravi, praesertim theoriam de ratione Quantitatum. Ast in *Elementis Germanicis* dedi demonstrationes ad captum tyronum magis compositas. Sunt vero eadem vere analyticae, ex ipsa notione numeri deductae: ex qua integram Arithmeticae practicae methodo analytica deduxi, ut ad meditandum formarentur ingenia studio Arithmeticae.

§. 14. Omittimus Autores alios, qui solam praxin tradiderunt, quamvis ad usum communem commendari mereantur GEMMA FRISIUS in *Methodo facilis Arithmeticae practicae* (Vitebergae 1544, in 8. plag. 11), ex quo me puerum integram arithmeticae practicae, ipsam etiam extractionem radicum, proprio Marte didicisse memini, & ADRIANUS MERTIUS in *Arithmetica* duobus libris

comprehensa (*Hafniae* 1640, in 4.). Recentius regulam generalem Arithmeticae resolvendi omnia problemata, quae ratione nituntur, dedit K. F. DE REES, quae ex idiomate Batavo in Germanicum translata publici juris facta *Göttingae* An. 1739, in 8. (plag. 12.). Usui est illis, qui nulla theoria animum imbutum possident.

§. 15. SAMUEL MORLANDUS *Londini* An. 1673, in 12. (plag. 6½) idiomate Anglico emisit *descriptionem duorum instrumentorum, quorum ope additio, subtractio & multiplicatio motu quorundam orbium absolvitur*. Utrumque An. 1666, CAROLO II. Regi exhibuit. Sed multo ingeniosorem machinam Arithmeticae in juventute sua dudum invenit illustris LEIBNITIUS, de qua in *Miscellaneis* Berolinensibus pag. 394. nonnulla leguntur. Aliam utut minus perfectam, ingeniosam tamen dedit CL. JOHANNES POLENUS in *Miscellaneis, Venetiis* 1709, in 4. (plag. 8. Tabb. 9.)

§. 16. Logistica decimale prolixè ac perspicue peculiari libro exposuit JOHANNES HARTMANNUS BAYERUS, D. Medicinae, An. 1619, *Francos. ad Maenum* vernaculo idiomate in 4. edito (1 Alph. 6. plag.). Arithmeticae Logarithmicam vero optime explicuit in peculiari itidem volumine, de quo inter scripta Trigonometrica plura dicemus, BRIGGIUS.

§. 17. De Arithmetica autem decimali in primis commendari meretur libellus, quem sub Titulo: *A new and*

and compleat Treatise of the Doctrine of fractions, vulgar and Decimal, Londini An. 1714, in 8. edidit SAMUEL CUNN, ubi omnia explicantur & exemplis illustrantur, quæ de usu fractionum decimalium tenenda sunt. Non inutilem operam fumeret, qui eundem in linguam Latinam, vel etiam Germanicam transferret. Nos theoriam harum fractionum, quantum ad praxin sufficit, exposuimus & demonstravimus Cap. 9 Elementorum Arithmeticæ. Hodie enim usus earum prorsus egregius est, ubi ex æquationibus algebraicis radices per approximationem eruendæ & series infinitæ ad communem usum aptandæ.

§. 18. Virgulas suas, quibus magnorum numerorum multiplicationem ac divisionem facilitavit, JOHANNES NEPERUS, Baro Merchistonius, Scotus, in *Rhabdologia* (Edinburgi 1617, in 12. plag. 6.) descripsit. JO-

HANNES VETO GEORGIUS HERWART AB HOHENBURG, U. J. Doct. ex Alesessore summi tribunalis imperatorii & Cancellario supremo Baviaræ Ducis ejusdem consiliarius intimus, Præses provinciæ Schvabæ & inclytorum utriusque Baviaræ Statuum Cancellarius, Monachii An. 1610, in fol. reg. evulgavit Tabulas *Arithmeticas* *προθαραγμους universales*, quarum subsidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per solam additionem & quotiens quilibet e divisione eliciendus per solam subtractionem etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum sit gnarus, exacte & celeriter invenitur (11 Alph. 9 plag.). NEPERUM imitatus SAMUEL REYHERUS, Mathem. Prof. Kiloniensis, Bacillos sexagenales *Kilonii* 1688, in 4. publicavit, quorum ope Logistica sexagenaria facile exercetur: de qua egimus Cap. 10. *Arithmetica*.

CAPUT III.

De Geometria.

§. 1. **G**eometria est vel theoretica, vel practica: theoretica vel elementaris, vel sublimior.

§. 2. Geometriam elementarem conscripsit EUCLIDES, cujus *Elementa* a variis in lucem edita fuere. Textum Græcum cum versione Latina An. 1703, Oxonia in fol. (7 Alph.

17. plag.) sub titulo ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ τα γεωμετρικά, h. e. EUCLIDIS, *que supersunt*, omnia, edidit DAVID GREGORIUS, Astronomiæ Professor Savilianus. Anno 1530, in priora sex Elementa Commentarium edidit ORONTIUS FINÆUS, in quo mentem EUCLIDIS tantummodo explicat, qualem etiam

etiam An. 1557, dedit JACOBUS PELETARIUS. In Elementa omnia XV commentati sunt circa idem tempus NICOLAUS TARTAGLEA, aliqua etiam de suo addens, & An. 1578, FRANCISCUS FLUSSATES CANDALLA, nobilis Gallus, qui ad Elementa decimum sextum, septimum, & octavum de solidorum corporum comparatione & inscriptionibus variis adjecit. Elementa EUCLIDIS pariter ac FLUSSATIS cum commentario prolixo edidit CLAVIUS. Sæpius recusa prodire inter alia *Franc. ad Mæn.* 1654, in 8. duobus Tomis (Tom I. 2 Alph. 4 plag. & Tom. II. 1 Alph. 20 plag.) atque etiam inter Opera ejus extant (§. 24. C. 1.) Bene quoque EUCLIDEM integrum explicarunt DECHALES (§. 4. C. 1.), HERIGONIUS (§. 1. cap. cit.), & inprimis concinna brevitate ISAACUS BARROWIUS, Matheseos olim in Academia Cantabrigiensi Professor. Sed quoniam integer EUCLIDES tyronibus parum utilis; ideo complures sex tantum priora Elementa ediderunt, & ad summum undecimum & duodecimum adjecerunt. Prolixum nimis foret singulas recensere editiones: sufficit eas nominasse, quæ præ aliis commendari merentur. In hunc ergo censum referimus Elementa EUCLIDIS Gallica, quæ DECHALES sigillatim edidit, & Elementa Geometriæ planæ & solidæ ANDRÆ TACQUET. Præstantissima illorum editio est *Parisiæ* An. 1709, in 12. reg.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

(12 plag. Tab. an. 16.); horum vero *Cantabrigiensi* An. 1703, in 8. (plag. 16. Tab. 7.), quorum illam debemus OZANAMO, hanc vero GUILIELMO WHISTONO, tunc temporis Mathematicum Professore Cantabrigiensi. Continetur autem in Elemento VII, VIII, & IX, theoria numerorum seu Arithmetica elementaris: unde ANDREAS TACQUET tria hæc Elementa Arithmeticæ suæ inseruit (§. 11. c. 2.). Opus hoc illustre inter ea eminet, quæ ex Antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut providentiæ divinæ tribuendum sit, quod injuria temporum non interciderit.

§. 3. JOANNES SCHEUBELIUS, in Academia Tubingenfi EUCLIDIS Professor, existimans, præter institutum EUCLIDIS, in designandis demonstrationum momentis literarum figuras usurpari, atque hac ratione & docentibus laborem ac molestiam augeri, & discentium intelligentiam impediri, An. 1550, novo consilio Elementa sex priora ita demonstravit, ut literis remotis sua unumquodque propria appellatione designarit. Prodiit opus *Basileæ* in fol. præmissa brevi Algebrae descriptione. (3 Alph. 5 plag.)

§. 4. Alio consilio An. 1565, CHRISTIANUS HERLINUS & CONRADUS DASYPIDIUS demonstrationes *Euclideanas* in syllogismos resolverunt: qui labor hunc usum habere potest, ut appareat, quomodo ex plurium Syllogismorum concatenatione tan-

D

dem

dem demonstratio completa enascatur. Idem opus utrique debetur ex parte. Prodiit *Argentina* An. 1506, in fol. (Alph. 2, plag. 4, cum figuris ligno incis.). Titulus est: *Analyses Geometrica sex librorum EUCLIDIS, primi & quinti a CHRISTIANO HERLINO, reliqua, una cum Commentariis & scholiis perbreuibz in eosdem sex libros Geometricos, a CONRADO DASYPODIO.*

§. 5. Ordo EUCLIDIS displicuit PETRO RAMO, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ in *Scholis Mathematicis* lib. 6, & seqq. contra EUCLIDEM passim disputat. Prodiere hæ Scholæ *Francofurti ad Manum* opera LAZARI SCHONERI An. 1599, in 4. (2 Alph. 17 plag.) continentes 1. exhortationem ad artes mathematicas, 2. disputationes de præcipuis quibusdam capitibus Arithmeticæ, & 3. discursus de quindecim libris EUCLIDIS. Confer etiam lib. 3, pag. 94, & seqq. RAMUS itaque alia Geometriæ elementa conscripsit libris 27 comprehensa secundum ordinem Scholæ, a SCHONERO An. 1599, in 4. *Francofurti*, una cum libris 2 Arithmeticæ edita & *Euclideis* prælata. Titulus libri est: PETRI RAMI *Arithmetica Libri duo, Geometria septem & viginti, a LAZARO SCHONERO recogniti & aucti* (2 Alph. 9 plag. cum figuris textui insertis). Arithmetica magis practica, quam theoretica est, etsi theoria de ratione & proportionem exemplis illustretur &

ad praxin transferatur. Deficiunt tamen demonstrationes accuratæ, quales dedit EUCLIDES. Adjecit SCHONERUS de numeris figuratis librum unum & RAMI Algebrae libros duos a se emendatos, atque de Logistica sexagenaria librum proprium. In Geometria agitur primum de magnitudine in genere, deinde de lineis, postea de superficiebus, tandem de solidis. Enimvero qui primus Geometriam ad ordinem Scholæ reformare ausus est, statim exemplo suo docuit (quod supra §. 57. *Math. Meth.* annotatum est) accuratam demonstrandi methodum cum ordine Scholæ subsistere non posse. Etsi enim SCHONERUS testetur, se in docenda Arithmetica & Geometria P. RAMI per multos annos versatum, & quantum ex iis proficere liceat tyronibus experientia multiplici edoctum fuisse; hoc tamen non obstat, quo minus EUCLIDEM ipsum RAMO præferamus. Neque enim SCHONERUS methodi ac rigoris in demonstrando; sed tantummodo doctrinæ rationem habet, quam ex RAMO facilius hauriri ac memoriæ inprimi posse facile conceditur. Nobis vero jam sermo est de methodo, quæ cum rigore demonstrandi consistit, ut plenaria adsit convictio eaque immota, quocunque tandem acumine demonstrationem perlasset. Hanc desiderari in RAMO, nec cum eo ordine, quo doctrinas congestit, consistere posse contendimus.

§. 6. Idem

§. 6. Idem apparet etiam ex ceterorum scriptis, qui post RAMUM idem consilii ceperunt. Pertinent huc 1. *Elementa Geometrie* IGNATII GASTONIS PARDIES e Societate Jesu; quartum *Hagæ Comitum* An. 1680, in 12. (plag. 8) recusa & a summe Reverendo Abbate SCHMIDIO, Helmstadiensium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Mathesin & Philosophiam proficeretur, ex Gallico sermone in Latinum translata. Extant in Opusculis ejus mathematicis, quæ sub titulo: *Oeuvres de Mathématique, Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. prodire, in quibus præter hæc elementa libris IX comprehensa continentur Discursus de motu locali, Statica, & Descriptio duarum machinarum describendis horologiis Solaribus convenientium. 2. *Nova Elementa Geometrie* ARNALDI, suppresso nomine, Anno 1667, *Parisiis* primum edita in 4. dein An. 1685, ibidem & An. 1690, *Hagæ Comitum* in 8. recusa (plag. 21) idiomate Gallico. 3. *Elementa Geometrie* Gallica R. P. BERNHARDI LAMY An. 1685, *Parisiis* in 12. primum edita & An. 1710, ibidem multo auctiora recusa, ita ut nunc singulæ EUCLIDIS propositiones, exceptis Elementis septimo, octavo & nono de numeris agentibus, in iisdem contineantur una cum introductione ad sectiones conicas (plag. 21.) 4. *Elementa Geometrie Serenissimi Burgundiae Ducis* Gal-

lice conscripta (*Trevolii* 1705, in 4. reg. 1 Alph. 7 plag.) concinna brevitate maxime necessaria methodo *Arnaldiana* evolventia*. Omittimus alia, quæ minoris sunt momenti & ex hisce compilata.

§. 7. Integrum quoque EUCLIDEM alio ordine digessit & novis passim demonstrationibus munivit Cl. PETRUS POLYNIER, Medicus Parisiensis, in Elementis Geometriæ, quæ una cum Elementis Arithmeticæ sub titulo: *Elémens des Mathématiques, Parisiis* 1704, in 12. reg. (1 Alph. 4 plag.) edidit. Contra quæ ex EUCLIDE cognitu minus necessaria sunt, omisit, & necessaria alio ordine digessit, aliterque subinde demonstravit Cl. ANGELUS DE MARCHETTIS in Pisana Universitate Mathematicum Professor in EUCLIDE, quem vocat, *Reformato* (*Liburni* 1709, in 4. 1 Alph. 10 plag.)

§. 8. Præter nos alii etiam Mathematici agnoverant, reformatores Elementorum EUCLIDIS non fuisse in ausu suo satis felices; sed EUCLIDIS Elementis palmam adhuc merito tribuendam esse. Memini hanc fuisse LEIBNITIO sententiam, cum me inviseret, dum Elementis Geometriæ concinnandis operam darem, ipsique referrem me multiplici modo tentasse, ut eo ordine Elementa Geometriæ digererem, quo usus est BERNHARDUS LAMY, sed nunquam hoc fieri potuisse, nisi quædam assumerem abs-

D 2

que

* Elementorum horum Autor Dn. DE MALESIEUX.

que demonstratione, quæ essent demonstranda, vel in demonstrando ac definiendo admitterem confuse tantummodo percepta. In Anglia JOHANNES KEIL, ut Matheseos Studiosos ad Elementa EUCLIDIS reduceret, eo sine *Oxonii* An. 1715, in 8. (Alph. 1, plag. 6, cum figuris textui insertis), imprimi curavit Elementa sex priora EUCLIDIS una cum decimo & undecimo ex versione FREDERICI COMMANDINI. In præfatione, quam iisdem præmisit, graviter invehitur in eos, qui EUCLIDEM carpunt, & ab ejus lectione juvenes abducunt. Addidit Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ, atque Tractatum de natura & Arithmetica Logarithmorum.

§. 9. Præter ordinem, quem EUCLIDES in Elementis suis tenet, multi ex antiquis pariter ac recentioribus Geometræ, tres sibi visi sunt deprehendisse naves in ejusdem Elementis, quorum primus respicit definitionem parallelarum & sub ea axioma, quod apud CLAVIUM est decimum tertium libri primi; secundus definitionem sextam libri quinti, quæ est æque proportionalium; & tertius definitionem quintam libri sexti de compositione rationum. Ab his navis cum vindicare aggressus est HIERONIMUS SACCHERIUS, Societatis Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professor, in Opusculo, quod sub titulo: *EUCLIDES ab omni novo vindicatus*, sive *Conatus Geome-*

tricus, quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ principia, Mediolani 1733, in 4. (plag. 20, Tab. æn. 6).

§. 10. Nos equidem in Elementis hujus Matheseos non exhibuimus Elementa EUCLIDIS ipsa; nihil tamen in iis occurrit, quod non reperiatur vel in Arithmetica, vel in Geometria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonstrandi consuleremus & demonstrationes ita componeremus, ut essent consummatæ eo sensu, quem in Logica Latina (§. 799, 854, 855) explicamus, ad usum tamen tyronum compositæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.

§. 11. Quæ in EUCLIDE de Circuli, Sphæræ, & Cylindri dimensione defuere; ea supplevit ARCHIMEDIS in duobus *de Sphæra & Cylindro Libris*, & *de Circuli dimensione Libello* unico: ex quibus selecta theoremata ad faciliorem tyronum intelligentiam proposuit TACQUETUS sub finem Geometriæ supra laudatæ (§. 2). Idem ARCHIMEDIS Libros alios de *Spiralibus*, de *Conoidibus & Spheroidibus*, & de *Quadratura Parabola* scripsit. Opera ejus una cum *Conicis* APOLLONII & *Sphæricis* THEODOSII edidit facilioribus cum demonstrationibus ISAACUS BARROWIUS Londini 1675, in 4. (Opera ARCHIMEDIS constant 24 plag. Tab. æn. 13-

APOL-

APOLLONII 14 plag. Tab. 12, & THEODOSII plag. 6, Tab. 3). Præter vero Geometrica in operibus ARCHIMEDIS una continentur Libri *de æquiponderantibus & insidentibus humido: Arenarium* tamen ejus omittit BARROWIUS, qui in alia editione una comparet, quæ *Panormi* An. 1685, in fol. prodit, & cujus singularia fata in Actis Eruditorum An. 1687, p. 543, & 544, recensentur. Germanicam operum ARCHIMEDIS versionem (Libris de insidentibus humido exceptis) dedit JOH. CHRISTOPH. STURMIUS (*Norimbergæ* 1670, in fol. 6 Alph. 2 plag.)

§. 12. Archimedeæ promovere studuit JOHANNES KEPLERUS in *Nova Stereometria doliorum vinariorum*, in primis Austriaci (*Lincii* 1615, in fol. plag. 28), quæ una continet supplementum ad ARCHIMEDEM de Stereometria figurarum Conoidibus & Sphæroidibus proxime succedentium. Ex Latino in Germanicum versam eandem anno sequenti edidit, sed passim mutatam, alicubi etiam practicis nonnullis auctam. Ejus exemplo excitatus BONAVENTURA CAVALERIUS, ordinis S. Hieronymi, olim Mathematicum Professor Bononiensis (quemadmodum ipse in præfatione fatetur) adhuc ulterius progressus plurium, quam ARCHIMEDES & KEPLERUS, solidorum per revolutionem sectionum conicarum circa axem aut rectas alias dedit nova methodo indivisibilibus, quam vocat, a KEPLERO part. I.

theor. 2. Stereom. indicata, in *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bononiæ 1653, in 4. 3 Alph. 1 plag.) Similiter ARCHIMEDEA illustravit atque promovit EVANGELISTA TORRICELLIUS, magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, in *Operibus Geometricis de Solidis sphaeralibus, de motu, de dimensione parabole, de solido hyperbolico-cum appendicibus, de cycloide & cochlea* (Florentiæ An. 1644, in 4. 2 Alph.)

§. 13. Præter ea, quæ ARCHIMEDES ad sublimiorem Geometriam spectantia tradidit, Veteres in primis ad eandem Sectionum Conicarum doctrinam referebant, de quibus opus absolutum VIII Libris comprehensum composuit APOLLONIUS Pergæus, quorum quatuor priores sæpius editi. Inter optimas editiones refertur, quam cum Commentariis prolixis An. 1655, in fol. (5 Alph. 19 plag. Tabb. æn. 30.) *Antverpiæ* in lucem emisit CLAUDIUS RICHARDUS, e Societate Jesu, quales etiam in EUCLIDIS Elementa XV, An. 1645, in fol. dederat integro volumine comprehensos. Quintum, sextum & septimum, qui pro amissis habebantur, ex Arabico MSC. ABALPHATI *Aspahanensis* opera ABRAHAMI ECHELLENSIS *Maronitæ*, Linguarum Orientalium Professoris Romani, in vertendis usus, *Florentiæ* 1641, in fol. (4 Alph. 21 plag.), cum libro *Assumtorum* ARCHIMEDIS in lucem protraxit JOH. ALPHONSUS BORELLUS, in Academia Pisana Mathe-

leos Professor. Antequam vero iidem prodirent, VINCENTIUS VIVIANI, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, ex descriptione PAPPI librum quintum feliciter restituit, & sub titulo *Divinationis Geometricæ* in quintum Conicorum APOLLONII *Pergæi* adhuc desideratum, *Florentiæ* 1659, in lucem emisit: quo successu felici permotus ex intervallo An. 1701, addidit *de locis solidis secundam divinationem Geometricam* in quinque libros injuria temporum amissos ARISTÆI senioris Geometræ (*Florentiæ* in fol. 3 Alph. 15 plag.). Scripta VIVIANI usui esse possunt illis, qui methodo demonstrandi veterum in Geometria sublimiori delectantur. Præstantissimam operum APOLLONII editionem dedit Celeberrimus HALLEJUS *Oxonie* An. 1710, in fol. (5 Alph. 16 plag.). Accessere eidem SERENI Libri duo de *Sectione Cylindri & Coni*, qui primum Græce editi, & APOLLONII liber octavus ab HALLEJO restitutus.

§. 14. Inter recentiores doctrinam conicam illustrarunt varii. Commendari meretur opus de *Sectionibus Conicis* CLAUDII MYDORGII An. 1632, *Parisis* in fol. publicatum, in quo & proprietates earundem demonstrantur, & descriptiones variæ docentur. Huic præferendus GREGORIUS A S. VINCENTIO, e Societate Jesu, qui in *Opere Geometrico Quadratura circuli & Sectionum Coni*, 10 Libris comprehenso ad inventa

recentiora viam stravit, ita ut LEIBNITIUS in *Actis Eruditorum* An. 1691, p. 438, fateatur, sibi in interiori Geometria hospiti, cum opus hoc GREGORII A S. VINCENTIO, una cum HUGENII libro de Horologio oscillatorio & DETTONVILLÆI (hoc est, PASCALII) Epistolis legeret, subito affulsisse lucem & sibi & aliis inexpectatam. Prodiit opus insignis *Amstervpiæ* 1647, in fol. (14 Alph., & præter conica in eodem continentur variæ linearum inter se proportionum, triangularum novæ proprietates, rectorum proportionum, progressionum Geometricarum etiam in infinitum progredientium miræ proprietates, multa de circulo alibi minus obvia, doctrina de ductu plani in planum, de proportionalitatibus Geometricis theoria nova, unguarum item, conoidum & sphæroidum doctrina. Absolutum quoque *Sectionum conicarum* opus debemus industria PHILIPPI DE LA HIRE (*Parisi*. An. 1685, in fol. 2 Alph. 18 plag.), in quo præter APOLLONIANA plurima alia methodo veterum demonstrantur: ex quo in gratiam tyronum compendium fecit JACOBUS MILNES impressum *Oxonii* An. 1702, in 8. (12 plag. & 19 Tab. Fig.) & recusum emendatius atque auctius ibidem 1712, in 8. (15 plag. Tabb. 19) sub titulo: *Elementa Sectionum Conicarum nova methodo demonstrata*.

§. 15. Ipse etiam celeberrimus DE LA HIRE in eorundem gratiam Ele-

Elementa Sectionum conicarum, *Parisii* An. 1679, in 12. in lucem emisit una cum constructione locorum geometricorum & æquationum, de qua in capite subsequente. Titulus opusculi: *Nouveaux Elémens des Sections Coniques, les lieux Géométriques, la construction des Equations.* (pag. 21.) Similis iisdem est Tractatus OZANAMI Gallicus de lineis primi generis, locis Geometricis & constructione æquationum (*Parisii* 1687, in 4. 1 Alph. 15 plag. Tab. æn. 35). Nominandus hic quoque est Tractatus de Sectionibus cylindri & conii in solido & plano consideratis, cum demonstrationibus simplicibus ac novis, quem sermone Gallico *Parisii* An. 1704, in 8. edidit POIVRE (5 plag. & 8 Tabb. æn.). De aliis Conicorum scriptoribus dicemus capite sequente.

§. 16. Commemoranda tamen de iisdem adhuc nonnulla sunt, quæ hic apprimè locum merentur. Nimirum GUIDO GRANDUS, cum intelligeret, desiderari libellum Conicorum ad captum tyronum, cuius defectu doctrina conica in Scholis vulgo negligitur; eundem supplevit & methodo veterum conscripsit libellum mole parvum, sed rerum ubertate gravem, in quo præcipua de sectionibus conicis theoremata demonstrat. Prodiit *Florentie* An. 1722, in 12. (pag. 6½, Tabb. æn. 7.), sub titulo: *Compendio delle sezioni coniche d'Apollonio.* Quoniam hoc compendium commendari meretur Matheseos Studiofis,

CHRISTIANUS AUGUSTUS HAUSEN, Matheseos Professor Lipsiensis, versionem huius opusculi Latinam in gratiam auditorum adornasse dicitur in Actis Eruditorum supplement. Tom. VIII, sect. X, hinc inde tamen quædam immutasse. Equidem VINCENTIUS SANTINI, Florentinus, simile Compendium dare conatus est *Luca* 1722, in 8, (pag. 6, Fig. 28) sub titulo: *Delle sezioni coniche dedotte nuovamente in Piano dal cerchio*, in quo nova ratione sectiones conicas in plano a circulo deducit; sed demonstrationes ejus laborare circulo vitioso jam annotarunt Collectores Actorum Eruditorum loc. cit. p. 432. NICOLAUS DE MARTINO, Regius Mathematicum Professor Neapoli, duobus Tomis *Elementa Sectionum conicarum* edidit *Neapoli* An. 1734, in 8. charta augusta (Tom. I, pag. 21½, Tabb. æn. 8, Tom. II, pag. 22, Tabb. æn. 8.). Conscripserat hæc Elementa ad usum FAUSTINÆ PIGNATELLI, Principis Culubranensis & Tolvensis Ducatus hæredis; postea in gratiam studiosæ juventutis publici juris fecit. Omissis propositionum, scholiorum & corollariorum titulis; continuo textu ad morem vulgarem extra Mathesin receptum cuncta demonstrat. Præter Sectionum conicarum proprietates, earum usum in construendis problematis solidis docet, præmissis iis, quæ cum in genere de constructionibus geometricis, tum problematum planorum sciri debent.

§. 17. Præ-

§. 17. Præter Conica apud veteres in Geometria sublimiori celebre fuit Problema Deliacum de duplicando cubo, seu, quod eodem recidit (§. 626, *Anal. fin.*), de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas: quem in finem excogitatae sunt variae lineae curvae a PAPPO Alexandrino in *Collectionibus Mathematicis* conservatae. Earum duo Libri priores hæcenus desiderantur. Sex posteriores *Bononia* 1660, in fol. editi (Alph. 5, plag. 9, cum figuris textui insertis,) continent, inter alia solutiones varias problematis Deliaci, trisectionem anguli, isoperimetrorum doctrinam, sphaerica nonnulla, & quædam ad Mechanicam spectantia. Varia etiam scripta Geometrarum veterum in præfatione ad librum septimum recenset PAPPUS.

§. 18. Inter præcipua inventa Geometrica superioris seculi refertur methodus centrobaryca PAULI GULDINI, e Societate Jesu, de qua diximus in Mechanica & Statica (§. 164). Prodiit ejus liber primus *de centro gravitatis, una cum Tabulis numerorum quadratorum & cubicorum decies millium*, *Vienne Austria* 1635, in fol. (4 Alph. 21 plag.). Accessere libri secundus, tertius & quartus An. 1640, (4 Alph. 14 plag.). Libro primo adjuncta est dissertatio de motu terræ ex mutatione centri gravitatis ipsius proveniente.

§. 19. Curvarum doctrinam uni-

versalius pertractavit & multis novis inventis auxit ISAACUS BARROWIUS supra laudatus in egregio opere *Lectionum Geometricarum*, *Londini* 1674, in 4. (plag. 21, Tabb. 13). Elementa curvarum in usum tyronum hæcenus desiderantur, qualia tamen proflare consultum foret.

§. 20. Alia scripta particularia ad Geometriam theoreticam spectantia nimis longum foret hic recensere. Quædam tamen recensere lubet. Pertinet huc CHRISTIANI HUGENII liber *de circuli magnitudine*, *Hagæ Comitum* An. 1644, in 4. (plag. 5, cum figuris textui insertis) & ejusdem *Theorematum de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro*, *Lugduni Batavorum* An. 1651, in 4. (plag. 6½ cum figuris textui insertis.). Uterque Tractatus legitur Operum variorum Tomo secundo (§. 35, c. 1).

§. 21. Affinia his sunt LUDOLPHI A CEULEN, Hildesheimensis, *de Circulo & Adscriptis* liber, ex vernacula in Latinam translatus & annotationibus illustratus. a WILLEBRORDO SNELLIIO (*Lugd. Batav.* 1619, in 4. plag. 8) & ejusdem *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* cum eorundem usu in variis problematis Geometricis, partim solo linearum ductu, partim per numeros irracionales & tabulas sinuum & Algebram solutis, a SNELLIIO itidem Latine versa, *Lugd. Bat.* 1615, in 4. (1 Alph. 16 plag.)

§. 22. LAURENTIUS LORENZINIUS, Disci-

Discipulus VINCENTII VIVIANI, edit *Florentiæ* An. 1721, in 4. (plag. 20, Tabb. æn. 14.) *Exercitationem Geometricam*, in qua agitur de dimensione omnium conicarum sectionum, curvæ parabolicæ, curvæque superficiæ Conoidis parabolici. Solvit more veterum per demonstrationes problemata, quæ hodie per Algebram solvi solent. Unde ejus lectio commendanda iis, qui methodum veterum sibi familiarem reddere gestiunt. Cum viginti annos in vinculis duro fato detineretur, ab omni commercio cum hominibus literatis remotus, nullius libri usu concessio, methodum istam excoluit & duodecim libros de sectionibus conicis & cylindricis eorumque solidis conscripsit, ultra APOLLONII & VIVIANI inventa progressus. Ex carcere igitur tandem dimissus, ubi cognovisset, quæ nunc agerentur a Geometris, sublimiora quoque meditari coepit, sed consueta sibi utens methodo. Sex itaque composuit Exercitationes, quarum prima est, quæ hic commemoratur: ceteræ enim, quantum constat, lucem publicam non adspexerunt.

§. 23. Comes de PAGAN, cujus non minus in Astronomia, quam Architectura militari celebre est nomen, decem edidit libros Theorematum Geometricorum sub titulo: *Les dix Livres des Théorèmes Géométriques du Comte de PAGAN*, *Parisiis* 1654, in 8. (1 Alph. 5 plag.), in quibus de lineis 4 proportionalibus, de se-

ctionibus conicis, de theoria planetarum elliptica, de munitionibus regularibus & de navigatione agit. Prostant etiam ISMAELIS BULLIALDI de *Lineis spiralibus demonstrationes novæ* (*Parisi*. 1657, in 4. plag. 18.) & ejusdem *Exercitationes Geometricæ circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras, circa conicarum sectionum quasdam propositiones, & de perisomatibus* (*Parisi*. 1657. in 4. plag. 6).

§. 24. STEPHANUS DE ANGELIS, Nobilis Venetus, Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, methodum CAVALERII excoluit, ejus usum insignem demonstraturus, cum non deessent, qui eandem impugnarent & contemnerent. Edidit *Venetiis* An. 1658, in 4. (Alph. 1, plag. 14, cum figuris textui insertis) *Problemata Geometrica Sexaginta circa Conos, sphaeras, superficies conicas sphaericasque præcipue versantia*; ibidem An. 1656, in 4. *Libros quatuor de infinitis parabolis infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum partiumque earundem genitis, una cum nonnullis ad prædictarum magnitudinum aliarumque centra gravitatis attinentibus* (Alph. 2, plag. 7.). Adidit An. 1663, librum quintum (plag. 14). Ibidem 1659, in 4. in lucem publicam emisit *Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum*, in quo præcipue agitur de centris gravitatis hyperbolæ, partium ejusdem, atque nonnullorum solidorum, de quibus nunquam Geometria locuta est. Parabola noviter quadratur dupliciter,

ducuntur. infinitarum parabolarum tangentes, assignantur maxima inscriptibilia, minimaque circumscriptibilia infinitis parabolis, conoidibus ac semifusis parabolicis, aliaque geometrica nova exponuntur scitu digna (Alph. 1, plag. 11). An. 1660, ibidem prodiit ejus *Opusculum Geometricum de infinitorum spiraliū spatiorum mensura* (plag. 16) & tandem An. 1661, publici juris facti Tractatus de *infinitarum cochlearum mensuris ac centris gravitatis* (plag. 16), & Tractatus duo de *superficie Ungule & de Quartis Liliorum parabolicorum & cycloidalium*. (Alph. 1, plag. 19). Atque adeo patet, quod suo tempore Geometriam sublimiorem multum promoverit, aliisque viam ad ulteriora monstraverit.

§. 25. FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenfis, in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professor, *Exercitationum mathematicarum* libros quinque *Lugduni Batavorum*, in 4. An. 1657, (Alph. 3) edidit, in quibus habentur varia tum ad Geometriam elementarem, tum sublimiorem spectantia, una cum tractatu de sectionum conicarum in plano descriptione, qui figillatim prodiit (*Lugd. Batav.* 1646, in 4. plag. 17). Nimirum libro primo continetur propositionum arithmeticarum & geometricarum centuria, secundo constructio problematum simplicium geometricorum, tertio APOLLONII Pergæi loca plana restituta, quarto organica conicarum

sectionum in plano descriptio, & quinto sectiones miscellaneæ triginta. Colophonis loco adjicitur HUGENII Tractatus de *Ratiociniis in ludo aleæ*, qui inter opera varia Vol. 2, legitur (§. 35, C. 1.).

§. 26. JACOBI DE BILLY, e Societate Jesu, tractatus de *proportione harmonica*, An. 1658, editus, in quo varia problemata ejus ope solvuntur. ANTONII LALOYERÆ, e Societate Jesu., *Geometria veterum promota*, seu libri septem de Cycloide *Tolosa* 1660, prodire, quibus multa continentur ad Geometriam sublimiorem spectantia. Extat etiam FERDINANDI ERNESTI Comitis ab HERBERSTEIN *Diatome Circulorum seu specimen Geometricum*, quo Lunularum, Curvilinearorum aliorumque spatiorum propositiones demonstrat (*Prage* 1710, in 8. 1 Alph. Tab. 1): VINCENTII VIVIANI *Exercitatio mathematica de formatione & mensura fornicum* (*Florentiæ* 1692, in 4. plag. 6): JOH. BAPTISTÆ PALMÆ in *Geometriam Exercitationes* (*Neapoli* 1689, in 4. plag. 16) 100 propositiones, quæ ad Geometriam elementarem pertinent, continentes.

§. 27. ANGELUS DE MARCHETTIS, in Pisana Universitate scientiarum mechanicarum Professor, *Pistoria* An. 1695, in 4. (plag. 14) sermone patrio edidit Tractatum de natura rationis & proportionis nova, facili & securo methodo explicata. Titulus libelli est: *La Natura della proporzione & della proporzionalità*. In

eo aliam viam ingressus est, quam EUCLIDES, aliam quoque, quam alii recentiores ab EUCLIDE recedentes calcarunt. Cum intellexisset, eundem probari STEPHANO DE ANGELIS, DOMINICO GULIELMINO, FRANCISCO SPOLETI, *Collectoribus Actorum Eruditorum* in Actis An. 1696, p. 244, 245, in Latinam linguam ipsum transtulit: Qua data occasione cetera quoque EUCLIDIS Elementa tam plana quam solida in breviorē & meliorem formam redigere voluit. Unde enatum est opus Elementorum planorum & solidorum Geometriæ, quod sub titulo: *EUCLIDES Reformatus* prodiiit & quod supra laudavimus (§. 7).

§. 28. Ad libros analyticos veterum, quorum memoriam conservavit PAPPUS in præfatione ad librum septimum Collectionum mathematicarum referendi sunt APOLLONII *Pergæ de sectione rationis* Libri duo ex arabico latine versi, & de *sectione spatii* Libri duo restituti ab EDMUNDO HALLEY ac editi *Oxonii* 1706, in 8. (1 Alph. 3 plag.).

§. 29. Ad Geometriam quoque spectat *Sphericorum* doctrina, quæ circularum in superficie Sphæræ descriptorum & sese mutuo interfecantium proprietates explicat. Eam olim tribus libris comprehendit THEODOSIUS, quos Tomo primo *Cursus Mathematici* exhibet DECHALES, ut supra monuimus (§. 4). Eisdem nova methodo illustravit & succincte demonstravit ISAACUS BARROWIUS atque

Londini 1675, in 4. (plag. 6, Tab. æn. 3) edidit, subiunctos operibus ARCHIMEDIS & APOLLONII. Aliqua hujus doctrinæ etiam attingit PAPPUS libro septimo collectionum mathematicarum, ubi addit, quæ in THEODOSIO desiderantur scitu necessaria.

§. 30. *Geometriam practicam* omnium absolutissimam, sed sine demonstrationibus dedit MALLETUS, quatuor Tomis idiómate Gallico conscriptis comprehensam (*Parisi* 1702, in 8. reg. Tom. I, plag. 23, Tom. II, plag. 26, Tom. III, plag. 24, Tom. IV, plag. 18). In Geodasia declaratur usus semicirculi, quadrati Geometrici, circini proportionum, Astrolabii, pixidis magneticæ, baculi Jacobi & mensulæ geometricæ. Singula folia Figuris elegantibus, sed ad rem parum facientibus exornantur.

§. 31. Germanico idiómate Geometriam practicam conscripsit DANIEL SCHWENTERUS, Professor olim Mathematicum Altorfinus, cum notis JOHANNIS BOECKLERI, *Norimbergæ* 1667, in 4. (4 Alph. 18 plag.) recusam. Praxis in charta cum demonstrationibus docetur: in campo solus baculorum & mensulæ geometricæ usus ostenditur, stereometria desideratur. Unde instar supplementi esse potest JOHANNIS HARTMANNE BEYERI, Med. D. *Stereometria*, quam sub titulo: *Eine neue und schöne Art der vollkommenen Visir-Kunst*, *Franc. ad Mæn.* 1603, in 4. (1 Alph. 7 plag.) edidit. Autor inprimis Stereometria

metriam doliorum plenius explicat, quam ab aliis factum. Cum tamen doliorum non plenorum stereometriam non attigisset; An. 1619, addidit Conometriam Mauritianam vernaculo itidem sermone conscriptam. (Franc. in 4. plag. 11), in qua stereometria doliorum tam plenorum, quam non plenorum traditur. Ceterum idem Autor de virgula pithometrica conficienda ibidem 1620, plagulam unam adjecit.

§. 32. Ante SCHWENTERUM in usum agrimenforum BERNHARDUS CANTZLERUS edidit tractatum geodaticum sub titulo: *Kürtzer und leichter Bericht vom Feldmessen*, quem ABDIAS TREW Mathes. Prof. Altorfinus multis annotationibus auxit, ita ut sub titulo: *Summa Geometriae practicae* An. 1673, Norimbergæ in 8. (plag. 33, Tab. æn. 55) edi meruerit.

§. 33. Nomen Autoris commendat scholam agrimenforum, quam PHIL. DE LA HIRE sub titulo: *L'Ecole des Arpenteurs*, Paris. Anno 1689, in 8. edidit. Prodiit tertia vice Paris. An. 1728, in 12. reg. (plag. 16). Explicantur in hoc libello operationes arithmeticae & trigonometricae cum principiis Geometriae, quibus agrimensores habent opus. Deinde exponuntur praxes Geodatarum & subjicitur descriptio artis libellandi. Nec minus laudem merentur CLAVII (§. 24), TACQVETI (§. 28), OZANAMI Geometriae practicae (§. 7), hujusque *Méthode facile pour arpenter*,

ou mesurer toutes sortes de superficies & pour toiser exactement la Maçonnerie; les vuidanges des Terres & tous les autres corps, dont on peut avoir besoin dans la pratique. Prodiit denuo Paris. An. 1725, in 12. reg. (plag. 12). Explicantur etiam in hoc libello operationes Arithmeticae & Trigonometricae ac principia Geometriae agrimenforibus scitu necessaria. Eundem cum PHILIPPO DE LA HIRE scopum sibi praefixit HENRICUS WILSON in libro Anglico, quem sub Titulo: *Surveying improved*, Londini 1726, in 8. reg. (Alph. 1, Tabb. æn. 11) edidit, in suo genere satis consummatum. Solet vulgo institutionibus Architecturae militaris praemitti Geometria practica.

§. 34. ADRIANUS METIUS 1725, in 4. edidit *Arithmeticae* libros duos & *Geometriae* libros sex. Qui multo aetiores 1650, Lugduni Batavorum in 4. recusi (Alph. 3). Geometria nonnisi practica est, perinde ac Arithmetica, ut adeo hic recenseri mereatur. Tractatur in hisce libris etiam Trigonometria plana, usus circini & regulae proportionalis, Architectura militaris, problemata Astronomica, & sciaterica Horologia, ita ut in hoc opere reperiatur, quae titulus non promittere videtur, nec in libris, quae eundem habent, vulgo quaeri solent. Nullas tamen addit demonstrationes. Aliter JOANNES DUSER, Tigurinus, in *Geometria Theorica & practica* patrio idiomate Tiguri 1627, in 4. publicè

publicata theoriam cum praxi conjungit, & hanc ex illa deducit. Multa docet, quæ istiusmodi autores non rangunt: de stereometria tamen nihil habet.

§. 35. A. SHARPE, Anglus, idiomate patrio edidit *Geometriam promotam* 1^o. per tabulam amplam & accuratam. segmentorum circulorum, & 2^o. per Tractatum concisum de Polyhedris *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 17; Tabb. æn. 4). Tractatus primus sine controversia ad Geometriam practicam spectat, cum computandis segmentis circulorum destinatur, qui calculus ad Geometriam practicam pertinet ac multiplicem in variis problematis huc spectantibus habet usum. Tractatus alter ad stereometriam refertur, cumque Autor in eodem constructionem & dimensionem quinque corporum regularium ac præterea duodecim novorum a Geometris hæcenus non expensorum polyhedrorum tradat; hic quoque Tractatus Geometriæ practicæ quædam pars est.

§. 36. BATTY LANGLEY *Londini* 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. æn. 40), Geometriam practicam ad Architecturam civilem, & hortensem, Geodæsiam, & Stereometriam applicatam edidit sermone patrio. Titulus libri est: *Practical Geometry applied to the useful Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration*. Sed hic liber potiore jure inter Architectonicos locum meretur, quam inter eos, qui de

Geometria conscripti sunt, quemadmodum suo loco monebimus.

§. 37. Pithometriam promovere aggressus est JOANNES MATTHIAS HASIUS, Mathematicum Professor in Academia Wittebergenfi, in *Pithometria Theoria & Praxi nova*, Witteberge 1728, in 4. (plag. 10, Tabb. æn. 2): ubi etiam Algebræ in hoc argumento usum declarat.

§. 38. ERASMUS REINHOLDUS in Geodæsia sua, quæ sub Titulo: *Gründlicher Bericht vom Feldmessen*, Franc. 1615, in 4. (1 Alph. 17 plag.) recusa, Geometriam quoque subteraneam explicat: de qua opus peculiare conscripsit NICOLAUS VOIGTEL, decimarum e Mansfeldensibus metallifodinis Receptor, *Islebia* An. 1688, in fol. (plag. 32, Tab. 9) excusum & itidem An. 1713, auctius (2 Alph. 10 plag. Tab. æn. 10) recusum, unicum sanè in hoc genere, donec An. 1710, LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS *Francofurti* An. 1710, in 8. Tractatus quatuor idiomate Germanico ederet, inter quos quartus est *Geometria subterranea Compendium*, primus vero de descriptione corporum regularium, secundus de *Circino proportionum*; tertius de *Trigonometria plana* (plag. 6, Tab. æn.), & An. 1727. JOANNES FRIDERICUS WEIDLERUS, Professor Mathematicum Wittebergenfis, *Institutiones Geometriae subterraneæ* latinas daret *Witteberge* in 4. (plag. 10, Tab. 1).

§. 39. Circinum proportionis 2

JUSTO BYRGIO multo ante inventum descripsit LEVINUS HULSIUS Tractatu tertio instrumentorum mechanicorum vernaculo idiomate *Francof. ad Moenum* An. 1603, edito (pag. 4). Postea An. 1607, GALILÆUS, alienum inventum sibi attribuens, de eodem librum Italicum sub titulo: *Le Operationi del compasso Geometrico e militari* publicavit. Omnium maxime commendari in hoc genere meretur NICOLAI GOLDMANNI de *Circino proportionis Tractatus* (Lugd. Batav. 1679, Latine & Germanice in fol. (1 Alph. Tabb. 16) editus, ex quo sua descripsit MICHAEL SCHEFFELT in tractatu Germanico *Unterrich von dem Proportional-Circul*, Ulma 1697, in 4. (pag. 18, Tab. 12). Prostat quoque Tractatus Gallicus CL. OZANAMI de *usu circini proportionum* (Parisiis 1688, in 8). Recentius ejus constructionem & usum in peculiari Tractatu, qui multa singularia continet, exposuit SAMUEL CUNE. Eum post mortem Autoris EDMUNDUS STONE sub Titulo: *A new Treatise of construction and use of the Sector*, Londini An. 1729, in 8. (pag. 15,

Tab. æn. 2, & Fig. multis ligno incisus) publici juris fecit.

§. 40. Ad scripta de Geometria practica referendum quoque est CASPARIS SCHOTTI *Pantometrum Kircherianum*, hoc est, instrumentum Geometricum novum ab ATHANASIO KIRCHERO inventum, decem libris universam pene practicam Geometriam complectentibus explicatum perspicuisque demonstrationibus illustratum. Prodiit *Herbipoli* 1660, in 4. (Alph. 2, pag. 11, Tabb. æn. 32). Liber primus technicus fabricam instrumenti, secundus euthymetricus linearum rectarum dimensiones, tertius enbadometricus dimensionem superficierum, quartus stereometricus dimensiones solidorum, sextus cœlometricus dimensiones concavorum, septimus geodæticus divisiones superficierum, octavus metamorphoticus planorum corporumque transformationem, nonus hydragogicus libellationis aquarum totamque libellationis naturam, decimus tandem varius problematum variorum solutionem docet, quæ ope circini proportionum alias solvi solent.

CAPUT IV.

De Scriptis Analyticis.

§. 1. Scripta veterum analytica recenset PAPPUS in præfatione

ad librum septimum *Collectionis mathematicæ*. Sunt nempe *Datorum Eu-*

CLIDIS

CLIDIS liber unus (§. 1. C. 1.) APOLLONII de *Sectione Rationis* libri duo ab HALLEIO editi, & de *Sectione spatii* libri duo ab eodem restituti (§. 28. c. 3), APOLLONII de *Tactionibus* libri duo, de *Inclinationibus* duo, de *locis planis* duo, *Conicorum* octo, EUCLIDIS *Porismatum* tres, & de *locis ad superficiem* duo, ARISTÆI de *locis solidis* quinque, ERATOSTHENIS de *mediis proportionalibus* duo: quorum aliqui extant (§. 13, Cap. 3), aliqui desiderantur, sed a recentioribus Geometris restituti, (§. 1, Cap. 1, & §. 13, Cap. 3). Sed Analysis veterum ab Analyfi recentiorum longe fuit diversa.

§. 2. Ad analysin recentiorum potissimum spectat Algebra, de qua olim exempla tredecim libris comprehensa dedit DIOPHANTUS. Hodie nonnisi 6 prostant, a XYLANDRO latine versi, & An. 1575, in fol. primum editi, postea cum Commentariis CASPARIS BACHETI, An. 1621, recus. Illustrat autem DIOPHANTUS artem solvendi problemata arithmetica indeterminata. Gallica eorum versio extat inter Opera STEVINI (§. 23, c. 1).

§. 3. Antequam DIOPHANTUS in publicum proflaret, LUCAS PACIOIUS seu (ut vulgo vocatur) LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI in *Summa Arithmeticæ & Geometriæ* supra laudata (§. 6, cap. 2,) Libris 8 Algebram explicat, prout eam acceperat ab Arabibus. Nimirum ultra

æquationes simplices & quadraticas non progreditur. Nec longius progressi CHRISTOPHORUS RUDOLPHUS Jaroviensis Silesius, qui primus de Algebra seu Cossâ, prout tunc dicebatur, in lingua Germanica scripsit & cujus librum additis regularum demonstrationibus & exemplis pluribus recudi fecit MICHAEL STIFELIUS *Regiomonti* An. 1553, in 4. (Alph. 5, plag. 11). Titulus libri: *Die Coss CHRISTOFFES RUDOLFFS, mit schönen Exempeln der Coss durch MICHAEL STIFEL gebessert und sehr gemehrt*. STIFELIUS, qui hoc Magistro profecit, in *Arithmetica integra* (§. 7, cap. 2), HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta* (§. 10, cap. cit.) alique. Non ineleganter RUDOLPHUS, eumque secutus STIFELIUS, æquationes algebraicas ex progressionibus geometricis derivant. Sed SCIPIO FERREUS addidit regulas resolvendi æquationes cubicas, a CARDANO in *Arte Magna*, quam vulgo Cossam seu Regulam Algebra vocant, An. 1545, primum publicatas: Cl. LUDOVICUS FERRARIENSIS ostendit methodum reducendi æquationes biquadraticas, quam An. 1579 Algebra suæ inferuit RAPHAEL BOMBELLI. Ulteriores progressus Algebra stricte sic dicta nondum vidit.

§. 4. Circa annum Christi 1590, FRANCISCUS VIETA Gallus Arithmetica litteralem invenit, & ad Algebram applicavit, quam & methodo ingeniosa extrahendi radices ex æquationi-

tionibus quibuscunque per approximationem locupletavit. (§. 25, cap. 1). Ejus inventa explicat, iisdemque utitur GUILIELMUS OUGHTRED, Anglus, in *Clave Mathematica*, An. 1631, primum, sed An. 1693, *Oxonii* quinta vice edita (pag. 12). Regulas ad exempla applicat & usum Arithmeticae litteralis in Geometria elementari ostendit, quem in inveniendis theorematibus & resolvendis problematis habet. Extractionem quoque radicum per approximationem ex æquationibus exemplo VIETÆ docet.

§. 5. THOMAS HARRIOT, itidem Anglus, qui *Londini* An. 1621 obiit, in *Artis Analyticae Praxi* ad æquationes algebraicas nova, expedita & generali methodo resolvendas, a WALTHERO WARNERO An. 1631, in fol. *Londini* (2 Alph. 2 plag.) edita, Arithmetica *Vietæ* ad commodiorem formam reduxit, eam nempe, qua nunc utimur, & æquationum indolem ac reductionem plenius explicavit.

§. 6. Anno 1637, CARTESIUS *Geometriam*, quam vocat, idiomate gallico publicavit, quam postea Latine vertit & prolixis Commentariis auxit FRANCIS. A SCHOOTEN. Utor ego editione *Amstelodamensi* An. 1659, in 4. (5 Alph. 8 plag.). Continentur in eadem præter CARTESII *Geometriam* (pag. 12), FLORIMUNDI DE BEAUNE Notæ breves & FRANCISCI A SCHOOTEN Commentarii in eandem; JOH. HUDDENII *epistola de re-*

ductione æquationum, ejusdem *epistola de maximis & minimis*; ERASMI BARTHOLINI *Principia Matheseos universalis seu introductio ad Geometriæ methodum* CARTESII; FLORIMUNDI DE BEAUNE tractatus posthumi *de natura & constitutione atque de limitibus æquationum*; JOH. DE WITT libri duo *de Elementis Curvarum*, & FRANC. A SCHOOTEN tractatus *de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. CARTESIUS Arithmetica litteralem & regulas Algebrae descripsit ex HARRIOTO, & quemadmodum OUGHTREDUS in *Clave*, atque MARINUS GHETALDUS in *Libris 5, de Resolutione & Compositione mathematica* (*Romæ* 1630, in fol. 2 Alph. 15 plag.) Arithmetica *Vietæ* ad Geometriam elementarem applicarunt & constructiones æquationum simplicium ac quadratarum dederunt, ita ipse, *Harriotæ* ad Geometriam sublimiorem transferebat, curvarum naturam per æquationes algebraicas explicare coepit & constructionem cubicarum atque biquadraticarum æquationum, immo etiam superiorum, docuit. Opus hoc imprimis utile ad Algebrae speciosam addiscendam.

§. 7. CARTESIUS non tyronibus, sed Geometris peritis scripsit, nimis concisa brevitate, ut adeo Commentario maxime opus sit. Quamvis vero de ejus Geometria egregie meritus sit FRANCISCUS A SCHOOTEN, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ

quæ modo diximus (§. 6); nondum tamen ea dedit, quæ in Commentario consummato quærentur, sed ipse potius Commentatore haud raro opus habet. Dedit tandem istiusmodi Commentarium, qualis desiderari poterat CLAUDIUS RABUEL, e Societate Jesu, qui post fata ejus *Lugduni Gallorum* sub titulo: *Commentaires sur la Geometrie de Mr. Descartes* An. 1730, in 4. reg. prodit (Alph. 3, plag. 6, Tab. æn. 23.) Textum CARTESII, quem pressio pede sequitur, ita explanat, atque ita regulis, exemplis, & problematis illustrat, ut nihil occurrat, quod ex Commentario non plene intelligatur. Commentarius hic in linguam Latinam transferri & in nova editione Geometriæ CARTESII Commentatoribus aliis adjungi mereretur: sit ita quod solus sufficiat menti tanti Geometriæ penitus intelligendæ.

§. 8. Regulam CARTESII construendi æquationes cubicas & biquadraticas uberius exposuit THOMAS BAKER in *Clave geometrica catholica* (Londini 1684, in 4. (1 Alph. 10 plag. 10 Tab. æn.): ast verum harum Constructionum fundamentum, quod a MENECHMO didicit CARTESIUS, minime assecutus. Hoc monstravit RENATUS SLUSIUS Tomo secundo *Mesolabi* An. 1668, in 4. (plag. 24) *Leodii* excusi cum variis Miscellaneis, in quibus Algebra ad quadraturas Curvarum, ad quæstiones de maximis & minimis, ad methodum invenien-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

di punctum flexus contrarii, ad methodum centrobarycam GULDINI &c. applicatur. Cartesiana inventa etiam promoverunt, quemadmodum SLUSIUS in *Miscellaneis*, FERMATIUS in *Operibus mathematicis* (Tolose 1679, in fol.), ROBERVALLIUS (§. 31, 37, Cap. 1), & BARROWIUS (§. 19, Cap. 3).

§. 9. JOHANNES KERSEY, An. 1671, Londini in fol. edidit *Elementa Algebra*, idiomate Anglico (Alph. 10, plag. 10). In iis explicatur arithmetica litteralis & æquationum natura, præceptaque exemplis plurimis illustrantur, totus DIOPHANTUS enucleatur, & resolutione & compositione mathematica ex GETHALDO multa exhibentur. Idem fere institutum apud Gallos fuit JOH. PRESTET, cujus *Nova Matheseos elementa* Tomo integro secundo auctiora, Parisiis An. 1694, in 4. (6 Alph. 3 plag.) gallice prodierunt. In iis omnia dogmata arithmetica una cum problematibus DIOPHANTI atque VIETÆ per analysisin recentiorem resolvuntur.

§. 10. Similiter OZANAM in *Elementis Gallicis Algebra* (Amstelodami An. 1703, in 8. reg. 1 Alph. 21 plag.) præter calculum litteralem & æquationum doctrinam, artem quoque Diophanteam resolvendi problemata numerica egregie illustrat, in qua imprimis excellit hic Autor. Quanti autem fieri debeat analysis Diophantea, vulgo a Cartesianiis neglecta, docuit illustris LEIBNITIUS in Actis Eru-

ditorum, An. 1702, pag. 219. Etſi autem Algebra OZANAMI legi mereatur ab iis, qui in Analyſi *Diophantea* ſeſe exercere voluerint; tyronibus tamen Algebrae ejus lectio commendanda non eſt, propterea quod nimis diſſuſa regularum explicatione nulla regularum applicatione, ad exempla facta, nimis diu detinet lectorem in parte prima, facitque ſtudii hujus in ipſo limine deſertores, ut taceam ipſum inventorum recentiorum minime gnarum multa brevius tradere potuiſſe, ita ut & facilius intelligerentur, & ſine tædio. Peccat etiam proluxa præceptorum explicatione PRESTETUS: Unde Compendium ejus dedit BERNHARDUS LAMY, quod ſub titulo: *Elémens de Mathématique*, (Paris. An. 1704, in 12. reg. (1 Alph. 7 plag.) auctius reuſum tyronibus ob. perſpicuitatem commendari meretur. Artificia tamen analyſeos *Diophantea* non attingit.

§. 11. Hi tamen autores applicationem Algebrae ad Geometriam inſuper habent: quem defectum ſupplent OZANAM in Tractatu Gallico *de locis Geometricis* (plag. 8, Tab. 12.) & altero *de conſtructione æquationum* (plag. 12, Tab. 9) Tractatui de lineis primi generis (§. 15, cap. 3) ſubjuncto; DE LA HIRE in gemino Tractatu ejuſdem nominis & argumenti (§. cit. cap. 3) & inprimis GUISNE' in *Applicatione Algebra ad Geometriam* gallice Parisiſ An. 1704,

in 4. (1 Alph. 19 plag. Tab. æn. 6) edita & ad captum tyronum compoſita exemplis ſelectis inſtructa, atque Illuſtris Marchio DE L'HOSPITAL in egregio Tractatu Analytico *de Sectionibus Conicis & earum uſu*, Paris. 1707, in 4. reg. 2 Alph. 12½ plag. Tab. 32, Gall.) Applicatio Algebrae ad Geometriam ſublimiorem ex HOSPITALIANO opere omnium optime addiſcere licet iis, qui jam in Geometria & Algebra cum fructu verſati & acumine pollent. Ceteris magis ſatisfaciet GUISNE', quo lecto faciliores facient in illo progreſſus.

§. 12. Algebrae quoque præcepta, ſed ſine exemplis, perſpicue explicat GERARD KINCKHUYSEN in *Algebra*, ſermone Batavo, *Harlemi* An. 1661, in 4. edita, (plag. 14) & idem in Fundamento Geometriæ (*Grondt der Meetkonſt*). *Harlemi* An. 1684, in 4. plag. 12) Sectionum conicarum palmarias proprietates per analyſin eruit; in *Geometria* vero (*Harlemi* An. 1663, in 4. plag. 22) conſtructiones Geometricas problematum per Algebram ſolutorum elegantes aſſert. Singula quoque ABRAHAMUS DE GRAAF in *Algebra* ſua (§. 7, cap. 1) cum laude excutitur. Unde Dn. DE TSCHIRNHAUSEN ad ſtudium Algebrae plurimum commendavit hoſce autores. Celeberrimus NEWTONUS in *Arithmetica univerſali*, quam GUIL. WHISTON *Cantabrigie* An. 1707, in 8. (1 Alph.) edidit, exempla habet ſingularia & regulas varias a ſe inven-

tas. Recusa sunt hæc Elementa *Londini* An. 1722, in 8. (plag. 22). In nova editione ordo problematum paulisper immutatus, WHISTONI præfatio & methodus *Hallejana* extrahendi radices ex æquationibus per approximationem omiſſa. Prodiere etiam in *Batavia*, ut nunc facilius haberi possint. Utilem tyronibus operam fumeret, qui eadem Commentario illustraret. Multa enim occurrunt difficilia, quorum rationes non facile assequi licet etiam exercitationibus. Desunt etiam constructiones geometricæ problematum, quorum tantummodo dantur solutiones per calculum. Monuit jam GRAVESANDIUS istiusmodi Commentario esse opus & ejus aliquod specimen de inventione divisorum dedit in *Elementis Matheseos universalis*, *Lugduni Batavorum* An. 1727, in 8. editis (plag. 16, Tabb. æn. 4), quæ Algebræ principia continent.

§. 13. JOSEPHUS RAPHSON in *Analyſi æquationum universali*, quæ (si titulo credimus) secunda vice *Londini* An. 1702, in 4. prodiit una cum Conamine metaphysico de Spatio reali seu ente infinito (plag. 20.) extractiones radicum ex æquationibus per approximationem facilitavit: ROLLIUS in Tractatu gallico de *Algebra* (*Paris*. 1690, in 4. plag. 12) subsidia non contemnenda ad radicum extractionem suppeditat, sed more suo terminis inſuctis utitur, & haud raro nodum in ſcirpo quærit.

Tractatum quoque Gallicum de *Algebra* conscripſit DE CROUZAS, quem *Parisius* An. 1726, in 8. reg. sub titulo: *Traité de l'Algebre*, edidit (1 Alph. 8 plag.). In eo nonniſi Arithmeticam literalem & regulam Algebram propriiſſime ſic dictam explicat, quemadmodum faciunt PRESTETUS & OZANAMUS, nimium prolixus in vulgaribus, ita ut longo tempore multa patientia addiſcenda ſint, quorum uſum proſpicere non licet. Deſunt artificia recentiora, quibus calculus præſertim ſurdorum & extractio radicum mirifice fuit promota. Nec ars exercetur problematis, contra illud SENECAE: Iter longum per præcepta, breve per exempla.

§. 14. Exemplo PASCALII in *Triangulo Arithmetico*, *Parisius* Anno 1654, Gallice edito, HUGENII in *Tractatu de Ludo aleæ*, qui ſub finem Exercitationum Geometricarum SCHOOTENII (§. 25) & Operum variorum Vol. 2 (§. 35) legitur, aliorumque, REMUNDUS DE MONMORT in *Tentamine Gallico Analyſeos de ludis eventus fortuiti*, *Parisius* An. 1708, in 4. reg. (1 Alph. 14 plag.) excuſo & ibidem 1714, auctius (2 Alph. 11 plag.) reſcuſo ad Sortem in ludis diverſis determinandam analyſin applicavit: qui combinationum doctrinam egregie illuſtrat & inſignia artificia analytica edocet. In altera editione leguntur literæ JOANNIS & NICOLAI BERNOULLIORUM de

hoc argumento ad Autorem datæ. Idem præstitit JACOBUS BERNÖULLI in Opere posthumo *Artis Conjectandi* (Basil. 1713, in 4. Alph. 1, plag. 20, Tab. 1). Accessit huic operi Tractatus de seriebus infinitis, mox commendandus. Inprimis autem hoc in argumento commendari meretur ABRAHAM DE MOÏVRE opus pereruditum & multa nova continens, quod sub titulo: *The doctrine of chances, or a Method of calculating probability of Events in play*, Londini 1718, in 4. reg. (Alph. 1) *.

§. 15. ÆGIDIUS FRANCISCUS DE GOTTIGNES, e Societate Jesu, in *Logistica universali* (Neap. An. 1687, in fol. 3 Alph. 14 plag. Tab. 5) principia Algebrae labefactare aggressus est; sed nodum in scirpo quærit & per ambages eò tendit, quo recta pertingere datur. Condonandum hoc videbatur ea ætate, qua Algebrae speciosa infantia erat: sed si nostra reperiantur, qui in dubitationem adducere volunt, quæ dudum stabilita ipsoque diuturno usu probata fuerunt, vix ferendum. Nostrium igitur non esse existimamus de iis scriptis loqui, quæ hic recenseri poterant.

§. 16. HUGO DE OMERIQUE in *Analysi Geometrica* (Gadibus Anno 1698, in 4.) methodo communi algebraica, quæ per æquationes procedit, aliud substituit per rationes argumentandi genus: quod tamen

non adeo late patet, quam illa. Applicat illud ad problemata, per Algebram ab aliis jam soluta & parum difficultatis habentia. Non tamen usu suo caret, cum ad demonstrationes syntheticas manu ducat. Monet PEMBERTON in præfatione ad *Conspectum Philosophiæ Newtonianæ*, NEWTONUM laudasse in hoc autore, quod Analysis veterum restituere conatus fuerit.

§. 17. Methodum CAVALLERII ad calculum aptare studuit JOHANNES WALLISIUS in *Arithmetica infinitorum* An. 1655, primum edita (§. 34, cap. 1) in qua, per summationes serierum infinitarum, quadraturas curvarum & cubationes solidorum determinare aggressus est: Sed cum inductione uteretur, quæ minus demonstrativa videri poterat, ISM. BULLIALDUS per maximas ambages more veterum Geometrarum hoc Arithmeticæ genus demonstravit in Opere novo *Arithmetica infinitorum* Libris 6, comprehendente. (Parisi. An. 1682, in fol. 4 Alph. 16 plag.). Hodie tamen paucis lineis plura præstare licet, quam quæ integro opere BULLIALDI comprehenduntur.

§. 18. Veram viam ingressus non est WALLISIUS, felicius id præstitit Illustris LEIBNITIUS invento calculo differentiali & integrali, quem primum in Actis Eruditorum Anno 1684, pag. 467, publicavit, cum dudum ante An. 1677, eundem in litteris cum celeberrimo NEWTONO

com-

* Atque iterum rursus, ibidem An. 1738, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 11).

communicasset, qui in egregias methodos circa idem tempus inciderat: quemadmodum apparet ex litteris LEIBNITII atque NEWTONI, quæ leguntur apud WALLISIUM Operum Tomo tertio, fol. 634, 648. Cum enim NEWTONUS in literis d. 24 Octobr. 1676, scriberet: *Inversa de Tangentibus problemata sunt in potestate atque illis difficiliora: ad qua solvenda usus sum duplici methodo, una concinnigri; altera generaliori. Utramque visum est in præsentia litteris transpositis consignare: saccda:ioeffh &c.* Literæ in ordinem suum dispositæ hunc habent sensum: *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad inveniendo terminos assumptæ Seriei:* mox LEIBNITIVS ipsum Calculum suum differentialem in literis d. 21 Jun. 1677, apertis verbis perscripsit. Ingenue hoc ipsum fatetur NEWTONUS in prima & secunda editione Principiorum Philosophiæ naturalis Mathematicorum Schol. Lemmat. 2, Lib. 2, pag. 253, 254. In ultima vero ingenuam confessionem, quæ viros summos maxime decet, omisit. Ratio patet inferius. LEIBNITIVS calculum suum publici juris fecit in Actis Eruditorum An. 1684, pag. 467, & NEWTONUS methodum suam in prima

editione Principiorum modo laudatorum, quæ An. 1687, prodit. Postea JACOBI ac imprimis JOANNIS BERNOULLI opera, calculus LEIBNITII ad majorem perfectionem perductus.

§. 19. Calculi differentialis leges exposuit & problematibus exquisitis illustravit illustris Marchio DE L'HOSPITAL, Præceptore usus JOANNE BERNOULLI, in egregio Opere Gallico *Analyses infinities parvorum* (Paris. 1696, in 4. reg. 1, Alph. 2, plag. Tab. 11), omnibus Geometriæ sublimioris Studiosis maximopere commendando. Subinde tamen Commentatore opus habet, ut a tyronibus Geometriæ sublimioris intelligatur. Equidem DE CROUZAS *Commentarium* edidit, qui idiomate Gallico Parisiis An. 1721, in 4. (2 Alph. 1½ plag. 4 Tab.) ; sed plerumque nonnisi calculos, quos Autor contraxit, extendit, in difficilioribus vero lectorem destituit. Unde magis satisfaciens VARIGNONIUS in suis dilucidationibus, quæ sub titulo: *Eclaircissement sur l'Analyse des infiniment petits*, post fata ipsius Parisiis An. 1725, in 4, (plag. 16, Tabb. 6) prodierunt. Opus egregium HOSPITALII Anglice vertit & altera parte de calculo integrali auxit E. STONE, ac sub titulo: *A Method of fluxions both direct and inverse*, Londini 1730, in 8. reg. (1 Alph. 6 plag. Tabb. 15) edidit.

§. 20. Equidem HOSPITALIVS addere constituerat partem alteram de calculo integrali; sed cum LEIB-

NITIUS Scientiam infiniti-dare sibi proposuisset, a proposito suo destitit. Enimvero præter specimina in Actis Eruditorum An. 1702, & An. 1703, nihil ejus publice comparuit. Interea calculi integralis faciliores regulas dare & exemplis illustrare consultum existimabat CARRE', cujus scriptum gallicum : *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion & d'oscillation par l'application du calcul integral* prodiit Paris. An. 1700, in 4. reg. (plag. 15, Tabb. 4). Sed longius progressus GABRIEL MANFREDIUS in Opere eximio *de constructione equationum differentialium primi gradus* (Bononiae An. 1707, in 4. 1 Alph. 2 plag. Tabb. 7) & vir summus NEWTONUS in Tractatu *de quadraturis Curvarum*, qui Opticæ subjungitur, præclara dedit. Plura quoque in parte altera dedit STONE de hoc calculo, quam quæ in Methodo Dn. CARRE' leguntur.

§. 21. Postquam NICOLAUS MERCATOR, Holsatus, in *Logarithmotechnia* (Lond. 1668, in 4. cum MICHAELIS ANGELI RICCI *Exercitatione Geometrica* edita) prop. 17, pag. 31, seqq. quadraturam hyperbolæ per seriem infinitam dedisset; serierum doctrinam per extractionem radicum insigniter promovit & ad curvarum quadraturas & rectificationes applicavit vir summus ISAACUS NEWTONUS: cujus *Analysin per quantitatum series, fluxiones ac diffe-*

rentias, cum Enumeratione linearum tertii ordinis, varios tractatus analyticos a Viro celeberrimo diu ante compositos continentem, Londini 1711, in 4. (plag. 16, Tabb. 2) edidit GUIL. JONES. Quemadmodum vero hoc opus ad serierum doctrinam perdiscendam multum commendari meretur; ita recondita de hoc argumento superaddi debent ex celeberrimi JAC. BERNOULLI dissertationibus *de seriebus infinitis* (§. 14).

§. 22. Serierum doctrinam ex inventis MERCATORIS, NEWTONI, LEIBNITII atque JOHANNIS BERNOULLI exhibuit quoque GEORGIUS CHEYNEUS in *Methodo Fluxionum inversa* (Londini 1703, in 4. reg. plag. 6). Multo vero ante methodum serierum MERCATORIS & NEWTONI multis exemplis illustravit DAVID GREGORIUS in *Exercitatione Geometrica de dimensione figurarum*, Edinburgi An. 1684, in 4. edita (plag. 7, Tabb. 1). Horum exempla complura computata sunt a patruo ipsius JACOBO GREGORIO, quemadmodum ipse fatetur pag. 2, 3, & 4. De Geometria enim sublimiore optime meritis JACOBUS GREGORIUS, quemadmodum ex ejus Libro *de vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura*, cum *Geometria parte universalis*, quantitatum curvarum transmutationi inserviente colligitur. Prodiit Patavia 1668, in 4. Tractatus de Quadratura constans plag. 8, Appendix de Geometriæ parte universalis plag. 19. Ceterum

terum hinc perspicere licet, quid ab eo expectandum fuisset, nisi fata propositum ejus intervertissent.

§. 23. JOAN. CRAIGE, Scotus, 1685, *Londini* in 4. (plag. 6, Tab. I) edidit Tractatum de *Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi*, & An. 1693, addidit Tractatum de *figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis*, *Londini* in 4. (plag. 11, Tab. I) excusum. Utitur equidem calculo differentiali LEIBNITII, cum in Anglia calculus fluxionum adhuc ignoraretur, nec editis An. 1687, Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis NEWTONI, ullus Geometra de eodem cogitaret; per ambages tamen adhuc incedit, quod calculus integralis seu summatorius nondum ipsi esset perspectus. In quadrandis igitur curvis utitur Theorematis BARROWIANIS, quibus opus non habemus, si calculi differentialis vis fuerit perspecta, cuius pars quædam est summatorius seu integralis, qui dicitur. Inde est, quod etiam GREGORIUS alia via incedat, etsi seriebus infinitis utatur. De Locis Geometricis formulas generales tradit CRAIGIUS, quas HOSPITALIUS in opere analytico de sectionibus conicis (§. 10) uberius explicavit & illustravit, & nos in Elementis Algebrae dilucidatas ad facillimam intelligentiam reduximus, via ad ulteriora planissima strata. Enimvero ubi calculus integralis, quem Angli me-

thodum fluxionum inversam vocant, in Anglia quoque invaluisse; idem CRAIGIUS *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 12½). Libros duos de *Calculo fluentium* & totidem de *Optica analytica* edidit, quorum istis doctrinam de Quadraturis Curvarum promovet.

§. 24. Quæ apud HOSPITALIUM in Analyfi infinite parvorum, CARRESIUM, sive Quadratum, CHEYNÆUM, GREGORIUM & CRAIGIUM in Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi & in Tractatu de Quadraturis figurarum Curvilinearum occurrunt; ea in unum volumen congestit & perspicue explicavit, varia etiam problemata, quorum solutiones in Actis Eruditorum Lipsiensibus extant, inprimis quæ in iisdem LEIBNITIUS de motuum cœlestium causis physicis dedit, illustravit CAROLUS HAYES in opere Anglico, quod sub titulo: *Traité de Fluxions, or introduction to mathematical and mechanical Philosophy*, *Londini* An. 1704. in fol. (3 Alph. 3 plag.) prodit.

§. 25. Regulas Algebrae communis atque Analyseos LEIBNITIANÆ, hoc est, calculi differentialis & summatorii, uno opere complexus est CAROLUS REYNAU, quod sub titulo: *Analyse démontrée*, *Paris*. 1708, in 4. reg. (Alph. 5, plag. 7, Tabb. æn. 5): sed in exemplis parciore videri poterat, quam ut tyronibus inservire possit, provecioribus tamen commendandus. Neque etiam ea præstitisse

vide.

videtur, quæ titulus promittit, cum eas demonstrationes in hoc Opere non reperias, quæ forsan in eodem quæviseris, demonstrationis notionem distinctam animo complexus.

§. 26. Calculus fluxionum, qui cum differentiali & summatorio idem est, in Anglia primum comparuit, cum ISAACUS NEWTONUS Opticam suam ederet An. 1704, de qua suo loco dicemus. Addidit enim præter *Enumerationem Linearum tertii Ordinis seu curvarum secundi generis Tractatum de Quadratura curvarum*, in quo hanc doctrinam plurimum promovit, & calculum hunc explicat eademque utitur. Ex intervallo GUILIELMUS JONES *Londini* An. 1711, in 4. plag. 16, Tab. 2, edidit NEWTONI *Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias cum Enumeratione linearum tertii ordinis*, ex quo apparet, quid NEWTONUS in Geometria sublimiori per analysin promota præstiterit, & quantum serierum doctrinam promoverit. Cum vero in tractatu de Enumeratione linearum tertii ordinis demonstrationes desiderarentur; hunc defectum supplevit JACOBUS STIRLING in Illustratione Tractatus D. NEWTONI *de Enumeratione linearum tertii Ordinis*, quæ *Oxonia* An. 1717, in 8. (plag. 9½) lucem adspexit & multa præclara continet.

§. 27. Haud ita pridem, nimi-

rum An. 1736, JOHANNES COLSON Methodum fluxionum & infinitarum serierum NEWTONI in sermonem Anglicum translata edidit *Londini* in 4. sub titulo: *The Method of fluxions and infinite series, With its application to the Geometry of curve-lines.* (Alph. 2)*. Tractatus hic idem est, quem publico An. 1728, in præfatione ad Conspectum Philosophiæ *Newtonianæ* promiserat PEMBERTON. Egregio Commentario librum hunc illustravit Editor, qui maximam operis partem complet & multa offert, quæ Analyseos cultores alibi frustra quærunt. Ipse NEWTONUS docet, quomodo æquationes in series infinitas resolvantur, quomodo fluentium fluxiones seu quantitatum variabilium differentialia & ex fluxionibus fluentes seu differentialium summæ inveniuntur, & per methodum fluxionum maxima & minima, tangentes, quadraturæ & rectificationes curvarum determinentur. Ubi simul ostenditur, quomodo curvæ quadrabiles detegantur, curvæ cum sectionibus conicis comparabiles investigentur, curvæ rectificabiles inveniantur & quæ sunt alia hujus generis.

§. 28. Anno 1730, JACOBUS STIRLING *Londini* in 4. charta augusta (Alph. 1, plag. 15) edidit *Methodum differentialem* sive Tractatum de Summatione & interpolatione serierum infinitarum. In eo potissimum docet,

* Eundem NEWTONI Tractatum Gallice versum dedit nuperrime Celeb. DE BUFFON. *Paris* in 4. (Alph. 1) cum eleganti Præfatione.

docet, quibus artificiiis assequamur valores illarum serierum, quæ summari nequeunt, ut habeatur solutio illorum problematum, quæ ex quadraturis pendunt. Non modo inventa aliorum exponit, verum etiam propriis hanc doctrinam plurimum promovit, ut adeo opus insigne sublimioris Matheseos studiosis summopere sit commendandum.

§. 29. Commendanda hic quoque sunt ABRAHAM I DE MOIVRE *Miscellanea analytica de seriebus & quadraturis*, quæ eodem Anno Londini in 4. reg. (Alph. 1, plag. 9) prodire. Accessere varix considerationes de Methodis comparisonum, combinationum & differentiarum, solutiones difficiliorum aliquot problematum ad fortem spectantium, itemque constructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum, quæ in motibus corporum cœlestium occurrunt. Multa in hisce Miscellaneis occurrunt, quibus non modo serierum doctrina, verum etiam mensura fortis & alia ad Mathesin sublimiorem spectantia capita promoventur.

§. 30. Quæ NEWTONUS in Tractatu de Quadraturis curvarum dederat, alia methodo investigare docuit ROGERUS COTESIUS, Professor Astronomiæ & Experimentalis Philosophiæ apud Cantabrigienfes, in *Harmonia Mensurarum, sive Analyfi & Synthesi per rationum & angulorum mensuras promota*, quam cum aliis ejusdem *Wolffii Oper. Mathem.* Tom. V.

opusculis mathematicis ejus successor ROBERTUS SMITH *Cantabrigiæ* An. 1722, in 4. (plag. 50, Tab. I) post mortem ejus præmaturam edidit. Potissimum ipsi propositam est dare *Logometriam*, quam vocat, qua scilicet per Logarithmos, sinus, atque tangentibus investigantur, quæ hactenus ad Quadraturam circuli & hyperbolæ fuerunt reducta, differentialium summatione ad mensuras rationum & angulorum reducta. In operibus miscellaneis *Æstinatio errorum in mixta Mathesi* per variationes partium Trianguli plani & sphericæ, qualia theoremata dedimus in Trigonometria plana, *Tractatus de Methodo differentiali Newtoniana*, quem multo ante ab eo conscriptum dicit Autor, quam a JONESIO, NEWTONI de eodem argumento Tractatus in Analyfi superius commendata (§. 2) ederetur, *Canonotechnia* sive constructio Tabularum per differentias, & Tractatus de *Descensu gravium, de motu pendulorum in Cycloide & de Motu projectorum*. Quomodo inventa *Cotesiana* ex *Newtonianis* deducantur, docet Anonymus * in *Epistola ad Amicum de COTESII inventis*, Londini, eodem adhuc Anno in 4. edita (plag. 13).

§. 31. LEIBNITIUS calculum differentialem & summatorium primum exercuerat in quantitativis finitis, veluti in summandis potentiis numerorum, & deinde lecto opere *Hugoniano* de horologia oscillatorio & op-

G

re

* Dr. HENRICUS PEMBERTON.

re Conico GREGORII A S. VINCENTIO ad quantitates infinite parvas applicavit, atque sic via vere analytica in calculum differentialem & summatorium seu integralem incidit, quali hodie in Geometria sublimiori utimur. In Anglia eundem calculum, seu methodum fluxionum stylo Anglicano, ad quantitates finitas applicavit. BROOK TAYLOR in *Methodo incrementorum directa & inversa*, quæ Londini 1715, in 4. (pag. 15½) prodit. De obscuritate, qua in scribendo usus Autor, publice conquestus est JOANNES BERNOULLI, ut adeo mirari desinant lectores in sublimioribus nondum satis versati, siquidem hinc inde hæsitent. Continentur tamen in hoc opere lectu digna.

§. 32. Integræ Mathesin puram, una cum Algebra & calculo differentiali, succincte explicavit WILHELMUS JONES in *Synopsi palmariorum Matheseos*, Anglice An. 1706, Londini in 8. (pag. 20) edita; sed sine interprete a tyronibus vix intelligitur, qui tamen hoc duce commode utuntur in repetendis iis, quæ ex aliis Autoribus didicere. In iis, quæ ad Algebram communem spectant, cum hac Synopsi convenit Tractatus de Algebra itidem Anglice scriptus & Londini 1717, in 8. reg. editus (pag. 15) a RONAYNIO: recentior enim analysis in eo desideratur, & methodus Tangentium atque de maximis

& minimis per methodum exhaustionum illustratur.

§. 33. Equidem BERNHARDUS NIEUWENTYT in *Considerationibus circa Analysis ad quantitates infinite parvas applicata principia & calculi differentialis usum in resolvendis problematibus Geometricis* (Amstel. 1694, in 8. plag. 3) & in *Considerationibus secundis circa calculi differentialis principia* (Amstel. An. 1696, in 8. plag. 3) contra calculum differentialem nonnulla dubia movit, & hinc in *Analysi Infinitorum* (Amstelod. A. 1695, in 8. plag. 20, Tab. 21) methodum aliam substituit; sed non modo LEIBNITIUS atque BERNOULLIUS in Actis Eruditorum An. 1695, p. 310, & seqq. it. p. 369, & seqq. & An. 1697, p. 125 & seqq., verum etiam Cl. JACOBUS HERMANNUS, nunc * Mathematicum Professor Francofurtanus, in *Responsione ad illas considerationes secundas*, Basilea, Anno, 1700, in 8. (pag. 4) iisdem abunde satisfecerunt; quamvis memini, quod hic LEIBNITIO non ex affe satisfecerit, quod quantitates infinite parvas tanquam entia realia consideret, cum tamen non sint nisi modus loquendi, qui exhibet, stylo *Jungiano*, toleranter vera, quemadmodum clarissime docui in Ontologia, in qua realia ab imaginariis ubivis discrevi. Analyti tamen infinitorum *Nieuwentytiana* in rem suam uti norunt intelligentes. BERNHARDUS DE FON-

TENELLE,

* Anno scil. 1715, quo primum hæc Commentatio edita est. Vide infra, Cap. VI. §. 17.

TENELLE, Academiæ Regiæ Scientiarum, quæ Parisiis floret, Secretarius, idiomate patrio An. 1727, *Parisius* in 4. reg. (Alph. 3, plag. 3, Tab. I) edidit Elementa Geometriæ infinitorum (*Elémens de la Géométrie des infinis*), in quo potissimum sibi propositum habet, ut calculos hodie receptos ex ipsa notione infiniti deducat. Considerat vero, quemadmodum omnibus fere Mathematicis solenne est, infinite magnum & infinite parvum Mathematicorum per modum entisrealis. Satisfacere intendit theoria sua iis, quibus Analysis infinitorum moderna suspecta videtur, ut adeo hic loci commemorari debuerit hoc opus.

§. 34. In Actis Philosophicis Anglicanis pro mensibus Septembri & Octobri Anno 1708, editis scripserat JOHANNES KEILL, inventorem Arithmeticæ fluxionum, sine omni dubio primum esse NEWTONUM, eandem tamen postea, mutatis nomine & notationis modo, editam esse a LEIBNITIO in Actis Eruditorum. LEIBNITIUS, cui hæc Acta miserat Cl. SLOANE, tum Societatis Regalis Secretarius, in literis d. 4 Martii An. 1711 datis, de injuria sibi illata conquestus desiderabat, ut KEILLIUS publice testaretur, non fuisse sibi animum LEIBNITIO imputandi, quasi alienum inventum sibi attribuerit. Enimvero KEILLIUS in epistola ad eundem SLOANUM data, quæ primum scripserat defendit &

ostendere conatur, quomodo ex *Newtonianis* sua deduxerit. Cum candorem suum jam apertius, quam ante oppugnari existimaret LEIBNITIUS, sibi que parum convenire arbitraretur, ut provectioni ætate post tot documenta vitæ eum apologia defenderet; in literis ad SLOANUM d. 29 Decembris An. 1711 datis, æquitati Societatis committebat, annon coercendæ sint vanæ & injustæ vociferationes, quas ipsi NEWTONO improbari putabat confisus eundem sententiæ suæ libenter daturum indicia. Jussit Societas monumenta antiquiora consuli & Sociis aliquot in mandatis dedit, ut in eam rem inquirerent & quæ in scriptis antiquis invenirent ad eam, una cum sententia sua, referrent. Hi pronunciarunt, NEWTONUM esse primum inventorem, nec KEILLIUM inventum eidem vindicantem injuriam fecisse LEIBNITIO. Jussu adco Societatis Regiæ in lucem editum est *Londini* 1712, in 4. (plag. 15½) *Commercium Epistolicum* D. JOHANNIS COLLINS & aliorum de *Analysi promota*, & per Europam inter Mathematicos distributum. Continentur in eo excerpta ex literis, quorum autographa conservat illustris Societas Regalis, una cum Epistolis NEWTONI atque LEIBNITII, quæ jam apud WALISIUM Tomo tertio Operum leguntur, Tractatus de *Analysi* per æquationes numero terminorum infinitas a JONESIO editus (§. 26), episto-

LEIBNITII ad HANS SLOANE & KEILLII responsiones ad eandem, de quibus modo diximus, & Relatio ac sententia Commissariorum, quam modo retulimus.

S. 35. LEIBNITIUS tunc temporis Viennæ in Austria degebat, nec commercium epistolicum ibidem videre ipsi contingebat. Cum igitur ex ipso per litteras quærerem, num idem in Actis Eruditorum recenseri & quædam ad ipsum reponi consultum judicaret, consultius ipsi videbatur, ut charta quadam volante, suppresso loci ac Autoris nomine, publico significaretur, ipsum esse Viennæ nec commercium epistolicum vidisse, atque ex litteris JOANNIS BERNOULLI excerptum publicaretur, quo rationes continebantur, cur inventum calculi differentialis ipsi dubium reddi minime possit. Inde ansam arripiebat KEILLIUS, cum in Transactionibus Anglicanis, tum in Diario literario quod Hagæ Comitum prodibat, paulo durius de LEIBNITIO atque BERNOULLIO scribendi. Quamobrem cum LEIBNITIO limites modestiæ transgredi videretur, a se impetrare non potuit, ut ipse responderet. Scripsit tamen sententiam suam ad amicos, ad quas ejus litteras NEWTONUS quoque respondit, tumque apparuit, quæ a KEILLIO dicta fuerant, consentiente & approbante NEWTONO prolata fuisset. Epistolas hæc LEIBNITII atque NEWTONI idiomate Anglico

cum excerptis nonnullis aliis *Historiæ fluxionum* suæ latine conscriptæ adjecit JOSEPHUS RAPHSO-N, in qua originem & progressum hujus methodi brevissimo compendio exhibere intendit. Prodiit *Londini* 1715, in 4. (pag. 16). Quid sibi proposuerit Autor, ipse in præfatione monet, scilicet inventiones præcipuas in hoc genere primis suis autoribus speciatim asserere & vindicare, & in primis D. NEWTONO inventori longe & tempore primo, & præstantia inventionum præcellentissimo, & aditum patefacere tyronibus ad hæcce facilius, & explicatius, adeoque ut cuivis introductionis loco ad *Newtoniana*, *Cheynaana* aliorumque inventa & congesta in hoc genere inserviret. Si quis historiam Analyseos infinitesimalis conscribere vellet, ut origo & progressus pateret, ac unicuique quod suum est tribueretur; illi multo majore studio ac solertia inquirendum esset in ea, quæ a tempore CAVALLERII usque ad præsens a Geometris fuere edita, & accurate determinandum, quantum unusquisque ex inventis alterius sibi notis vel proficere potuerit, vel actu profecerit: ubi certa a probabilibus exacte distinguenda. Sed alibi in Logica de historia scientiarum & artium mentem nostram aperuimus & uberius explicavimus.

S. 36. Controversia hæc de inventore calculi differentialis postea magna animorum contentione agita-

ta, præsertim inter KEILLIUM & JOANNEM BERNOULLIUM, de qua inprimis legi possunt Acta Eruditorum Lipsiensia. Nostrium jam non est eam definire, cum discussione hic non sit locus, sine qua definiri nequit, nec hoc nobis sumimus. Neque opus est ex Actis laudatis huc transcribere, quæ ibidem legi possunt. Nos veneramur merita NEWTONI, veneramur merita LEIBNITII, BERNOULLII, aliorumque; æquum existimamus, ut suum cuique tribuatur, & gloria, quæ dat vires præclaræ agendi, excitentur magna ingenia; in aliorum merita extollenda proni sumus: principiis tamen Philosophiæ moralis adversum judicamus de laudè altercari, nec ulla nos autoritas movebit, ut altercationibus istiusmodi calculum adjiciamus.

§. 37. Antequam igitur recensio-
ni præsentis Autorum colophonem
imponamus, monemus curvarum de-
scriptionem plurimum promovisse
COLINUM MAC LAURIN, Ma-
thæscos in collegio novo. Abredon-
nensi Professore, & GULIELMUM
BRAIKENRIDGE, Ecclesiæ Ang-
licanæ Presbyterum. Edidit ille
Londini An. 1720, in 4. (pag. 19,
Tabb. 12) *Geometriam organicam, sive*
Descriptionem Linearum curvarum uni-
versalem. Docet in eadem, quomo-
do lineæ secundi, tertii, quarti tan-
demque ordinis cujuscunque descri-
bantur, & ubi ostendit, quomodo lineæ
omnium ordinum altiorum ope linea-

rum ordinis cujuscunque inferioris
describantur, simul descriptionem Cur-
varum organicam *Newtonianam* de-
monstrat. Plurima hic reperies ad
Geometriam sublimiorem spectantia.
Alter horum autorum, Londini 1733,
in 4. in publicam lucem emisit. *Exer-*
citationem Geometricam de Descriptio-
ne Linearum Curvarum (pag. 10).
Tradit primum descriptionem curva-
rum primi generis, seu linearum se-
cundi ordinis, deinde vero descrip-
tionem Linearum cujuscunque ordi-
nis. ope Linearum ordinis inferioris
& denique descriptionem sectionum
conicarum ope plurium rectarum cir-
ca polos moventium. Diverfa tamen
sunt ejus theorematum ab illis, quæ
tradit prior, & plura hisce etiam ma-
jora promittit in una aut altera ex-
citatione post paucos menses eden-
da: Nobis tamen huc usque, præter
eam quam hic commemoramus,
nullam videre licuit. Utiles sunt de-
scriptiones curvarum generales ad
Theoriam Curvarum condensam,
qualem adhuc desiderari supra (§. 19,
c. 3) monuimus. Quid enim tribuen-
dum sit definitionibus genericis, vel
ex *Synopsi Geometrica* HONORATI
FABRY, e Societate Jesu, intelli-
gitur, quæ Lugduni Gallorum in gra-
tiam tyronum edita An. 1669, in
12. (Alph. 1. cum figuris multis in
folio excusis), & cui accessere tria
opuscula, nimirum de *Lineæ Si-*
nuum & Cycloidæ, de maximis & mini-
mis centuria & Synopsi Trigonometria:

plane. Absit tamen, ut cum Autoribus Anglis, quorum Tractatus hic commendavimus, æquipares BARTHOLOMÆI INTIERI, Florentini, *ad nova arcana Geometrica detegenda aditum*, qui *Beneventi* 1703, in 4. (pag. 13, Tab. 2) & APOLLONIUM ac SERENUM *Promotum*, qui *Neapoli* 1704, in 4. (pag. 9, Tab. 1) lucem adspexit, ubi sectionum conicarum graduum superiorum genesin tradit. A tyronibus tamen ea legi non inconsultum est, antequam ad sublimiora Anglorum inventa pedem promoveant.

§. 38. Coeterum multa ad calculum differentialem & integralem spectantia peti debent ex Actis Eruditorum, ex Historia & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis *Parisiis* prædeunt & *Amstelodami* recuduntur, ex Transactionibus Anglicanis, ex Miscellaneis Berolinensibus, & Commentariis Pétropolitans, de quibus singulis supra diximus (§. 36, & seqq. cap. 1). Inter Algebraistas imprimis quoque nominari debebant JOHAN. FAULHABERUS ex textore Mathematicus insignis, cum quo per aliquod tempus egit CARTESIUS, cum Algebra vacaret, & JUSTUS BYRGIUS WILHELMII Hassiæ Landgraviæ Mechanicus, sed illius scripta perpauca, hujus nulla videre hactenus licuit.

§. 39. Coronidis loco adhuc observamus, in gratiam tyronum idioma Anglo Institutiones fluxionum edidisse HUMPHRÆDUM DITTON,

in quibus præcepta calculi explicat & exemplis quibusdam selectis illustrat, cum istiusmodi libellus adhuc desideraretur. Post obitum Autoris novam editionem dedit JOHANNES CLARKE, Regi a sacris ordinariis, quæ sub titulo: *An Institution of fluxions*, *Londini* An. 1726, in 8. reg. (pag. 16) prodiit. In eorundem usum L. TREVIGAR *Sectionum conicarum Elementa* methodo facillima demonstrata edidit *Camabrigiæ* An. 1731, in 4. reg. (Alph. 1, pag. 1, Tab. an. 12). In compendium misit Tractatum analyticum de sectionibus conicis HOSPITALII, in quo methodus genetica cum analytica conjungitur, ut in Geometria & Algebra vel mediocriter versatus præcipuas sectionum conicarum proprietates addiscere possit. Addidit nonnulla, quæ in HOSPITALIO desiderantur, sed ad Principia Philosophiæ naturalis mathematica intelligenda requiruntur. In Italia vero FRANCISCUS XAVERIUS BRUNETTI, Sacratio Pontificis Maximi CLEMENTIS XII Præfectus, sub titulo: *Dell Arimetica commune e speciosa Trattato*, seu Tractatus de Arithmetica communi & speciosa, *Romæ* A. 1731, in 4. (Alph. 1, pag. 11, Tab. 2) Introductionem edidit ad scripta arithmetica & analytica intelligenda, in quo præter Arithmeticam, Algebram quoque & Analysis infinitesimalem recentiorum perspicue explicat, ut adeo plura in hoc opere reperiantur, quam titulus promittit.

Mathematicus. Prodiit An. 1616, in fol. (21 Alph. 17 plag.). Continentur in eo I. RHETICI libri tres de fabrica Canonis doctrinæ triangulorum, & 2. ejusdem liber quartus de triangulis globi: 3. OTHONIS libri quinque de triangulis globi sine angulo recto: 4. prolixus Canon triangulorum.

§. 5. PITISCUS vero & ipse *Trigonometriam* egregie illustravit editis quinque de eadem libris An. 1599, quorum editio tertia auctior prodiit *Francos.* An. 1612, in 4. (2 Alph. 15 plag.). Libris istis subjicitur Canon Sinuum, tangentium & secantium una cum libris undecim, in quibus trigonometriæ usus in solutione problematum Geodæticorum, altimetricorum, architectonicorum, geographi-
corum, gnomonicorum & astronomicorum ostenditur, quæ a nobis suis in locis per eandem soluta.

§. 6. Non minus commendari merentur WILLEBRORDI SNELLII *doctrinæ Triangulorum Canonica* libri quatuor, quibus Canonis sinuum, tangentium & secantium constructio, triangulorum tam planorum, quam sphaericorum expedita dimensio breviter ac perspicue traditur, una cum Canone Secantium. Post mortem Autoris eos edidit MARTINUS HORTENSIVS, Delfensis (*Lugd. Bat.* 1627, in 8. plag. 29) & tractatus problematum geodæticorum & sphaericorum adjecit, quibus utriusque Trigonometriæ usus edocetur.

§. 7. An. 1591, PHILIPPUS LANZBERGIUS edidit *Geometriam Triangulorum*, quæ Anno 1663, *Middelburgi in Seelandia* in fol. (plag. 11) auctius recusa & primum inter opera ejus locum tenet (§. 26, c. 1). In eo Trigonometriam tam planam, quam sphaericam, & constructionem sinuum atque tangentium perspicue explicat, quemadmodum jam fecerat GEORGIUS PURBACHIUS, Praceptor REGIOMONTANI, Professor Matheseos in Academia Viennensi, qui in promovendo Matheseos studio plurimum operæ collocavit, & de cuius meritis plura dicemus in Astronomia.

§. 8. Insignis ad Trigonometriam accessio facta est, Logarithmis a JOHANNNE NEPERO, Barone Merchistonii Scoto, in candem introductis. Prodiit *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria & omni Logistica mathematica explicatio*, *Edinburgi* 1614, in 4. (plag. 21) & opera filii, parente mortuo, recusum est opus auctius An. 1619. Accessere nempe tractatus aliqui de logarithmorum constructione posthumi. In eodem opere continetur regula generalis facilius solvendi triangulorum sphaericorum rectangulorum casus omnes, cui similem nos quoque dedimus in Elementis nostris. Cæterum logarithmi isti ab iis, quibus nunc utimur, sunt diversi: supposuit enim NEPERUS in prima eorundem constructio-

structione logarithmum Sinus totius seu radii 0, ut multiplicationem & divisionem in Trigonometria plerumque proflus evitaret, nec additionem vel subtractionem substituere opus haberet.

§. 9. Canonem NEPERI ad singula minuta prima quadrantis constructum ad dena secunda extendit BENJAMIN URSINUS, Mathematicus Electoralis Brandenburgicus, & cum Canonis tam naturalis, quam artificialis constructionem, tum Trigonometriam utramque & quidem sphericam juxta NEPERUM explicavit in *Trigonometria, Colonia* An. 1625, in 4. edita (constat liber 1 Alph. 12 plag. & Canon 2 Alph. 11 plag.). Multa continet lectu digna, præsertim quoad constructionem Canonis & praxin Trigonometriæ sphericæ.

§. 10. Postquam KEPLERUS hoc logarithmorum genus a JUSTO BYRGIO supra laudato (§. 38, C. 4) inventum, sed illo reprehendente in Rudolphinis f. 11, in privatos tantum usus reservatum, ad Astronomiam transtulerat; ipsius gener JACOBUS BARTSCHII Canonem URSINI reduxit, resectis tribus ultimis cyphris, & particulam antilogarithmorum exactiorum ad singula bina secunda, Tabulamque logarithmorum indicis prostaphæreseos supputavit atque Heptacosiadem *Keplerianam* ad singula scrupula secunda dilatavit. Has tabulas, sub foci KEPLERI auctoritate, *Sagani* edidit An. 1630, sed ob

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

earum usum in calculo *Rudolphino* insignem sub titulo: JOH. KEPLERI & JACOBI BARTSCHII *Tabule Manuales Logarithmice* An. 1700, *Argentorati* in 8. (1 Alph. 17 plag.) recudi fecit JOHANN. CASPAR EISENSCHMID, Med. D.

§. 11. Ex consilio NEPERI logarithmorum formam immutavit HENRICUS BRIGGIUS, Professor Geometriæ Oxoniensis, ita ut logarithmus unitatis fieret 0, quemadmodum nos exposuimus in *Elementis Arithmeticæ* cap. 8. Construxit Canonem Logarithmorum numerorum vulgarium ab 1 usque ad 20000 & a 90000 usque ad 100000, quem in *Arithmetica Logarithmica* una cum methodo inveniendi logarithmos & usu eorundem exhibuit An. 1624, in fol. Sed mox *Goude* An. 1628, in fol. (9 Alph. 7 plag.) eandem recudi fecit ADRIANUS VLACQ *Goudanus*, qui logarithmos Briggianos 4 numeris minuit, lacunam inter 20000 & 90000 explevit, ut 100 logarithmorum chiliades exhibuerit, Canonem triangulorum seu Tabulam sinuum & tangentium artificialium ad radium 100000000000 & ad singula scrupula prima quadrantis adjecit, in descriptione vero *Briggiana* quædam hic illic immutavit, quædam omisit, quædam adunxit. Idem postea An. 1633, Canonem sinuum atque tangentium artificialium extendit ad singula dena secunda & sub titulo *Trigonometriæ artificialis seu Magni*

H

Cano-

Canonis triangulorum Logarithmici, *Goude* in fol. (5 Alph. 3 plag.), adjectis Chiliadibus viginti Logarithmorum pro numeris naturali serie crescentibus H. BRIGGII, edidit.

§. 12. Inchoaverat idem BRIGGIUS Canonem sinuum & tangentium artificialem pro gradibus graduumque centesimis; sed morte præpeditus non absolvit. Quæ adeo deficiebant, supplevit HENRICUS GELLIBRAND & An. 1633, sub nomine *Trigonometriae Britannicae* publicavit. Prodiit *Goude* in fol. (3 Alph. 7 plag.)

§. 13. Sub eodem *Trigonometriae Britannicae* nomine, sed Anglico idiomate opus trigonometricum præclarum edidit JOHANNES NEWTON, *Londini* 1658, in fol. (5 Alph. 19 plag.), in quo continentur 1. constructio & usus Canonis sinuum & tangentium naturalis atque artificialis, 2. solutio triangulorum, tam planorum, quam sphaericorum, 3. chiliades centum logarithmorum pro numeris vulgaribus, 4. Canon logarithmorum pro sinibus & tangentibus ad singulos gradus & partes graduum centesimas, 5. Canon logarithmorum pro sinibus & tangentibus ad tres primos Quadrantis gradus & partes graduum millesimas.

§. 14. Fundamentum Logarithmorum breviter quidem, attamen perspicue exposuit STIFELIUS in *Arithmetica integra* (§. 7. C. 1.) Lib. 3, f. 249, b & seqq. monens posse

hic fere novum l'brum integrum scribi de mirabilibus numerorum, sed oportere, ut se hic subducat & clausis oculis abeat. Utilitatem fractionum decimalium ad exprimendos numeros prope veros, qui in calculo excludant errorem quantumlibet exiguum, adeoque contempnendum, dudum ante monstravit REGIOMONTANUS. Hisce igitur luminibus usi sunt BYRGIUS atque NEPERUS in Logarithmis computandis. Recentiores vero alias invenere methodos, de quibus in Algebra agitur. Illa tamen, qua usi sunt Canonis conditores, ad captum tyronum composita, adeoque à nobis in Arithmetica retenta.

§. 15. An. 1643; *Bononiae* in 4. (1 Alph. 1 plag.) BONAVENTURÆ CAVALLERII *Trigonometria plana & spherica, linearis & logarithmica*, cum canone duplici Trigonometrico & chiliade numerorum absolutorum ab 1 usque ad 10000, eorumque logarithmis ac differentiis, opus Autore suo dignum, prodiit. Eodem usus est GEMINIANUS RONDELLI, Mathem. Professor Bononienfis, qui An. 1705, *Bononiae* in 4. (2 Alph. 12 plag.) *Trigonometriam universalem linearem & logarithmicam*, Italico idiomate edidit, cum Canone sinuum, tangentium & secantium, atque logarithmorum sinuum & tangentium & decem chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 16. SETHI WARDI *Idea Tri-*

gonometriae demonstrata, quæ cum Prælectione de Cometis & Inquisitione in BULLIALDI Astronomiæ Philolaicæ fundamentum, Oxonii An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, est admodum concisa & characteribus expressa. Ejusdem vero indolis est *Trigonometria* WILHELMI OUGHTREDI, quæ cum Canone sinuum, tangentium & secantium Londini 1657, in 4. lucem adspexit (1 Alph. 13 plag.). In eundem quoque censum veniunt JOANNIS WILSON *Principia Trigonometriae succincte demonstrata*, quæ Lugduni Batavorum An. 1718, in 8. (plag. 5, Tab. 2) prodire.

§. 17. RICHARDUS NORWOOD in *Trigonometria*, quæ Anglico sermone Lond. 1651, in 4. recusa, (2 Alph. 3 plag.) præter Trigonometriam planam & sphericam, logarithmorum doctrinam explicat, & omnia Trigonometriæ sphericæ problemata per duo axiomata fundamentalia NEPERI solvit. Adjiciuntur Canones sinuum & tangentium naturalium atque artificialium, cum 10 chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 18. WILHELMUS HAWNEY An. 1725, Londini in 8. reg. (Alph. 1, plag. 8) Trigonometriam planam & sphericam omnem explicatam dedit & ejus usum in Navigatione, Astronomia, Geographia, Architectura militari, Geodæsia & Euthymetria, atque Gnomonica prolixè commonstravit in libro sermone An-

glico edito sub titulo: *The Doctrine of plain and spherical Trigonometry.*

§. 19. *Compendium Trigonometriæ planæ & sphericæ* non contemnendum, Leodii 1704, in 8. (12½ plag.) editit JACOBUS GOODEN, e Societate Jesu, in quo regulæ accurate demonstrantur & exemplis utilibus ex Geodæsia, Astronomia & Geographia petitis illustrantur. Adjiciuntur palmaria ex EUCLIDE theoremata, cum Canonibus sinuum, tangentium & logarithmorum contractis.

§. 20. In cursibus Trigonometriam bene explicant DECHALES atque OZANAM (§. 4. 7. c. 1). Præterea in multis aliis libris, qui de Astronomia & Navigatione conscripti sunt, Trigonometria tam plana, quam spherica explicatur. Sed de eo dicemus suo loco, quando illorum mentionem facturi sumus.

§. 21. *Tabule Sinuum & Tangentium itemque Logarithmorum* separatim editæ commendantur VLACCI, quæ Hæge Comitum An. 1665, prodierunt, & OZANAMI, quæ juxta eas correctæ. Quid nos in nostris præstiterimus, quæ Hale 1711 (plag. 20) prodierunt, & 1728, recusa ex præfatione iisdem præfixa intelligi potest.

§. 22. *Analysis speciosa Trigonometriæ sphericæ*, primo mobili; Triangulis rectilineis & Progressioni Arithmeticæ & Geometricæ aliisque variis Problematis applicata a R. P. JACOBO KRESA, e Societate Je-

fu, quæ *Praga* prodiit 1720, in 4. (Alph. 2, Tab. 2), docet usum Algebrae communis, cujus Isagoge

libro primo præmittitur; in Trigonometria plana & Sphærica.

CAPUT VI.

De Statica & Mechanica.

§. 1. **T**heoria Staticæ atque Mechanicæ apud veteres fuit valde imperfecta, nec quicquam ea de re extat, nisi quod ARCHIMEDES in duobus *De æquiponderantibus* libris, de centro gravitatis figurarum planarum, & de Statices palmario fundamento, & PAPPUS lib. 8. *Collect. Mathematic.* de quinque Potentiis mechanicis, vecte, axē in peritrochio, trōchlea, cochlea & cuneo demonstrat.

§. 2. Neque ulterius progrediuntur Autores. recentiores, qui institutiones Mechanicas ediderunt: immo plerique Archimedeæ de centro gravitatis, quæ non sunt ad palatum tyronum, nec ad praxin directe tendunt, omittunt. Pertinent huc GUIDI UBALDI liber *Mechanicorum*, *Pisauri* An. 1577, editus in fol. (2 Alph.) SIMONIS STEVINI *Statica* (§. 23, Cap. 1); JAC. ROHAULT *Tractatus de Mechanica*, qui inter posthuma habetur *Hagæ* 1690, in 12. reg. (1 Alph. 22 plag.) edita & non nullis editionibus Physicæ ejus in Latinum versæ subjungitur; IGNA-

TII GASTONIS PARDIES *Statica* Gallice *Hagæ Comitum* An. 1692, in 12. (10½ plag.) tertia vice recusa & vitiosissime in Latinam linguam translata; BERNHARDI LAMY *Tractatus Gallicus de Mechanica* (*Parisius* 1687, in 12. plag. 12), cui accessit plagula una continens Novam methodum demonstrandi præcipua theoremata Elementorum Mechanicorum; GUIL. OUGHTRED *Institutiones Mechanicæ* (§. 27, cap. 1); PAULI CASATI *Mechanicorum* libri octo *Lugduni Gallicorum* An. 1684, in 4. (4 Alph. 7 plag.) & AND. JUNGENICKELS, ex vitriario primum militis gregarii, deinde Suggestuum tormentorum Præfecti *Clavis Machinarum*, Germanice conscripta & *Norimbergæ* An. 1661, in 4. (2 Alph. 3 plag.) edita. Hos inter STEVINUS atque CASATUS multa ad praxin profutura asserunt: ROHAULTIUS atque LAMY ob perspicuitatem tyronibus commendandi: JUNGENICKELIUS iis satisfacit, qui in Geometria non multum versati fundamenta mechanica populari modo cognoscere cupiunt.

§. 3. Theo-

§. 3. Theoriam potentiarum mechanicarum, quæ dicuntur, seu machinarum simplicium nemo prolixius demonstravit, ac singula huc spectantia uberius exposuit, quam VARIGNONIUS in opere posthumo, quod duobus Tomis *Parisiis* An. 1725, in 4. reg. (Alph. 4, plag. 21, Tabb. 64) sub titulo: *Nouvelle Mécanique & Statique* prodiit, ubi ex motu composito demonstrationes deducit. Ad eorum palatum est, qui theoriis profundis delectantur. Ideam hujus operis jam publicaverat An. 1687, *Parisiis* in 4. sub titulo: *Projet d'une nouvelle Mécanique*, in quo nonnisi principia continentur peritis valde probata. Adjiciuntur duo Tractatus, quorum primo examinatur Machina ab affricu libera, cujus mentionem facit PERRAULT in Commentario ad VITRUVIUM; secundo autem opinio BORELLI de ponderibus ex chorda suspensis.

§. 4. Ulterius primus omnium progressus GALILÆUS GALILÆI in *Discursibus & demonstrationibus mathematicis circa duas novas scientias, pertinentes ad Mechanicam & motum localem*, una cum *Dialogis ejus de systemate mundi*, *Lugduni Bat.* 1699, in 4. editis. (Dialogi de motu constant 1 Alph. 14 plag.). In iis enim resistantiam solidorum considerare aggressus est, quamvis parum feliciter, usus nimirum principiis parum genuinis, & de motu cum generalia tradidit, tum in specie motum gravium

tam libere, quam super plano inclinato descendendum vel ascendendum, atque motum projectorum & pendulorum felicissime evoluit.

§. 5. Inventa GALILÆI expolivit discipulus ejus EVANGELISTA TORRICELLIUS in libris duobus *de motu gravium naturaliter descendendum & projectorum*, qui inter opera ejus Geometrica habentur (§. 12, Cap. 3); immutavit JOH. BAPTISTA BALIANUS in Tractatu *de motu naturali gravium* (*Genue* 1646, in 4.), sed parum feliciter; & doctrinam de motu pendulorum ulterius promovit CHRISTIANUS HUGENIUS in insigni Tractatu *de Horologio oscillatorio*, *Parisi.* An. 1673, in fol. (2 Alph.), cujus etiam parte tertia de linearum curvarum evolutione & dimensione Geometria sublimior novis inventis illustratur. Illustris LEIBNITIUS de resistantia solidorum certiora dedit in *Actis Eruditorum* An. 1684, pag. 319, & eandem doctrinam celeberrimus VARIGNONIUS more suo maxime universalem reddidit Commentariis *Academix Regiæ scientiarum* An. 1702, pag. 87.

§. 6. JOH. ALPHONSUS BORELLUS in Tractatu *De vi percussio- nis* regulas motuum explicare aggressus est. Prodiit primum *Bononiæ* An. 1666, in 4. & cum Tractatu altero *De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*, *Lugd. Batav.* An. 1686, in 4. (3 Alph. 18 plag. 21 Tabb. æn.). Idem in Opere eximio *De motu ani-*

malium, *Lugd. Batav.* 1685, in 4. (3 Alph. 18 plag. 18 Tabb. æn.) regulas Staticorum ad motus animalium varios explicandos applicavit.

§. 7. Primi regulas motuum veras dedere eodem tempore WALLISIUS, HUGENIUS & CHRISTOPHORUS WREN: ille quidem de Corporibus non elasticis, hi vero de Corporibus elasticis. Extant regulæ *Wallisiane* in *Transactionibus Anglicanis* n. 43, p. 864, *Wrenniane* n. 43. p. 867, & *Hugeniane* n. 46, pag. 927, Conf. *the Philosophical Transactions abrig'd* by JOHN LOWTHORP Vol. I. cap. 5, p. 545, & seqq.

§. 8. HUGENIUS postea Tractatum peculiarem *De motu corporum ex percussione* conscripsit, qui inter posthuma opera habetur, & in quo inventa sua clarius explicat: WALLISIUS vero absolutissimum *de Mechanica seu motu* opus perfecit, *Oxonii* An. 1669, in 4. primum editum, deinde Tomo primo Operum insertum, in quo non solum inventa veterum & *Galileana*, *Wrenniana*, *Hugeniana* atque propria, ope analyseos plerumque demonstrantur, verum etiam in prolixa de centro gravitatis pertractatione multa ad Geometriam sublimiorem spectantia una evolvuntur. Utitur Arithmetica hinc inde infinitorum, sed ope calculi differentialis ac integralis talia feliciter eruuntur.

§. 9. Quoniam opus præclarum captum tyronum transcendit; operæ pretium fecit Cl. JOH. KEILL, Astro-

nomiæ Professor in Academia Oxoniensi, quod in *Introductione ad veram Physicam*, quæ An. 1705, *Oxonii* in 8. reg. (19½ plag.) auctior recusa, palmaria illius de motu dogmata ad captum tyronum ex elementis demonstraverit, more veterum Geometrarum.

§. 10. Cæl. PHILIPPUS DE LA HIRE in Tractatu de *Mechanica* (*Paris.* 1695, in reg. 12. plag. 18.) non modo ea demonstrat, quæ ad praxin mechanicam usui sunt; verum etiam motuum doctrinam attingit. Unde merito in hoc genere commendatur.

§. 11. Prostant etiam alia de motu corporum ex percussione Scripta particularia. Pertinet huc MARIOTTI Tractatus de percussione corporum (*du hoc des corps*,) qui *Parisiis* An. 1673, in 12. (plag. 18, Tab. 2) editus Autore suo dignus; & inter opera ejus legitur, quæ *Lugduni Batavorum* An. 1717, in 4. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 25) prodierunt. In eo ex experimentis pendulorum demonstrationes deducit; P. DE CHALES Tractatus Gallicus *De motu* (*Lugd. Gall.* An. 1682, in 8) & P. PARDIES *Discursus de motu locali* (*Hag. Comit.* An. 1692, in 12. tertia vice Gallice recusus) non magni momenti, nec veritati per omnia consentaneus. In primis vero hic nominanda sunt *Elementa Gallica Mechanice & Physicæ* a PARENTIO, *Paris.* An. 1700, in reg. 12, (plag. 22, Tabb. 12) edita, quamvis non satis perspicua.

§. 12. HU-

§. 12. HUGENIUS primum considerare cœpit in motu curvilineo, præsertim circulari, vim centrifugam, & de ea aliquot theoremata; sed suppressa demonstratione, Tractatui de Horologio oscillatorio (§. 4) subjunxit. Conscripsit deinde Tractatum *De vi centrifuga*, qui inter posthuma comparet, ubi theoremata ista demonstrantur. Sed antequam est in publicum prodiret, CL. KEILLIUS faciles ac elegantes eorundem theorematum demonstrationes dedit sub finem Introductionis ad veram Physicam modo laudatæ (§. 9). Easdem regulas per calculum differentialem in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum An. 1700, p. 19. eruit HOSPITALIUS & nos. nostro more in Elementis Mechanicæ demonstravimus.

§. 13. De motu, præsertim curvilineo, inventa prorsus præclara & admiranda dedit Geometra summus ISAACUS NEWTONUS in excellenti *Principiorum Mathematicorum Philosophiæ Naturalis* Opere (Londini An. 1687, in 4. reg. 2 Alph. 18 plag.) quod hinc inde emendatum & auctum Cantabrigiæ 1713, in 4. reg. (2 Alph. 19 plag.) & mox Amstelodami An. 1714, eadem forma recusum cum præfatione ROGERI COTES, Astronomiæ & Philosophiæ experimentalis Professoris Plumiani in Academia Cantabrigiensi, qui operam dedit, ut opus præstantissimum nitide imprimeretur. Tandem An. 1726,

Londini in 4. reg. (Alph. 2 plag. 3) prodit editio tertia aucta & emendata, ceteris omnibus præferenda. Docetur in hoc opere applicatio Geometriæ ad Naturæ explicationem & Scientia mechanica mirifice fuit promota.

§. 14. Excitavit illud attentionem Geometrarum primi ordinis, eosque incitavit, ut varia ad majorem universalitatem perducerent & ulterius provcherent: quos inter inprimis nominandus mihi est celeberrimus VARRIGNONIUS, cujus præclara in hoc genere meditata in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum passim leguntur.

§. 15. Cæterum cum ad lectionem operis *Newtoniani* non admittantur, nisi in Theoria mathematica multum diuque versati, cum in ea majorem perspicuitatem desideraverit ipse HUGENIUS; GUILIELMUS WHISTON, Matheseos tum Professor in Academia Cantabrigiensi, in *Prælectionibus Physico-Mathematicis* Philosophiam Newtoni mathematicam explicatius tradidit & facilius, quamvis subinde laxius, demonstravit (Cantabrigiæ An. 1710, in 8. 1 Alph.). Forsan huc etiam tendit liber alius ab HENRICO DITTON Londini An. 1706, sub titulo *the general Laws of nature and motion with their application to Mechanicks, also the doctrine of centripetal forces and velocities of bodies, describing any of the Conick Sections*. editus, quem nobis non vi-

sum

sum nomen Auctoris ex aliis speciminibus nobis noti commendat.

§. 16. Inprimis etiam loco introductionis in opus *Newtonianum* commendanda est explicatio quarundam sectionum ejusdem, quam dedit JOHANNES CLARKE & sub titulo: *A Demonstration of some of the principal sections, of Sir Isaac Newton's principles of natural Philosophy, in which his peculiar method of treating that useful subject is explained and applied to some of the chief phenomena of the system of the World, Lond. 1730, in 8. reg. (plag. 22, Tabb. 17) edidit, & omnium maxime DOMCKII Philosophia mathematica Newtoniana illustrata, quam Latino sermone conscriptam Londini An. 1731, in 8. (Alph. 1, plag. 3, Tabb. 16) publici juris fecit auctor. Enimvero cum opus *Newtonianum* merito tantopere celebratum a tyronum non modo, sed etiam provectionum captu valde removeatur, utilissimam operam sumeret, qui continuo Commentario idem illustraret, qualem in Geometriam CARTESEII edidit RABUEL (§. 7, c. 4). * Praestaret enim, ut principiis Geometriæ, Analyseos & Mechanicæ instructus statim ad lectionem ejus accederet, cum dulcius ex fonte bibantur aquæ, quam demum per ambages non sine multo temporis dispendio ad eandem perduceretur, aut prorsus ab eadem avocaretur.*

* Id fecerunt PP. LE SEUR & JACQUIER ex ordine Minimorum. Prodiit hujus Commentarii Volumina duo, *Genevæ in 4. primum An.*

§. 17. Multa egregia de motu & resistantia cum solidorum, tum fluidorum a celeberrimis avi hujus Geometris detecta in Actis Eruditorum & Commentariis Academiae Regiae Scientiarum, nec non in Transactionibus Anglicanis, passim extant; & præclarum de motu solidorum & fluidorum opus Geometræ insignis JACOBI HERMANNI, Mathematicum Professoris primum Patavii, deinceps Francofurti ad Oderam, posthac Petropoli Mathematicum, tandem in Academia patria Basileensi Philosophiæ moralis celeberrimi, *Amstel. 1716, in 4. (Alph. 2, plag. 15, Tabb. 12) sub Phoronomia nomine editum plurima inventa nova eaque egregia continet. More veterum doctrinam hanc demonstrare voluit, quorum tamen methodum non satis familiarem expertus, nec intimius perspectam possedit, ut adeo & sibi, & aliis magis consuluisset, siquidem analytica methodo, in qua erat versatissimus, usus fuisset.*

§. 18. Ne igitur desideraretur opus Mechanicæ, in quo Motus scientia profundius explicaretur, & lectores ad solvenda proprio Marte problemata præpararentur, LEONHARDUS EULERUS, Academiae Imperialis Scientiarum, quæ Petropoli floret, Membrum & Matheseos sublimioris Professor, *Mechanicam sive Motus scientiam analytice expositam* con-

1739 (Alph. 3, plag. 5) secundum An. 1740 (Alph. 2, plag. 7) Tertium mox proditurum expectatur.

conscriptis & duobus Tomis, *Petro-
poli* in 4. reg. (Tom. I, Alph. 2,
plag. 17, Tabb. 14, & Tom. II, Alph.
2, plag. 18, Tabb. 18) in lucem pu-
blicam emisit, plura suo tempore ad-
diturus. Reperies in hoc opere multa
nova, quæ alibi frustra quæsiseris,
& ad ejus lectionem cum fructu ab-
solvendam admittitur, qui in Analyfi
finitorum & infinitorum satis fuerit
exercitatus.

§. 19. Quibus machinarum con-
structio curæ cordique est, in eorum
gratiam Tractatum de Viribus motri-
cibus (*Traité des Forces mouvantes*)
Parisii An. 1722, in 8. reg. (Alph.
1½, Tabb. 8) edidit DE CAMUS.
Explicantur enim principia & ad
machinas applicantur, quorum in
praxi mechanica cognitio præsuppo-
nitur.

§. 20. Machinarum descriptiones
dederunt JACOBUS DE STRADA,
*Ferdinandi, Maximiliani & Rudol-
phi* II, Imperatorum Antiquarius,
An. 1618, a nepote OCTAVIO DE
STRADA in publicum emissas, &
An. 1629, recusas; ZEISINGIUS
in *Theatro Machinarum*, *Lipsiæ* An.
1612, in 4. edito, JACOBUS BESSON
in *Theatro instrumentorum & ma-
chinarum* An. 1582, in lucem emissio
in fol. (plag. 32), cum FRANCISCI
BEROALDI Figurarum declaratione
demonstrativa & JOLII PASCHALIS
additionibus: AUGUSTINUS DE RA-
MELLIS DE MASANZANA in opere,
quod ex Gallico in sermonem Ger-
Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

manicum translatum *Lipsiæ* An. 1620,
in fol. (7 Alph. 18 plag.) sub titulo:
Schatz-Kammer Mechanischer Künste
prodiit, & GEORGIUS ANDREAS
BÖCKLER, in *Theatro Machinarum*
novo (*Norimb.* 1673, in fol. plag. 11,
Tabb. æn. 154).

§. 21. Quoniam descriptiones
machinarum, quas Autores isti tra-
dunt, omnes sunt nimis breves, &
inprimis dimensionum rationes non
exprimunt, ita ut adæquata machi-
narum idea inde hauriri nequeat;
Mechanicus ingeniosus atque indus-
trius JACOBUS LEUPOLDUS no-
vum promisit Theatrum machinarum
& instrumentorum in Actis Erudito-
rum An. 1712, p. 366, cui ut sta-
ret, ipsimet eum hortati sumus.
Stetit tandem, quantum per fata li-
cuit, & *Lipsiæ* An. 1724, in publi-
cam lucem protulit *Theatrum machi-
narum generale, Schau-Platz des Grun-
des mechanischer Wissenschaften* in fol.
(Alph. 2, plag. 20, Tab. 71), in quo
potentias mechanicas & virium mo-
triciū ad machinas applicationem
declarat. Eodem adhuc anno com-
paruerunt *Theatrum machinarum hy-
drotechnicarum, Schau-Platz der Wasser-
Bau-Kunst*, in quo ea traduntur, quæ
ad Architecturam aquarum faciunt
(Alph. 2, plag. 5, Tabb. 51) & pars
prior *Theatri machinarum hydraulica-
rum, Schau-Platz der Wasser-Künste*,
in quo representantur machinæ ad
aquas elevandas excogitate (Alph. 2,
Tabb. 52). Pars posterior sublecuta

anno sequente (Alph. 2, plag. 1, Tabb. 54). Eodem adhuc anno 1725, comparuit *Theatrum Machinarum*, quod vocat Autor, *Schau-Platz der Hebezeuge* (Alph. 2, Tab. 96), in quo reperies machinas ponderibus elevandis aptas hisque agnatas, & *Theatrum staticum universale*, *Schau-Platz der Wage- und Gewicht-Kunst*, (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 57), quod exhibet varias librarum & staterarum structuras, una cum instrumentis hydrostaticis, meteorologicis & ad libellationem necessariis, & quæ ad pondera spectant, explicat. An. 1726, *Theatrum Pontificale*, quod vocat autor, *Schau-Platz der Brücken und des Brücken-Baues* (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 57), quæ eam Architecturæ partem illustrat, quæ de pontibus struendis agit. Tandem An. 1727, *Theatrum Arithmetico-Geometricum*, *Schau-Platz der Rechen- und Mess-Kunst* (2 Alph. 8½ plag. Tabb. 43) successit, in quo instrumenta Arithmetica & Geometrica describuntur. Nisi mors Autoris finem imposuisset, dare adhuc constituerat Theatra 1. fontium hydraullicorum, 2. molarum, 3. ad mechanicam ignis spectantium, 4. machinarum in metalli fodinis usatarum, 5. machinarum & instrumentorum, quæ in Architectura civili & militari usui sunt, 6. quæ in re Oeconomica & 7. venatoria usum habent, 8. machinarum & instrumentorum aërometricorum, 9. machinarum & in-

strumentorum optidorum, 10. machinarum & instrumentorum in Gnomonica & arte horologiopæa usatarum, 11. instrumentorum astronomicorum, 12. acusticorum & musicorum aliorumque agnatorum, 13. anatomicorum & chirurgicorum, & tandem omnium machinarum & instrumentorum apud artifices & opifices obviarum.

§. 2.2. Dolendum inprimis erat, quod molarum usatarum genera cum Architecturæ parte, quæ iisdem excitandis destinatur, non describere potuerit Autor. Hunc igitur defectum supplere conatus est JOHANNES MATTHIAS BEYER, qui per modum Tomi noni Theatri machinarum LEUPOLDI An. 1735, *Lipfia* in fol. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 43) edidit, in quo non modo usitata molarum genera, verum etiam ea, quæ ad extructionem earundem necessaria scitu, describuntur. Accessit Tomus secundus, in quo jura molidinorum operose congeruntur (Alph. 2, plag. 12) in usum Jurisperitorum.

§. 2.3. Molas Batavorum peculiari libro exhibuit PETRUS LIMPERGH sermone patrio, cujus *Moole-Boek*, *Amstelodami* An. 1690, in fol. reg. (plag. 2, Tabb. 32) prodiit. Accuratior illarum delineationes ac descriptiones dedit JOHANNES VAN ZYL in Theatro Machinarum universali, *of groot algemen Moolen-Boek*, cujus

cujus Tomus I, *Amstelodami* An. 1734, in fol. reg. prodiit (plag. 6, Tab. 56.), etenim singulae partes, qualescunque tandem fuerint, quam accuratissime secundum suas dimensiones representantur, ut integrae structurae adequatam ideam inde haurire liceat. Textus in Germanicam linguam translatus fuit, ut operis hujus etiam in Germania esset usus.

§. 24. Accuratas quarundam machinarum recentius inventarum descriptiones dedit PERRAULT in opusculo Gallico, quod sub titulo: *Recueil de plusieurs Machines de nouvelle invention*, Parisiis An. 1700, in 4. (plag. 7, Tab. 11) prodiit, & HUGENIUS cum in Tractatu *De horologio oscillatorio* horologium a se inventum, tum in *Operibus posthumis* automatam suum planetarium accurate describit.

§. 25. In Gallia machinas ab Academia Scientiarum approbatas, a prima foundatione usque ad nostra tempora, una cum illarum descriptionibus, delineatas consensu Academiae sub titulo: *Machines & Inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, Parisiis sex Tomis publici juris fecit GALLONUS An. 1735, in 4. reg. (Alph. 6, plag. 20, Tab. 422). Non modo machinae scenographice representantur, verum etiam ichnographice, cum orthographiis & singularum partium delineationibus

adjiciuntur, ubi opus fuerit. Descriptiones sunt satis accuratae; ut nihil in iis desiderari possit. Subinde etiam vires ad agitandam machinam requisitae ad calculum revocantur, aliaeque cognitu necessaria annotantur. Opus hoc Mechanicae practicae cultoribus plurimum commendandum.

§. 26. Structuram horologiorum exponit Anglus Anonymus * in Tractatu Anglico, qui auctior *Londini* An. 1700, in 12. reg. sub titulo: *The artificial Clockmaker* (7½ plag. Tab. 2) prodiit & An. 1707, in Germanicum idioma translatus, novae editioni Gnomonicae *Welperianae* subjungitur: quod argumentum etiam attingit OUGHTREDUS in posthumis pag. 68, & seqq. Idiomate autem Germanico de horologiorum structura commentatus est JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, in mechanicis & praxi optica versatissimus. Prodiit ejus Tractatus sub titulo: *Vollständige Nachricht von den Uhren*, *Hale* 1718, in 8. (plag. 9, Tab. 7). Addidit An. 1722, Continuationem, in qua supplentur, quae desiderari poterant de horologio examinatorio & repetitorio (plag. 12, Tab. 22).

§. 27. Autoribus tamen istis palam praeripit D. JACOBUS ALEXANDER, Monachus Benedictinus Congregationis S. Mauri, in Tractatu generali de Horologiis, qui sub titulo: *Traité général des Horloges*,

I 2

Pari-

* GULIELMUS DERRAM Canon. Windfor, non uno nomine commendandus.

Parisiis in 8. maj. 1734, prodiit (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 26), quem ob utilitatem suam, me suaflore, in Germanicam linguam transtulit CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGERUS, Medicinæ Doctor, & *Lemgovii* An. 1738, in 8. (Alph. 1, plag. 5, Tabb. 25) edidit sub titulo: *Des P. Dom JACOB ALEXANDERS ausführliche Abhandlung von den Uhren*. Agit etiam de horologiis solaribus majoribus construendis. Ceterum hoc opus omnibus commendandum, qui horologiorum constructionem accurate cognoscere desiderant. Singularia vero de constructione horologiorum tradit in libro Gallico HENRICUS SÜLEY, qui secunda vice auctior recusus *Parisiis* An. 1737, in 12. (plag. 20, Tabb. 5) cum multis accessionibus. Maximopere commendandus iis est, qui perfectionem horologiorum curæ cordique habent, atque adeo in Germanicam linguam verti meretur, ut Tractatui ALEXANDRI jungi possset.

§. 28. Silentio denique hic præ-

tercunda non erant CASPARI SCHOTTI, e Societate Jesu, *Technica curiosa*, libris 12, comprehensa, quæ *Nürnbergæ* An. 1664, in 4. (Alph. 6, Tabb. 20) prodierunt. Etenim in iis, præter varia experimenta aliaque technasmatata, continentur etiam mechanica, chronometrica & automatica, consequenter plurima ad Mechanicam practicam spectantia. Edidit idem *Magiam universalem Naturæ & Artis* in tres partes distributam *Bambergæ* 1677, in 4. (Alph. 14, plag. 2, Tabb. 90): pars enim tertia multa continet, quæ ad Mechanicam & Staticam spectant, nimirum quæ sub nominibus Magiæ centrobarycæ, mechanicæ, thaumaturgæ libris tribus prioribus continentur.

§. 29. Idem SCHOTTUS in *Technica curiosa* lib. 9, sub titulo *mirabilium chronometricorum* multa artis horologiopææ utilia tradit, præter alia mechanica. Inprimis etiam de mobili perpetuo varios conatus describit.

C A P U T VII

De Hydrostatica, Aerometria, & Hydraulica.

§. 1. **H**YDROSTATICAM primus docuit ARCHIMEDES in libris *De insidentibus humido*, cujus dogmata ad experimenta applicavit

MARINUS GHETALDUS in ARCHIMEDE *promoto*: unde sua excerptit OUGHTREDUS (§. 19, cap. 1).

§. 2. MARIOTTUS in Tractatu Gallico de motu aquarum & aliorum corporum fluidorum, qui primum sub titulo: *Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides*, prodiit Parisiis An. 1686, in 12. reg. (plag. 17½) & in editione Batava operum ipsius legitur, propositionum hydrostaticarum & hydraulicarum magnam partem & rationibus confirmavit, & experimentis comprobavit. Propter insignem utilitatem D. JOHANNES CHRISTOPHORUS MEINIG cum in Germanicam linguam transtulit & notis quibusdam illustratum Lipsiæ An. 1723, in 8. (Alph. 1, plag. 5½) edidit.

§. 3. Nec contemnenda habet ROBERTUS BOYLE, cum in *Paradoxis Hydrostaticis* (Genevæ An. 1680, in 4. plag. 15, Tabb. 3), tum in *Medicina Hydrostatica* (Genevæ An. 1693, in 4. plag. 10½): quod utrumque scriptum in usum præsertim physicum legi meretur, intelligendum etiam ab iis, qui Mathematicum sunt imperiti.

§. 4. FRANCISCUS TERTIUS DE LANIS, e Societate Jesu, Tomo tertio *Magisterii Naturæ & Artis*, Parma An. 1692, in fol. (6 Alph. 14 plag. Tabb. 13) lib. 25, f. 49, & seqq. dogmata hydrostatica uberius exposuit, quam alibi leguntur. Tomo autem primo & inprimis secundo passim Machinas Hydraulicas descripsit: quemadmodum etiam in primo Mechanicam multum illustra-

vit. Tom. I, *Brixia* An. 1684, in fol. 6 Alph. Tab. 24. Tom. II, *Brixia* 1686, 6 Alph. 5 plag. Tabb. 20).

§. 5. BERNHARDUS LAMY parte secunda Mechanicæ (§. 2, cap. 6), quæ inscribitur *Traité de l'équilibre des liqueurs*, propositiones aliquot Hydrostaticæ ac Hydraulicæ fundamentales explicavit: quod etiam fecere ROHALTIUS (§. cit.) & WALLISIUS in *Mechanicis* (§. 8, e. cit.). Commendanda quoque tyronibus *Hydrostatica* P. DECHALES, quæ in Mundo ipsius Mathematico Tom. III, legitur. (§. 4, cap. 1).

§. 6. Sublimiora dedit Geometra summus ISAACUS NEWTONUS in *Principiis Philosophiæ Naturalis Mathematicis* Sect. 5, lib. 2, pag. 282, & seqq.

§. 7. De Aërometria scriptum aliud non extat, nisi quod sub titulo: *Elementa Aërometriæ*, Lipsiæ An. 1709, in 12. (16 plag. Tabb. 12) edidi in usum potissimum tyronum, ut Mathesin ad experimenta applicare discant. Sed ea deinceps hinc Elementis Matheseos universæ inferui. Passim tamen huc spectantia leguntur apud GUERICKIUM, Consullem Magdeburgicum, antiæ pneumaticæ inventorem, in *Experimentis novis Magdeburgicis de vacuo spatio*, Amstelodami An. 1672, in fol. (Alph. 2, plag. 20, Tabb. 18) editis & qui post eum aëris proprietates experimentis comprobavit.

§. 8. Ceterum hic etiam locum meretur

meretur libellus Gallicus, qui sub titulo: *Traitez des Barometres, Thermometres & Hygrometres* prostat & barometrorum, thermometrorum atque hygrometrorum constructionem ac usum edocet (*Amstel.* 1707, in 12. plag. 7, Tabb. 35). Inprimis autem hinc inde in Commentariis Academiae Regiae scientiarum inferuntur, quibus Aërometria locupletari ac ad maiorem perfectionem adduci potest.

§. 9. Ad hydraulicam perficiendam tendit JOHANNIS CEVÆ, Mediolanensis, *Geometria motus* (*Bononia* 1692, in 4. plag. 12, Tabb. 9), in qua de motu tam simplici, quam composito traduntur, quæ ad motum aquarum explicandum utilia sunt.

§. 10. JOHANNES BAPTISTA BALIANUS lib. 3, 4 & 5, de *motu naturali gravium, solidorum & liquidorum* (§. 5, cap. 6) de motu liquidorum, canalium sectionibus, & de foraminibus vasis, ad praxin hydraulicæ utilia profert: quorum etiam spectant Tractatus aliquot PICCARDI, ROEMERI & MARIOTTI supra recensiti (§. 31, cap. 1).

§. 11. DOMINICUS GULIELMINI in *Mensura Aquarum fluentium* (*Bononia* An. 1690, & 1691, in 4. plag. 19, Tabb. 8) theorias hydraulicas sublimiores ad praxin revocare studet. Nemo autem in theoria hydraulica sublimiora dedit quam Geometræ celeberrimi, NEWTONUS in Opere modo laudato (§. 6) lib. 2. sect. 7.

p. 318, & seqq. atque VARIGNONIUS in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum An. 1699, & 1703. Multa nova & egregia de hoc argumento dedit Geometra insignis HERMANNUS in *Phoronomia* (§. 17, cap. 6).

§. 12. Quemadmodum vero EULERUS theoriā mechanicā perficere studuit (§. 18, cap. 6), in quam stricturas Londini edidit ROBINSON NOURSE* sub titulo: *Remarks on Mr. Eulers Treatise of motion*, nobis nondum visas; ita DANIEL BERNOULLI, Medicinæ Professor Basileensis, antea Matheseos sublimioris in Academia scientiarum imperiali Petropolitana, nunc Professor honorarius, similem operam impendit theoriæ Hydrostaticæ & Hydraulicæ, quam sub titulo: *Hydrodynamicae sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii*, Argentorati An. 1738, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 16, Tabb. 12) publici juris fecit, cum hoc opus jam octo annis ante congestisset, dum Petropoli ageret.

§. 13. Ceterum ad Hydraulicam quoque facit SEXTI JULII FRONTINI de *Aqua ductibus urbis Romæ Commentarius*, quem uberrimis notis explicatum Patavii Anno 1722, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 15) in lucem emisit JOANNES POLENUS, Professor Patavinus, cui etiam debentur de *Motu aquæ mixto* libri duo, quibus multa nova pertinentia ad æstua-

* Aut potius BENJAMIN ROBINS; Nourse nomen est Bibliopolæ.

æstuariorum, ad portus atque ad flumina continentur, *Patavii* An. 1697, in 4. reg. (plag. 18, Tabb. 3) & liber de *Castellis*, per quæ derivantur fluviorum aquæ, habentibus latera convergentia, qui etiam continet nova experimenta ad aquas fluentes & ad percussionis vires pertinentia, & *Patavii* An. 1718, in 4. (plag. 9, Tab. I) prodit. Idem etiam An. 1723, edidit *Epistolam* ad JOANNEM JACOBUM MARINONIUM, Mathematicum Cæsareum, in qua præter defectum Solis anno isto Patavii observatum, agitur de aliquibus experimentis pertinentibus ad aquas fluentes, & cui subijcitur JOANNIS BUTEONIS *libellus de fluentis aquæ mensura* cum annotationibus nonnullis, *Patavii* in 4. (plag. 3½, Tabb. 1).

§. 14. Neque silentio hic prætereunda sunt MARINI MERSENNI *Phænomena Hydraulica pneumática*, quæ inter *Cogitata ipsius Physico-Mathematica* leguntur, in quibus tam naturæ, quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur, *Parisiis* An. 1654, in 4. (Alph. 8; plag. 19). In hac nimirum collectione, quæ inter opera mathematica, superius commemorari merebatur, reperiuntur 1. Tractatus de mensuris, ponderibus, atque nummis tam Hebræicis, quam Græcis & Romanis, ad Parisiensia expensis, 2. Tractatus, cui titulus: *Hydraulica pneumática*, Arsque navigandi, Harmonia theoricæ, practicæ, & Mechanica

phænomena, 3. Tractatus mechanicus theoricus & practicus, 4. Balistica & Acontismologia, in qua sagittarum, jaculorum & aliorum missilium jactus & robur arcuum explicantur, 5. Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis & bini refractionum demonstratarum Tractatus, 6. ARISTARCHI SAMII Tractatus de mundi Systemate & Reflexiones Physico-Mathematicæ, quibus varia adjiciuntur ad præcedentia. In Synopsi tantummodo sine demonstratione recensentur Propositiones EUCLIDIS, PETRI RAMI, ARCHIMEDIS, THEODOSII, MENELAI, MAUROLYCI, APOLLONII, MYDORGII, *geometricæ*; PAPPI, GUIDONIS UBALDI & STEVINI *mechanicæ*.

§. 15. De motu fluminum scripsit DECHALES in Tractatu *De fontibus naturalibus* prop. 39, & seqq. Tomi III, *Mundi Mathematici* f. 137, & seqq. sed paucis plura & abstrusiora hisce complexus est HERMANUS in *Phoronomia* cap. 10, pag. 226, & seqq. Ex instituto de hoc argumento scripsit DOMINICUS GULIELMINI, cujus *della Natura de' Fiumi Trattato Fisico-Matematico* prodit *Bononiæ* An. 1697, in 4. (Alph. 2, plag. 3, Tabb. 15). Multa in Italia prodire scripta Italico sermone, in quibus plura ad hoc argumentum spectantia leguntur, occasione controversiæ de Rheno fluvio in Padum deducendo.

§. 16. Inter

§. 16. Inter Veteres, machinas hydraulicas descripsit HERON *Alexandrinus* in libro *spiritualium* a COMMANDINO in Latinam linguam translato (*Parisiis* An. 1583, in 4.) Ex recentioribus similem operam collocarunt SALOMON DE CAUX, Architectus militaris Electoris Palatini, in libro Gallico *De Machinis, præcipue hydraulicis*, qui An. 1615, prodiiit: CASPARUS SCHOTTUS in *Mechanica Hydraulico-pneumatica*, *Herbipoli* 1657, in 4. (Alph. 2, plag. 22, Tabb. 36) edita, DECHALES in *Mundo Mathematico* Tom. III, (§. 4, cap. 1), GEORGIUS ANDREAS BÖCKLER in *Architectura Curiosa Germanica* (*Norimbergæ* An. 1704, in fol. plag. 21, Tabb. 200), qui ultra 70 fontium salientium & ultra 120 fontium artificialium formas describit; & LUCAS ANTONIUS PORTIUS in nonnullis *de fontibus naturalibus*, quæ nonnullis *de motu corporum* subjuncta, possibilitatem inprimis quorundam fontium adstruens, qui a PLINIO commemorantur. (*Neapoli* An. 1704, in 4. plag. 7, Tabb. 5).

§. 17. Denique quæ de Hydrostatica & Hydraulica per plurimos libros & volumina dispersa leguntur, qua theoriam & praxin, uno complexus est & sub titulo: *An intro-*

duction to a general system of Hydrostatics and Hydraulicks, *Londini* An. 1729, in 4. charta aug. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. æn. 60) edidit STEPHANUS SWITZER. Extant etiam in hoc libro descriptiones machinarum, quibus aqua elevatur.

§. 18. Inprimis autem iis, qui praxin solidam Hydraulicæ curæ cordique habent, commendari meretur *Architectura hydraulica*, quam Gallico idiomate conscriptam *Parisiis* Anno 1737, in 4. reg. cum 44 Tabulis æneis splendidissimis edidit DE BELIDOR. * In hoc opere etiam accurata traditur molarum descriptio & quæ ad molas aqua agitandas requiruntur ibidem explanantur. Opus utilissimum in linguam Germanicam verti mereretur.

§. 19. Ad Hydraulicam quidam referunt *Libellationem* aquarum, de qua nos egimus in *Mechanicæ Elementis*. Egregium de ea Tractatum conscripsit PICARDUS, quem PHILIPPUS DE LA HIRE post mortem ipsius *Parisiis* An. 1684, in 12. (plag. 15, Tabb. 3) edidit, unde sua desumserunt, qui de hoc argumento apud Nostros scripsere, veluti LEUPOLDUS atque STURMIUS filius. Inter opera MARIOTTI extat quoque *De libellatione* Tractatus brevis.

* Habet quidem Tom. I, 2 Alph. 9 plag. Tabb. 44. Prodiit autem Tom. II. Anno 1739, & complectitur 2 Alph. 12 plag. Tabb. 55.

C A P U T VIII.

De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perspectiva.

§. 1. **O**ptica & Catoptrica Elementa olim conscripsit EUCLIDES, quæ a JOHANNÉ PENA, Mathematico Regio, Latine versa Parisiis An. 1604, prodire. Extant etiam in *Cursu Mathematico* HERIGONII (§. 1. cap. 1) & in editione *Gregoriana* operum EUCLIDIS (§. 2, cap. 3).

§. 2. Circa annum Christi 1100, ALHAZEN Arabs ingens *de Optica* volumen composuit, quod in libros, capita & propositiones distinxit FRIDERICUS RISNERUS. Usus est scriptis veterum, præsertim PTOLEMÆI *de Optica* libris decem, qui hodie desiderantur.

§. 3. Cum demonstrationes ALHAZENI sint admodum intricatæ ac prolixæ; VITELLIO Polonus circa An. 1270, aliud *de Optica* volumen conscripsit in libros X digestum. Pleraque ex ALHAZENO desumfit, sed demonstrationum fundamenta ex APOLLONIO, THEODOSIO, MENELAO, THEONE, PAPPO & PROCLUSO petiit. Ad hunc Autorem *Paralipomena* edidit JOHANNES KEPLERUS, quibus Astronomiæ pars optica traditur. (*Frankfurti* An. 1604, in 4. 2 Alph. 15 plag.). Habentur tamen multa quoque alia in *Wolffii Oper. Mathem.* Tom. V.

hiscæ Paralipomenis, & inter alia modum visionis primus decente ratione explicat Autor. ALHAZENUM & VITELLIONEM uno volumine edidit FRIDERICUS RISNERUS *Basilæ* An. 1572, in fol. (Alph. 7, plag. 18). Titulus libri est: *Optica Thesaurus*. ALHAZENI *Arabis libri septem nunc primum editi*. Eiusdem *liber de crepusculis & Nubium ascensionibus*. Item VITELLIONIS *libri X. Omnes instaurati, figuris illustrati & aucti, adjectis etiam in ALHAZENUM commentariis a FEDERICO RISNERO*.

§. 4. Compendium Opticæ antiquæ circa annum 1279, conscripsit JOHANNES PECCAMUS, Archiepiscopus Cantuariensis & Primas Angliæ (*Coloniæ Agrippinæ* 1627, in 4. plag. 11), quæ etiam recentius dedit AMBROSIVS RHODIVS, Professor Mathematicum Wittebergenfis, cujus *Optica, Wittebergæ* 1611, cum *Tractatu de crepusculis* in 8. prodit (1 Alph. 10 plag.). Uberius eandem exposuit RISNERUS ante laudatus, cujus *Opticæ libri quatuor, Cassellis* An. 1606, in 4. prodire (Alph. 1, plag. 14).

§. 5. Opticam quoque illustrare aggressus est circa idem tempus ROGERIVS BACON, Philosophus suo tempo-

tempore summus, Anno 1284, Oxonii mortuus, & ob scientias Mathematicas magiæ accusatus. Ejus *Perspectivam* in lucem protraxit JOANNES COMBACHIUS, Philos. Professor marpurgenfis, (*Francof.* An. 1614, in 4. 1 Alph. 5 plag.): parum tamen mathematici ea continet, etsi lectu non indigna.

§. 6. Enimvero Veteres ea, quæ visionem directam & reflexam concernunt, potissimum explicant: quæ vero ad refractam spectant, nimis imperfecte tradunt. JOANNES BAPTISTA PORTA libris novem de *Refractione* conscriptis hanc doctrinam melius tradere conatus est (prodiere *Neapoli* An. 1593, in 4. 1 Alph. 6 plag.); sed parum adhuc profecit. Primus qui Dioptricam meliori habitu induit & lentium sphaerarum proprietates demonstravit accurate, fuit JOHANNES KEPLERUS, cujus *Dioptrica* prodiit *Augustæ Vindelicorum* An. 1611, in 4. (plag. 14) & posthac alibi recusa. Præmittuntur *Epistola* GALILÆI de iis, quæ post editionem *Nuncii sideris ope perspicilli nova & admiranda in cælo deprehensa sunt*, itemque *Examen præfationis* JOHANNIS PENÆ in *Opticam EUCLIDIS de usu Opticæ in Philosophia*.

§. 7. CARTESIUS in *Dioptrica*, quæ principiis Philosophiæ subjungi solet, veram refractionis legem a SNELLIIO inventam, sed suppresso inventoris nomine, affert & modum visionis distinctius, quam ab aliis

factum fuerat, explicat, lentium ellipticarum & hyperbolicarum proprietates recenset & praxin poliendi vitra ita docet, ut in ea non satis versatum judicent experti.

§. 8. Theoriam Dioptricæ magis excoluit, novis plerumque demonstrationibus inventis, WILHELMUS MOLYNEUX in *Dioptrica nova* Anglice conscripta (*Londini* An. 1692, in 4. plag. 16, Tabb. 40), ubi calculo trigonometrico ad eruendas lentium sphaerarum proprietates juxta veram refractionis legem utitur. Omnium maxime eandem hætenus perfecit HUGENIUS, cujus *Dioptrica* maximam posthumorum partem constituit. Eidem & praxis multum debet: de quo tractatus *De poliendis vitris* testatur, Dioptricæ subjunctus. Prodiere primum *Opera posthuma*, *Lugd. Batav.* An. 1703, in 4. (2 Alph. 19 plag. Tabb. 24), deinde cum aliis recusa (§. 35, cap. 1). Opus Hugenianum perfectissimum eorum, quæ in hoc genere prostant: requirit autem lectorem in Geometria probe versatum.

§. 9. Tyronibus adeo commendandum est *Dioptrica Tentamen* Gallicum NICOLAI HARTSOEKER (*Parisi* An. 1694, 1 Alph. 10 plag.), ubi multa quoque ad Physicam & praxin spectantia traduntur. Ipse enim in poliendis vitris & opticis technasmatibus erat versatissimus.

§. 10. In splendidi Operis dioptrici CHERUBINI, Capucini, Tomo

mo primo, qui sub titulo: *Dioptrique oculaire, Parisiis* An. 1671, in fol. (5 Alph. 11 plag. Tabb. 16) prodiiit, multa ad praxin spectantia reperiuntur. In altero Tomo, qui sub titulo: *La Vision parfaite, Parisiis* 1678, in fol. (3 Alph. 10 plag. Tabb. 23) lucem adspexit, argumentum palmarium est tubus binocular, cujus sub finem Tomi primi mentionem iniecerat.

§. 11. Opticam sine Catoptrica & Dioptrica tradit CHRISTOPHORUS SCHEINERUS, e Societate Jesu, in *Oculo (Oeniponti* An. 1619, in 4. I Alph. 10 plag.). Ab iis potissimum legendus, qui rationes phaenomenorum visionis directae cognoscere gestiunt.

§. 12. Vir summus NEWTONUS in egregio *Optices* opère novas luminis proprietates, ante nondum animadversas, & quarum consideratio (ceu ex HUGENII Dioptrica apparet) maximi in Dioptrica momenti, per experimenta edocet. Prodiit opus primum *Londini* An. 1704, in 4. reg. (2 Alph. 5 plag.) sub titulo: *Opticks, or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflections and colours of Light*. In fine adjiciuntur duo Tractatus Latini, primus scilicet *de enumeratione linearum tertii ordinis*, alter *de Quadratura curvarum*. Ipsum in Latinam linguam transtulit SAMUEL CLARKE, Autore approbante & nonnulla adjiciente (*Londini* An. 1706, in reg. 4. 2 Alph. 9 plag. Tabb. 19).

An. 1719, ibidem prodiiit versionis editio altera in 4. (Alph. 2, plag. 8, Tabb. 12), ubi quaestiones adjectae angentur, sed Tractatus geometrici omittuntur, quos in *Analysi* sua ediderat JONES (§. 21, cap. 4). Post mortem NEWTONI, *Londini* An. 1729, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 24) prodierunt *Lectiones ejus opticae* An. 1669, 1670 & 1671, in *Scholis publicis habitae*. In his equidem multa continentur quae in Optica leguntur, alia tamen prorsus ratione proponuntur. Reperiuntur hic, quae alibi frustra quaesiveris.

§. 13. Huc etiam referri potest MARIOTTI *Tentamen de Coloribus* (*Parisi* An. 1681, in reg. 12. Alph. 1, plag. 9, Tabb. 16) quod Tentamen Physicorum Gallice conscriptorum quantum est, & in editione Batava operum ipsius legitur, atque HUGENII Tractatus Gallicus *de Lumine* (*Lugd. Batav.* 1690, in 4. I Alph. 2 plag.), qui in Operum reliquorum volumine primo extat. Ejus hypothese in explicandis phaenomenis opticeis utitur PETRUS ANGO in *Optica Gallica* (*Parisi* An. 1682, in 12).

§. 14. ANDREAS TACQUET in *Optica* Perspectivae fundamenta jecit, & in *Catoptrica* speculorum planorum & sphaericorum proprietates bene demonstrat. (§. 28, cap. 1), sed Dioptricam non attingit. ISAACUS BARROWIUS in *Lectionibus Opticis*, quae *Lectionibus Geometricis*

cis præmittuntur (§. 19, cap. 3), theoriam Catoptricæ & Dioptricæ demonstrat. Nec dubitamus, quin JACOBUS GREGORIUS in *Optica promota* multa præclara dederit, etsi nobis non visa. An. 1663, in 4. lucem adspexit.

§. 15. Utriusque Compendium dedit DAVID GREGORIUS in *Elementis Dioptricæ & Catoptricæ sphericae* (Oxonii 1695, in reg. 8. plag. 7). Idem in linguam Anglicam vertit WILHELMUS BROWNE, M. D. & prolixum supplementum adjecit atque Introductionem præmisit. Prodiit secunda vice cum appendice J. T. DESAGULIERS, L. L. D. de telescopio reflectente cum epistolis, quas de eodem NEWTONUS & JACOBUS GREGORIUS ad se invicem scripsere, Londini An. 1735, in 8. reg. (plag. 20, Tab. 4). Prima telescopii catoptrico-dioptrici idea debetur GREGORIO, qui eam describit in *Optica promota* p. 94. Sed eam perfectissime istiusmodi telescopium construxit J. HADLEY, atque nunc construuntur ab EDUARDO SCARLET, Optico Regio, ejusque filio. Descripsimus idem in Elementis Dioptricæ nostris.

§. 16. Opticam, Catoptricam & Dioptricam una exposuit ZACHARIAS TRABERUS, e Societate Jesu, in *Nervo Optico* (Viennæ An. 1675, in fol. 2 Alph. 16 plag. Tab. 28). Multa in praxi jucunda habet, sed theoria exigui momenti. Quoad praxes

opticas opus absolutum censei potest JOHANNIS ZAHN *Oculus artificialis teledioptricus*. Editio altera auctior, sed vitiosior prodiit Norimbergæ An. 1702, in fol. (9 Alph. 8 plag.) cum figuris multis cum ligno, tum æri incis. Huc etiam spectat ATHANASII KIRCHERI *Ars magna lucis & umbræ* (Roma 1646, in fol. 10 Alph. 16 plag. Tab. 34).

§. 17. JOHANNES CHRISTOPHORUS KOLHANS in *Tractatu Optico* (Lips. An. 1663, in 8. 1 Alph. 15 plag.) non contemnenda prorsus dedit excerpta cum ad theoriam, tum ad praxin opticam spectantia, retentis ipsorummet Autorum verbis. Omnes tres Opticæ partes discursu vulgari recensuit in gratiam artificum JOHANNES MICHAEL CONRADI in *Optica Germanica*, quam sub titulo: *Der dreyfach geartete Sehe-Strahl*, Coburgi An. 1710, in 4. editit (plag. 17, Tab. 25).

§. 18. *De poliendis vitris Commentarios* reliquit HUGENIUS, qui inter posthuma leguntur (§. 35). Hac arte excelluit ipse: primus enim lentes objectivas tanta exactitudine paravit, ut iis pares nullibi reperirentur, quemadmodum in Astronomicis docuimus & Dioptriciis. In Germania An. 1716, in 8. (plag. 14, Tab. 20) Hale prodiit sub titulo: *CHRISTIAN GOTTLIEB HERTELS vollständige Anweisung zum Glaschleiffen, wie auch zu Verfertigung der optischen Maschinen*. Erat Autor Matheos Pro-

Professor in Academia illustri Lignicēsi & in arte polidendi vitra plurimum exercitatus. Eandem notis illustravit JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, qui & ipse hanc artem non sine successu excoluerat. Prodiit Wittebergæ An. 1719, in 8. (plag. 7, Tabb. 21) sub titulo: *Neue Anmerkungen vom Glaschleifen*.

§. 19. Scriptis opticis accenseri merentur ea, in quibus microscopica observationes recensentur. Pertinent huc I^o. ROBERTI HOOKE *Micrographia* Anglice scripta (Londini An. 1667, in fol. 3 Alph. 8 plag. Tabb. 38) II^o. Antonii van Leeuwenhoek scripta varia; nempe 1) *Arcana Natura detecta*, Delphis An. 1695, in 4. (Alph. 2, plag. 6, Tabb. 11) 2) *Continuatio Arcanorum Natura detectorum* Ibid. An. 1697, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tab. 7) 3) *Arcana Natura ope & beneficio exquisitissimorum microscopiorum detecta*, Lugd. Batav. An. 1696, in 4. Alph. 3, Tabb. 26) 4) *Continuatio epistolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinensem* Lugd. Batav. An. 1696, in 4. (plag. 16½, Tabb. 10) 5) *Epistola ad Societatem Regiam Anglicam & alios illustres viros*, Lugd. Bat. 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 33). 6) *Epistola physiologica super compluribus natura arcanis*, Delphis An. 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 31). Titulus generalis: ANTONII A LEEUWENHOEK *Opera omnia*, seu

Arcana natura ope exactissimorum microscopiorum detecta, experimentis variis comprobata, epistolis ad varios illustres viros, ut & ad integram, quæ Londini floret, sapientem Societatem datis comprehensa, impressus Lugduni Batavorum & scriptis istis diverso tempore nec eadem prorsus forma editis in unum fasciculum collectis præfixus. III^o. JOHANNIS FRANCISCI GRIENDELS VON AACH *Micrographia curiosa Germanica* (Norimbergæ An. 1687, in 4. plag. 9, Tabb. 35) IV^o. PHILIPPI BONANNI *Micrographia curiosa*, adjuncta observationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur (Romæ An. 1691, in 4. 2 Alph. 12 plag. Tabb. 68).

§. 20. Inter scriptores Perspectivæ omnium maxime commendatur DESARGUES, cujus methodum universalem exercendi Perspectivam gallice conscriptam edidit ABRAHAMUS BOSSE, ex Gallico in Belgicum sermonem transtulit J. BARA. Prodiit Amstelodami An. 1686, in 8. (plag. 12, & figurarum ari incisarum 1 Alph.).

§. 21. Nec parum Perspectivæ studiosum juvant ANDRÆ ALBERTI Libri duo *De Perspectiva*, (Norimb. An. 1670, in fol. plag. 19, Tabb. 15): primis vero tyronum conatibus respondet BERNHARDI LAMY *Perspectiva* Gallice conscripta (Paris An. 1701, in 8).

§. 22. Concinnas Praxium Perspecti-

spectivæ demonstrationes dedit JOH. FRANCISCUS NICERON ex Ordine Minimorum, in hac arte excellens, in *Thaumaturgo Optico*, cujus tantum pars prima *Parisiis* 1646, in fol. prodiit (2 Alph. 18 plag. Tabb. 42). Post mortem ejus immaturam Anno 1652, prodiit *Perspectiva curiosa* Gallice conscripta in 4. sub ejusdem nomine, in libros quatuor divisâ, in qua plura continentur, quam in Thaumaturgo.

§. 23. Ad praxin properantibus & theoriam spinosam averfantibus satisfacit Anonymus Gallus e Societate Jesu in *Perspectiva practica* Gallice *Parisiis* An. 1642, in 4. publicata & a JOHANNES CHRISTOPHORO REMBOLDO Germanice versa atque *Augustæ Vindelicorum* An. 1710, in 4. edita (1 Alph. 8 plag. cum 150 Tabulis æri incisis atque textui insertis). Enimvero An. 1663, prodiit editio altera duabus partibus & auctior, & quoad primam emendatior ac locupletior. (Tom. I, Alph. 2, plag. 10. Tom. II, Alph. 1, plag. 13. Tom. III, Alph. 2, plag. 8). In parte secunda docetur *Perspectiva corporum inclinatorum*: in tertia agitur de la-

quearibus & anamorphosisbus opticis, catoptricis & dioptricis.

§. 24. Praxin *Perspectivæ* multis exemplis illustrat P. ANDREAS PUZZO in *Architectura Piclorum & Sculptorum*. Tomus prior prodiit *Rome* An. 1693, in fol. posterior ibidem An. 1700, in fol. Uterque totidem continet Tabulas æneas, quot folia, nimirum prior 102; posterior 120, Prior Germanice prodiit *Augustæ Vindelicorum* An. 1706, in fol. posterior ibidem An. 1709.

§. 25. An. 1711, G. J. GRAVESANDIUS, Juris Doctor, nunc Mathematicum Professor Lugdunensis, *Hagæ Comitum* idiomate Gallico evulgavit Tentamen de *Perspectiva*, in 8. (plag. 12, Tabb. 32). Titulus libelli: *Essai de Perspective*, in quo multiplices regulas seu methodos demonstrat.

§. 26. Cæterum scriptoribus Opticis adhuc accensendus est HONORATUS FABRI, e Societate Jesu, qui in *Synopsi Optica* (*Lugd.* An. 1667, in 4. 1 Alph. 8 plag.) illa omnia, quæ ad Opticam, Dioptricam & Catoptricam pertinent, breviter quidem, accurate tamen demonstrat.*

* Imprimis commendari meretur ROBERTI SMITH Optices Systema integrum, quod sub titulo: *A compleat System of Opticks*, prodiit Can-

tabrigia, An. 1738, in 4. reg. (Tom. I: Alph. 1. plag. 15, Tabb. 45. Tom. II, Alph. 2, Tabb. 38).

CAPUT IX.

De Astronomia.

§. I. Scripta astronomica sunt varii generis. Aut enim observationes recensent, aut calculos motuum cœlestium trigonometricos & geometricos exponunt, aut tabulas Astronomicas complectuntur, aut usum globi cœlestis, aut denique corporum mundanorum rationem declarant.

§. 2. Veterum observationes, quas inter eminent observationes HIPARCHI, conservavit PTOLEMÆUS in *Almagesto*. An. 882, apud Saracenos observationibus operam dedit ALBATEGNIUS. Ab An. 1457, Norimbergæ iisdem incubuit JOHANNES REGIOMONTANUS (vero nomine MÜLLER), cui succedere discipuli JOHAN. WERNERUS & BERNHARDUS WALTHERUS, ab An. 1475, usque ad An. 1504, observationes suas continuantes. REGIOMONTARI atque WALTHERI observationes prodire *Norimbergæ* cum quibusdam aliis REGIOMONTANI atque PURBACHII scriptis An. 1544, in 4. (plag. 22). Titulus operis: *Scripta JOHANNIS REGIOMONTANI de Torqueto, Astrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica baculoque astronomico & observationibus cometarum; item observationes motuum Solis ac stellarum tam fixarum, quam*

erraticarum; item libellus M. GEORGII PURBACHII de Quadrato Geometrico. Ab An. 1509, COPERNICUS, post eum WILHELMUS Hassiæ Landgravius cum Mathematico CHRISTOPHORO ROTHMANNO & Mechanico suo JUSTO BYRGIO Cassellis, & TYCHO DE BRAHE Uraniburgi observarunt. Incepit observationes suas TYCHO An. 1582, easque continuavit usque ad An. 1601, majori & meliori instrumentorum apparatu, quam ante ipsum fecerat nemo. Omnes observationes hæcenus recensitæ continentur in *Historia cœlesti*, quæ jussu FERDINANDI III, Imperatoris *Ratisbonæ* 1672, in fol. prodit (12 Alph. 6 plag. Tab. 3). Describuntur quoque in eadem instrumenta TYCHONIS; una exhibentur observationes MOESTLINI, SCHICKHARDI aliorumque. Ipse alias Tycho instrumenta sua descripsit An. 1602, in *Astronomie inflaurata Mechanica, Norimbergæ* An. 1602, in fol. edita (Alph. 1, plag. 11). WILHELMI vero Hassiæ Landgravi observationes, una cum observationibus REGIOMONTANI atque WALTHERI edidit WILLEBRORDUS SNELLIUS, *Lugduni Batavorum* An. 1618, in 4. (Alph. 1, plag. 13).

§. 3. Ma-

§. 3. Magis sumtuoso instrumentorum apparatu & majori studio, quam TYCHO, observationibus cœlestibus vacavit JOHANNES HEVELIUS, Consul Dantiscanus. Instrumentorum apparatus descripsit Tomo primo *Machina cœlestis* (*Gedani* An. 1673, in fol. reg. 5 Alph. 4 plag. Tab. 30): Tomo secundo (*Gedani* An. 1679, in fol. 14 Alph. 6 plag.) observationes 48. annorum comprehendit. Dolendum vero, quod Tomi præsertim posterioris exemplaria pleraque ferali flamma fuerint absumta. Equidem ROBERTUS HOOKE in *Animadversionibus in Tomum primum* Anglico sermone editis *Londini* An. 1674, in 4. (plag. 11, Tab. æn. 3) instrumenta *Heveliana* reprehendit cetera minus exacta; sed celeberrimus HALLEIUS, consensu Societatis Regiæ Britannicæ, Dantiscum An. 1679, profectus & instrumentorum, & observandi accuratorem approbavit. Observationes, quas in gratiam hospitis instituit, una cum aliis reperiuntur in *Anno climacterico s. Rerum Uranicarum observationum quadragesimo nono* (*Gedani* 1685, in fol. 2 Alph. 6 plag. Tab. 8). Jam ante An. 1661, celeberrimus Galliæ Astronomus ISMAEL BULLIALDUS Dantiscum venit Observatorium HEVELII visurus & modum ejus observandi examinaturus. Quid uterque, BULLIALDUS nimirum atque HALLEIUS, de eodem senserint; docent *Excerpta ex literis illustrum*

& clarissimorum virorum ad D. JOH. HEVELIUM perscriptis *Judicia de rebus astronomicis ejusdemque scriptis*, quæ *Dantisci* An. 1683, in 4. (Alph. 1, plag. 5) edidit JOANNES ERICUS OLHOFIUS p. 67, 68, 71, 79, 187.

§. 4. In Anglia seculo superiori observandi studio clarus extitit JEREMIAS HOROCICIUS ab A. 1636 usque ad An. 1640. Ejus observationes ex epistolis ad GUIL. CRABTRIUM, suum in studiis astronomicis socium, excerptæ leguntur in *Operibus posthumis* (*Londini* An. 1673, in 4. 3 Alph. 12 plag. Tab. 2). Adjiciuntur excerpta ex schediasticis GUIL. CRABTRII de observationibus ab ipso institutis An. 1635, 36, 37 & 38.

§. 5. In Italia JOH. BAPTISTA RICCIOLUS superiori seculo observatorem egit, qui præcipuas observationes suas in *Astronomia Reformata* (*Bonomiæ* An. 1665, in fol. 6 Alph. 5 plag.) cum selectis veterum & recentiorum observationibus contulit & de Astronomiæ perfectione inde judicium tulit.

§. 6. Selectæ celeberrimi CASSINI aliorumque observationes extant in præstantissimo opere, cujus titulus: *Recueil d'observations faites en plusieurs voyages par ordre de Sa Majesté, pour perfectionner l'Astronomie & la Géographie, avec divers Traités Astronomiques par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences.* (*Parisi* An. 1693, in fol. 6 Alph. 12 plag. Tab. 11).

Vide

Vide supra §. 37. c. 1. Ejusdem CASSINI, aliorumque Astronomorum Regiorum, CASSINI junioris, MARALDI atque PHILIPPI DE LA HIRE observationes complures extant in *Commentariis Academiae Regiae Scientiarum*, qui quotannis prodeunt: de quibus supra (§. cit.). Habemus quoque observationes non contemnendas in *Transactionibus Anglicanis*, *Miscellaneis Berolinensibus*, *Commentariis Petropolitanis*, *Actis Eruditorum* & *Diario Trevoliensi*. Vide supra (§. 36, 38, 39).

§. 7. In Anglia longa annorum serie observationes cœlestes continuavit observator celeberrimus JOANNES FLAMSTEDIUS. Quam in historia ejus cœlesti, ab Astronomis dudum desiderata, essent comparitura, in *Miscellaneis Berolinensibus* p. 263 & seqq. docetur. An. 1712, *Historiam cœlestem* FLAMSTEDII edidit HALLEIUS *Londini* in fol. reg. (Alph. 6, plag. 8, Tab. 5) Libris duobus, quorum prior exhibet Catalogum stellarum Fixarum Britannicum novum & locupletissimum, una cum earundem Planetarumque omnium observationibus, sextante, micrometro &c. habitis; posterior transitus siderum per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice complectitur. Nimirum An. 1704, aliquot Societatis Regiæ Sodalibus, FRANCISCO nimirum ROBARTES, CHRISTOPHORO WRENNO, ISAACO *Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.*

NEWTONO, DAVIDI GREGORIO & JOHANNI ARBUTHNOT ex chartis FLAMSTEDII observationes ejus edendas suis sumptibus commiserat serenissimus Daniæ Princeps GEORGIUS, Reginæ ANNÆ conjux: Sed cum moreretur, antequam liber observationum primus absolveretur, tandem Regina, FLAMSTEDII oculis in nascentia indies siderum phœnomēna intentis & in ætate provecta minus acutis, hanc curam demandavit EDMUNDO HALLEIO, ut ea quæ adhuc deerant perficeret. Enimvero cum editio non prorsus esset ad mentem FLAMSTEDII, de nova ipse cogitavit: cui tamen immortuus est An. 1719, die ultima Decembris, cum magna ejus pars typis jam esset descripta, ita ut tandem denuo HALLEIUS editionem hanc novam ad umbilicum perducere teneretur. Prodiere itaque *Historia cœlestis Britannica* Volumina tria, Autore JOANNE FLAMSTEDIO, Astronomo Regio, *Londini* in fol. maj. An. 1725, (Alph. 13). Volumen I, continet stellarum fixarum & planetarum omnium observationes, sextante & micrometro peractas, sub junctis locis, quæ ex observationibus deducta sunt. Volumen II, complectitur fixarum stellarum & planetarum omnium transitus, per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice, nec non Solis, Lunæ & Satellitum Jovis observationes arcu meridionali habitas & loca planetarum

rum inde derivata ab An. 1689, ad An. 1720. Volumen III, comprehendit Historiam Astronomiæ, Catalogos fixarum ante autorem editos una cum ABRAHAMO SHARPII Indice fixarum australium in nostro hemisphærio non conspicuarum & Catalogum Britannicum Autoris ad A. C. 1689, cui subjunguntur longitudo & latitudines stellarum fixarum, quæ a Luna tegi possunt, sigillatim & appendicula Tabularum astronomicarum a SHARPIO constructarum. Optandum quoque foret, ut selectæ observationes Hafnienfes ROEMERI, Berolinenses KIRCHII ac viduæ ipsius, Norimbergenfes EIMARTI atque WURTZELBAUERI lucem publicam adspicerent.

§. 8. FRANCISCI BLANCHINI *Observationes astronomicas & geographicas per Italiam passim habitas* nuperime Verona in fol. edi curavit EUSTACHIUS MANFREDI, Astronomus Bononiensis.

§. 9. Observationes physicæ, mathematicæ, atque botanicæ jussu Regis Christianissimi in America Meridionali & India occidentali ab An. 1701, usque ad annum 1712, a LUDOVICO FEUILLE'E, Minimo, factæ sub titulo: *Journal des Observations physiques, mathématiques, & botaniques* prodire Parisiis duobus Vol. in 4. reg. 1714, & 1725, (Vol. I, Alph. 4, plag. 6, Tabb. æn. 66. Vol. II, Alph. 3, plag. 5, Tabb. æn. 57,

& An. 1729. ST. SOUCIET, e Societate Jesu, idiomate Gallico Parisi. in 4. reg. (Alph. 1, plag. 18, Tabb. 8) publicæ luci exposuit *Observationes mathematicas, astronomicas, geographicas, chronologicas & physicas, ex antiquissimis Sinarum libris excerptas, & recentius a Patribus Societatis in India & China factas*. Addit An. 1732, Tomum secundum, qui continet *Historiam Astronomiæ Sinarum* a R. P. GAUBILE Societate Jesu conscriptam, cum dissertationibus (Alph. 2, plag. 5, Tabb. 3). Huc etiam referendæ sunt FRANCISCI NOEL, Societatis Jesu, *Observationes mathematicæ & physica in India & China factæ* ab An. 1684, usque ad An. 1708, quæ Præge 1710, in 4. (plag. 14, Tab. 1) prodierunt.

§. 10. Astronomiam Geometricam inter veteres justo volumine exposuit CLAUDIUS PTOLEMAEUS anno Christi 147 mortuus. Opus ejus, quod *μεγάλη Σύνταξις* inscribitur, A. C. 827, jussu MAIMONIS Regis Saracenorum in Arabicum translatum & An. 1528 ex Arabico in Latinum versum a GEORGIO TRAPEZUNTIO & a LUCA GAURICO Mathematicum Professore Neapolitano revisum, illoque anno primum editum. An. 1551, idem cum ejusdem PTOLEMAEI scriptis Astrologicis, libris nempe quatuor *de judiciis, Centiloquio & significationibus stellarum errantium* sub titulo: CL. PTOLEMAEI *omnia, quæ extant, Opera præter Geographicam,*

graphiam; *Basilee* in fol. (6 Alph.) opera ERASMI OSWALDI recusum.

§. 11. Cum ipsum Astronomiam integram complectatur, sed ad caput tyronum minime sit accommodatum; GEORGIUS PURBACHIVS in commodiorem formam id redigere coepit. Sed cum vix coepto labore rebus humanis valedicere cogeretur; REGIOMONTANUS discipulus, suavis Praceptoris, telam per textam absoluit. Recusi sunt ejus Libri tredecim in PTOLEMÆI magnam compositionem, quam *Almagestum* vocant, *Noribergæ* 1550, in fol. (2 Alph. 11. plag.) & in iis universa doctrina de coelestibus motibus, magnitudinibus, eclipsibus &c. in epitomen redacta proponitur. Commendantur merito Astronomiæ studiosis, praesertim si qui Astronomiam veterem cognoscere in animum induxerint.

§. 12. Juxta formam *Almagesti* inter Arabes ALBATEGNIUS opus de *Scientia stellarum* composuit, *Norimbergæ* An. 1537, & *Bononia* An. 1545, in 4. editum, in quo ex propriis observationibus Astronomiam perficere studet.

§. 13. Seculo decimo sexto NICOLAUS COPERNICUS in libris 6 *Revolutionum caelestium* aliquoties recusis, resuscitato PHILOLAI de motu Telluris dogmate, primus ad theoriam cœlo consonam fundamenta posuit. Prostat inter alias editiones *Basileensis* An. 1566, in fol. (Alph.

4. plag. 14). COPERNICUM secutus PHILIPPUS LANSBERGIUS theorias motuum coelestium faciles dedit (§. 26, cap. 1).

§. 14. Ex adverso autem CHRISTIANUS SEVERINUS LONGOMONTANUS in *Astronomia Danica*, in qua integram Astronomiam pertractat & regulas exemplis veris illustrat, theorias intricatiores proposuit, cum motum Telluris annum circa Solem in Astronomiam cum TYCHONE admittere nollet. (*Amstelod.* An. 1640, in fol. 6 Alph.) Etenim extra omnem controversiam positum est, motus Planetarum per hypothesein Terræ motæ non modo facilius, quam in hypothesi Terræ quiescentis explicari posse; verum etiam loca planetarum in ista computata cum cœlo demum consentire. Unde etiam Inquisitores in Italia permittunt, ut eadem utantur Astronomi, etsi eam pro veritate demonstrata venditari non ferant.

§. 15. Omnes omnino Astronomi usque ad KEPLERUM motum planetarum circulem statuerunt: unde theoriæ ipsorum cœlo non satis responderunt. Hanc Astronomiam circulem omnium optime exposuit ANDREAS TACQUET in octo de *Astronomia* libris (§. 28, cap. 1). Dolendum vero, quod præcepta nullis exemplis illustraverit, ut magis inservirent studiis tyronum.

§. 16. Enimvero vir acerrimi judicii ingenique sagacissimi JOHAN-

NES KEPLERUS observationibus TYCHONIS (quas etiam adhibuerunt LONGOMONTANUS atque LANSBERGIUS) felicissime usus in *Commentariis de motibus stelle Martis* seu *Astronomia nova* αἰτιολογικῇ An. 1609, in fol. (4 Alph.) theoriam planetarum ellipticam proposuit & in *Epitome Astronomiæ Copernicanae* (Franc. 1635, in 8. 2 Alph. 15 plag.) ad omnium planetarum motus supputandos adhibuit, ac primus in causas physicas motuum cœlestium inquirere cœpit. Hanc theoriam causis physicis convenientem demonstravit NEWTONUS lib. 3 Princ. Mathem. Philos. Nat. itemque LEIBNITIUS in Tentamine de causis motuum cœlestium physicis, quod legitur in *Actis Eruditorum* An. 1689, p. 82; quod idem suo modo ostendere conatus PHILIPPUS VILLEMOT in *Novo systemate motus Planetarum, Lugduni* An. 1707, in 12. (plag. 12, Tab. 12) edito. Phænomenis rectius, quam cæteras hypotheses, satisficientem prehenderunt Astronomi.

§. 17. Equidem KEPLERI inventa sprevit LANSBERGIUS suaque iisdem anteposuit: sed optime illum contra hujus insultus defendit HOROCCIUS in posthumis (§. 4), qui in extollendis laudibus KEPLERI, a quo, sub initium studii astronomici, LANSBERGII magnificis promissis & nimium acerbis in KEPLERUM stricturis factus fuerat alicuior, veluti extra seipsum rapitur.

§. 18. ISMAEL BULLIALDUS in *Astronomia Philolaica* (Parisiis An. 1645, in fol. 7 Alph. 20 plag.) KEPLERI theoriam emendare conabatur, ut scilicet calculus magis geometricus fieret, cum KEPLERUS regula positionum interdum uti cogatur (§. 691, *Astron.*): ostendit vero SETHUS WARDUS, Astronomiæ in Academia Oxoniensi Professor, in *Inquisitione in Astronomiam Philolaicam* BULLIALDI, quæ Tractatui de Cometis subiecta prodiit Oxonii An. 1653, in 4. (plag. 14), errores quosdam ab ipso fuisse commissos: quos agnoscens BULLIALDUS in *Fundamentis Astronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & assertis, adversus WARDI impugnationem* (Parisiis An. 1657, in 4. plag. 7) emendavit. Cæterum WARDUS *Idea quoque Trigonometriæ demonstrata*, quæ cum prælectione de Cometis, Oxonii An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, inquisitionem aliquam in BULLIALDI Astronomiæ Philolaicæ fundamenta adjecit.

§. 19. SETHUS WARDUS in *Astronomia Geometrica* (Londini 1656, in 8. reg. 14½ plag.) methodum geometricam proposuit motus siderum computandi; sed a veris motuum regulis per KEPLERUM stabilitis recedit. Eandem anno sequenti proposuit Comes DE PAGAN in *Theoria Planetarum*, Parisiis An. 1657, in 4. idiomate patrio edita. Non ignoravit eam KEPLERUS; sed ex *Epitome Astronomiæ Copernicana* haud obscure

scire colligitur, quod ideo rejecerit, quia veris naturæ legibus adversam reperit.

§. 20. BULLIALDI hypothesin excoluit VINCENTIUS WING in *Astronomia Britannica* (Londini An. 1669, in fol. 7 Alph. 5 plag.) ubi præcepta singula Astronomiæ practicæ veris exemplis illustrantur ad caput tyronum studii Astronomici. Præmittit *Trigonometriam* planam & sphericam, in qua exemplis illustrantur problemata, & in spherica exhibet regulam catholicam NEPERI.

§. 21. *Wardianam* ad numeros revocavit JOHANNES NEWTON in *Astronomia Britannica* patrio sermone conscripta (Lond. 1657, in 4. 1 Alph. 20 plag.). Eandem excoluit THOMAS STREETE in *Astronomia Carolina*, Londini An. 1661, in 4. (plag. 29) primum edita & non sine augmento ibidem 1710. in 4. (2. Alph. plag. 3.) recusa. Id peculiare habet, quod motum Apheliorum & Nodorum sustulerit. Astronomiam hanc Carolinam ex idiomate Anglico in Latinum transtulit GABRIEL DOPPELMAYER. & *Norimbergæ* An. 1705, in 4. (Alph. 1, plag. 13, Tabb. 5) edidit.

§. 22. Omnia Astronomorum tam veterum, quam recentiorum, hypotheses atque inventa, quæ tunc temporis præstabant, in unum volumen congestit JOHANNES BAPTISTA RICCIOLUS e Societate Jesu in *Almagesto Novo* (Bonon. An. 1651, in fol.

16½ Alph.). Contrà DAVID GREGORIUS in *Elementis Astronomiæ Physicæ & Geometricæ* (Oxonia 1702, in fol. 5 Alph. 12 plag.) recentiorem Astronomiam exposuit, COPERNICI, KEPLERI atque NEWTONI inventis superstructam, quorum ille verum systema mundi, iste veras planetarum orbitas ac motuum leges, hic tandem omnium causas physicas detexit. Multum præstantiæ operis accederet, si numeris ex recentioribus observationibus illustraretur. In Anglia in linguam Anglicam versa sunt hæc Astronomiæ Elementa: Latina vero recusa sunt *Genevæ* An. 1726, in 4. (Alph. 5, Tabb. 46) cum nonnullis additamentis.

§. 23. Nucleum Astronomiæ recentioris exhibuit GUILIELMUS WHISTON in *Praelectionibus Astronomicis* (Cantabrigiæ An. 1707, in 8. reg. 1 Alph. 6 plag.) solam tamen partem theoreticam pertingit. Idem fuit institutum JOHANNIS KEILL in *Introductione ad veram Astronomiam* (Oxonia An. 1718, in 8. Alph. 1, plag. 9½, Tabb. 2), in qua recentissima continentur Astronomorum inventa. Alias Tyronibus inprimis commendandi sunt NICOLAI MERCATORIS *Institutionum Astronomicarum* Libri duo (Londini An. 1676, in 8. 1 Alph.), in quo & Sphærica, & theorica, juxta hypotheses tam veteres, quam recentiores, breviter explicatur & exemplis illustratur, calculus quoque astronomicus perspicue docetur.

§. 24. Quodsi cui voluere fuerit, theoricas Veterum animi gratia cognoscere; ei satisfaciet PURBACHIUS in *Theoricis Planetarum* sæpius editis. Recusæ sunt *Basileæ* An. 1569; in 8. cum REGIOMONTANI *disputationibus contra Cremonensia in planetarum theoricas deliramenta* & JOHANNIS ESSLERI *Speculo Astrologico* (pag. 18). Accessere huic editioni CHRISTIANI WURSTISII, Mathematicum Professoris Basileensis, *questiones novæ in illas theoricas* (1 Alph. 5 plag.). Explicat autem PURBACHIUS in tyronum gratiam solas theoricas planetarum, forma calculi geometrici neglecta, quæ ex REGIOMONTANI *Epitome Almagesti* PTOLEMÆI hauriri debet. Hasce Theoricas prolixo ac perspicuo Commentario illustravit ERASMUS OSWALDUS SCHRECKENFUCHSIUS, qui *Basileæ* An. 1556, in fol. (Alph. 5, plag. 5) prodiit, ita ut Astronomiam veterem, qualem tradidit PTOLEMÆUS, omnium optime ex hoc opere haurire possint tyrones. Theoricam Astronomiam tantummodo explicavit in gratiam tyronum PURBACHIUS, quia isto tempore in Scholis doctrina spherica tradebatur ex JOANNIS DE SACRO BOSCO libello de *Sphæra*, sæpissime recuso; quem prolixo Commentario illustravit CLAVIUS Tomo tertio Operum (§. 24). MICHAEL MOESTLINUS, Matheseos Professor Tubingensis, KEPLERI Præceptor, in *Epitome Astronomia* (Tubingæ An.

1610, in 8. 1 Alph. 12 plag.) non modo theoricas Planetarum, sed & partem Astronomiæ sphericam explicat.

§. 25. Tabulæ Astronomiæ antiquissimæ sunt *Ptolemaice*, in PTOLEMÆI *Almagesto*; sed hodie cum cælo non amplius consentiunt. Eas An. 1252, corrigi curavit ALPHONSUS XI Rex Castiliæ, usus inprimis opera ISAACI HAZAN Judæi, impensis 400000 aureorum factis. Hinc enatæ sunt *Tabulæ Alphonsinæ*, quibus ipse Rex præfationem præmisit. Sed mox harum etiam defectum agnoverunt Astronomi periti PURBACHIUS & REGIOMONTANUS: unde REGIOMONTANUS & post ipsum WALTHERUS atque WERNERUS observationibus cœlestibus incubuerunt; non tamen fata permiserunt, ut iis emendandis manum admoverent. Sane *Tabulæ resolute*, quas dedit REGIOMONTANUS, ex Alphonsinis derivatæ. Hasce correctas & locupletatas edidit SCHONERUS An. 1536. Ea reperire licet in Operibus ejus mathematicis, de quibus postea dicemus. Neque ab his abludunt *Tabulæ resolute de supputandis siderum motibus* JOANNIS VIRDUNGI HAFFURDII, quas An. 1542, *Norimbergæ* edidit JACOBUS CURIO, nunquam antea typis excusas, in 4. (pag. 15), nisi quod sint breviores.

§. 26. NICOLAUS COPERNICUS in libris *Revolutionum cœlestium* tabulis Alphonsinis alias substituit ex recentioribus & partim propriis observationibus

tionibus a se supputatas; sed ex COPERNICI observationibus & theoriis mox ERASMUS REINHOLDUS *Tabulas Prutenicas* procudit, aliquoties recusas. Utor ego editione *Tubingensi* An. 1571, in 4. 2 Alph. 15 plag.

§. 27. Tabularum Prutenicarum imperfectionem juvenis agnovit TYCHO DE BRAHE: qua agnita permotus, ut tanto cum fervore observationes cœlestes venaretur. Ipse tamen nonnisi Solis ac Lunæ motus inde restituit *Progymnasmatum* Tomo primo. Sed mox iisdem utebantur LONGOMONTANUS, qui in *Astronomia Danica* exemplo PTOLÆMÆI & COPERNICI theoricis singulorum Planetarum *Tabulas* motuum subjunxit, *Danicarum* nomine hodie celebratas, & KEPLERUS, cujus opera prodire *Tabule Rudolphina* (*Ulmae* An. 1627, in fol. 2 Alph. 20 plag.), quæ hodiernum magno in pretio habentur, anterioribus omnibus prælatæ. Has in aliam formam transmutavit MARIA CUNTIA, cujus *Urania protia* sive *Tabule Astronomicae mire faciles* vim hypotheseum physicarum a KEPLERO præditarum complexæ, facillimo calculandi compendio, sine ulla Logarithmorum mentione phænomenis satisfaciennes Latine & Germanice *Olsnæ* in Silesia An. 1650, in fol. (6 Alph. 4 plag.) prodire, ut scilicet calculus *Rudolphinus* difficilis facilius redderetur. Idem institutum fuit MERCATORIS in *Astronomicis Institutionibus* (§. 23)

& JOH. BAPTISTÆ MORINI, cujus *Tabule Rudolphina* in compendium redactæ versioni Latine Astronomiæ Carolinæ STREETII subjunctæ (§. 21).

§. 28. Equidem LANSBERGIUS Tabularum Rudolphinarum fidem subleſtam reddere tentavit & *Tabulas motuum cœlestium perpetuas*, quas vocat, condidit (§. 26, cap. 1) sed non solum HOROCCIUS hominis arrogantiam retudit in *Astronomia Kepleriana defenſa*, quæ maximam posthumorum partem absolvit (§. 4); verum etiam reliqui Astronomi parum eidem tribuerunt. Similiter *Rudolphinarum* auctoritatem non imminuere *Tabule Britannica* WINGII (§. 20), quæ in ipsius *Astronomia Britannica* leguntur, & NEWTONI, quas in sua *Astronomia Britannica* proposuit (§. 21), nec Gallicæ Comitissæ DE PAGAN (*Parisi* An. 1658, in 4. 1 Alph. 11 plag.), *Novalmageſtica* RICCIOLI, quæ extant in ejusdem *Astronomia Reformatâ* (§. 22), *Philolaica* BULLIALDI, quæ leguntur in *Astronomia Philolaica* (§. 18) & *Carolina* STREETII in *Astronomia Carolina* (§. 21). Inter meliores tamen censentur *Philolaica* & *Carolina*, ita ut ob benignum FLAMSTEDII, optimi hac in re arbitri, judicium Carolinas *Prælectionibus* suis *Astronomicis* subjunxerit WHISTON (§. 23).

§. 29. Novas quoque Tabulas ex datis *Keplerianis* & *Bullialdinis* juxta propriam hypothesin Cono-ellipticam

cam supputavit JOH. JACOBUS ZIMMERMANN Ecclesiæ Würtembergæ-Bieticæ Diaconus, in *Prodomo Bicipite Cono-elliptica & a priori demonstrata Planetarum Theorices* (Stuttgartiæ An. 1679, in 4. plag. 15); sed nullam hæcenus in foro Astronomico auctoritatem adeptæ.

§. 30. *Tabule* omnium novissimæ sunt *Ludovicianæ*, quas Astronomus præclarus PHILIPPUS DE LA HIRE ex solis observationibus, citra ullius hypotheseos subsidium, deduxit: quod ante inventa micrometra, tubos & horologium oscillatorium impossibile habebatur. Prodiere *Parisiis* An. 1702, in 4. (1 Alph. 4 plag. Tabb. 4) cum ante jam An. 1687, *Tabulæ Solares & Lunares* sub titulo *partis prioris Tabularum Astronomicarum* (in 4. plag. 17) lucem adspexissent. Haberi possunt pro *Tabulis Rudolphinis* correctis. Dudum etiam in manibus Astronomorum versantur JOH. DOMINICI CASSINI *Tabulæ astronomica* * & in Angliâ novas condidit HALLEIUS.

§. 31. JOHANNES HEVELIUS in *Prodomo Astronomia* (Gedani An. 1690, in fol. 4 Alph. 7 plag. Tab. 1) cum *Catalogo fixarum ex propriis observationibus deducto* *Tabulas* quoque Solares exhibuit domesticis observationibus superstructas, quæ præstantissimæ habentur. Optandum vero

fuisse, ut fata permisissent, quo reliquorum quoque Planetarum *Tabulas* conderet observationum suarum fructum laturus celeberrimus Autor.

§. 32. Primus fixarum *Catalogum* confecit ex domesticis observationibus HIPPARCHUS, quem ad suum tempus reductum PTOLEMÆUS exhibuit in *Almagesto* lib. 7. Novum dedit TYCHO *Progymnasmatum* Tomo primo p. 257, & seqq. quem extendit KEPLERUS in Rudolphinis. Exhibet fixarum *Catalogum*, sed tantummodo correctum, non vero ex propriis observationibus conditum RICCIOLUS in *Astronomia Reformata*. Ast *Tabula Longitudinis ac Latitudinis stellarum fixarum* ex observatione ULUGH BEIGHII, TAMERLANI Magni Nepotis, ex MSC. Persicis Latine vertit, Commentariis illustravit & Oxonii An. 1665, in 4. (1 Alph. 13 plag.), edidit THOMAS HYDE. Addit MUHAMMEDIS TIXINI *Tabulas declinationum & ascensionum rectarum*. HEVELIUS in *Prodomo* *catalogos* fixarum omnes, qui hæcenus prostant, unâ exhibet atque inter se comparat.

§. 33. Enimvero locupletissimus *Fixarum omnium*, quæ conspici possunt, ex propriis observationibus conditus a FLAMSTEDIO & sub titulo: *Catalogi Fixarum Britannici*, exhibetur in *Astronomi summi Historia*

* Edidit nuperrime JACOBUS CASSINI Domin. filius, *Tabulas Astronomicas*, una cum *Elementis Astronomia* gallice, *Parisiis*, in 4. 2 Vol. An. 1740. Primum volumen, quod Astrono-

miam complectitur, habet Alph. 3, plag. 15, Tabb. 20. Akerum quod *Tabulis* destinatur, constat Alph. 1, plag. 3, Tabb. 5.

storia cœlesti, de qua abunde diximus superius (§. 7).

§. 34. Astra describunt & schematissimis illustrent JOHANNES BAYERUS in *Uranometria*, Ulmæ An. 1661, quæ prodiit textu in 4. figuris in folio impressis (plag. 13, Tabb. 48), quæ in citandis stellis utuntur Astronomi, & JOHANNES HEVELIUS in *Firmamento Sobiesciano* (Gedani An. 1690, in fol. plag. 6, Tabb. æn. 54). Optandum vero fuisse, ut literas, quibus ad indigitandas stellas usus fuit BAYERUS, etiam HEVELIUS retinuisset: id quod fecit JOHANNES FLAMSTEDIUS in opere magnifico *Atlantis cœlestis*, quod Londini An. 1729, in fol. reg. (plag. 5, Tabb. 29) prodiit. Compendia usibus tyronum servientia sunt ÆGIDII STRAUCHII *Astrognosia* (Wittebergæ An. 1684, in 12. plag. 9, Tabb. 25) & WILHELMI SCHICKARDI *Astroscopium* (Lipsiæ An. 1698, in 12. plag. 6, Tabb. 2).

§. 35. Globi cœlestis constructionem & usum perspicue explicavit SCHONERUS in Tractatu, qui inter opera ipsius extat. Recentius præter alios usum globi cœlestis docent GUILIELMUS BLEAU in *Institutione Astronomica de usu globorum* (Amstelod. An. 1690, in reg. 8. plag. 16) & BION in libro Gallicæ ejusdem argumenti, qui sub titulo *Usage des Globes célestes & terrestres, & des sphères*, Parisiis An. 1699, in 12. reg. Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

(16 plag. Tabb. 26) prodiit, ac nuper auctior recusus.

§. 36. Librum BIONIS Germanice vertit & annotationibus nonnullisque additamentis locupletavit D. CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGER. Prodiit Lemgovia sub titulo: *Des Herrn BIONS Abhandlung von der Welt-Beschreibung und dem Gebrauch derer Himmels und Erd-Kugeln auch Sphären* An. 1736, in 8. (Alph. 1, plag. 19, Tabb. 35). Explicat hic Autor in altera præsertim editione, quæ ex Astronomia & Geographia tanquam cognita supponi debent, siquidem usum utriusque Globi, terrestris scilicet ac cœlestis, intelligere volueris. Adduntur etiam physica de Meteoris & alia, quæ ad Calendarii notitiam faciunt.

§. 37. Cum LOTHARIUS ZUMBACH DE KOESFELD, Med. D. postea Matheseos Professor in illustri Collegio Carolino, quod Cassellis erat, novos Globos, cœlestem juxta Catalogum fixarum HEVELII & terrestrem ex recentissimis observationibus, GERARDO VALK chalcographo construxisset, adornationem quoque & distributionem ac usum Globorum descripsit. Enimvero quia Globus cœlestis tantummodo satisfacit phænomenis primi mobilis, novum excogitavit instrumentum astronomicum, quale adhuc desiderari arbitrabatur, quo loca & motus Planetarum atque stellarum fixarum proprii in longitudinem & latitu-

latitudinem Zodiaci, eclipses Solis & Lunæ, occultationes stellarum, aliaque plurima inde derivata, absque calculo exacte, facile, ac promte exhibentur. Instrumentum hoc *Planetolabium* appellavit & GERARDUS VALK dextre idem præparavit. Descriptioni itaque Globorum adjunxit descriptionem Planetolabii sui, explicans omnem ejus rationem & usum. Utraque descriptio sub titulo: *Praxis Astronomiæ utriusque, ut & Geographiæ exercita per usum Globi cælestis & Terrestris, tum & Planetolabii*, prodiit *Amstelodami* An. 1700, in 4. Descriptio globorum constat plag. 18, Tabb. 4. Planetolabii plag. 9, Tabb. 2. Supponit illa ad manus esse Globos, hæc Planetolabium. Equidem SCHONERUS jam invenerat Organum Uranicum, quod vocat, e quo facillime, absque scrupulosa supputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, & quod sub finem operum describitur; cum tamen ejus constructio nitatur hypothefibus Veterum, ZUMBACHII vero Planetolabium secundum hypothefin recentiore ellipcticam, & *Bullialdi* inprimis Astronomiam Philolaicam fuerit constructum, & multo accuratius exhibeat loca planetarum; quin non inutilem operam sumserit ZUMBACHIIUS dubitandum non est. Ne quid in mechanica Astronomiæ Theoricæ parte desiderari posset, addidit idem *Jovilabium* & *Saturnilabium*, quorum ista loca Satellitum Jovis, hoc au-

tem loca Satellitum Saturni, absque calculo, ad datum quodcunque tempus determinantur. *Descriptio Jovilabii* prodiit *Amstelodami* An. 1716, in 4. (plag. 6, Tab. 1); *Saturnilabii* vero ibid. An. 1726, in 4. (plag. 9, Tabb. 2).

§. 38. Construxit ZUMBACHIIUS Planetolabium suum ad imitationem Astrolabii, instrumenti ad explicanda phænomena motus primi dudum adhibiti. Astrolabii constructionem & usum rigidissime demonstravit CLAVIUS in Tractatu de *Astrolabio*, qui in Operibus ejus legitur (§. 24, cap. 1). Etsi autem CLAVIUS tantummodo de polari, quod vocatur, egerit; tanta tamen usus prolixitate & schemata construxit tam implexa ac intricata, ut a nullo mortalium totum fuisse perfectum judicet TACQUETUS. Quamobrem ipse lib. 3 Opticæ, qui de projectione astronomica agit, doctrinam hanc magis perspicue proponit, & non minus æquinoctiale, quam polare explanat. Ceterum quoad doctrinam de projectione sphaeræ, tam orthographica, quam stereographica, commendari meretur Tractatus, quem sub titulo: *A Treatise of the sphere* patrio sermone *Londini* An. 1714, edidit JOANNES WITTY (plag. 15, Tabb. 10). Tyronibus autem, qui usum Astrolabii cognoscere student, satisfaciunt BION in Tractatu, qui *Parisis* An. 1702, in 12. reg. (plag. 10½, Tabb. 9) sub titulo: *L'Usage des Astrolabes tant universels que particuliers* lucem adspexit.

§. 39. Ad naturam siderum & rationem universi cognoscendam conducunt, præter RICCIOLUM in *Almagesto*, CHRISTOPHORI SCHEINERI *Rosa Ursina* (Bracciani An. 1626, usque ad An. 1630, in fol. 11 Alph. cum figuris multis textui insertis) opus de maculis solaribus absolutissimum; ejusdem *Disquisitiones Mathematicæ de controversiis & novitatibus astronomicis* (Ingolstadii An. 1614, in 4. plag. 12); opusculum de *refractionibus cælestibus* (Ingolstadii An. 1617, in 4.) & ejusdem *Sol ellipticus* (Augustæ Vindelicorum in 4. plag. 5); GALILÆI *Tractatus de maculis solaribus* (Romæ An. 1613) & *Nuncius sidereus* aliquoties recusus; ejusdem *Dialogi de Systemate mundi* (Lugd. Bat. An. 1699, in 4. 3 Alph.), opus lectu dignissimum; JOHANNIS KEPLERI *Tractatus Germanicus de Cometa anni 1607*, (Hale 1608, in 4. plag. 5) & *De Cometis libelli tres* (Augustæ Vindelicorum An. 1619, in 4. plag. 20, Tab. 1): ejusdem *Prodromus dissertationum cosmographicarum*, continens *Mysterium cosmographicum de admirabili proportionem orbium cælestium, deque causis cælorum numeri, magnitudinis, motuumque periodorum genuinis & propriis, demonstratum per quinque regularia corpora Geometrica*, cum *Narratione GEORGII JOACHIMI RHETICI de libris revolutionum NICOLAI COPERNICI* (Tubingæ An. 1596, in 4. 1 Alph.): ejusdem *Somnium seu opus*

posthumum de Astronomia lunari (Franc. An. 1634, in 4. 1 Alph.): ejusdem *Harmonica Mundi* (Lincii An. 1619, in fol. 3 Alph. 13 plag.): ejusdem *Hyperaspistes TYCHONIS* (Franc. An. 1625, in 4. plag. 28) adversus SCIPIONIS CLARAMONTII *Antitychonem*, in quo contra TYCHONEM BRAHE demonstrare sagittat cometas esse sublunares, non cœlestes (Venetiis An. 1621, in 4. 2 Alph. 2 plag.); HEVELII *Selenographia* (Gedani An. 1647, in fol. 6 Alph. 10 plag. Tabb. 111), in quo ejus facies secundum omnes phases accuratissime delineatur: ejusdem *Prodromus Cometicus*, quo historia Cometæ An. 1664 exorti, cursum, faciesque diversas capitis ac caudæ, accurate delineatas complectens, nec non *Dissertatio de Cometarum omnium motu, generatione, variisque phenomenonis* exhibetur (Gedani An. 1665, in fol. plag. 17, Tabb. 3): ejusdem *Descriptio Cometæ* An. 1664, (Gedani An. 1666, in fol. 2 Alph. 5 plag. Tabb. 7): ejusdem *Epistola de Cometa* An. 1672, (Gedani An. 1672, in fol. 2 plag. Tab. 1): ejusdem *Cometographia* (Gedani An. 1668, in fol. 10 Alph. 19 plag. Tabb. 38), opus de Cometis absolutissimum: ejusdem *Dissertatio de nativa Saturni facie* (Gedani An. 1656, fol. 12 plag. Tabb. 9), ubi phases Saturni delineat & ad causas suas revocare studet: ejusdem *Mercurius in Sole visus, cum HOROCII Venere in Sole visa, & Historia*

stella mira (Gedani An. 1662, in fol. 2 Alph. 2 plag. 10 Tabb.); CHRISTIANI HUGENII *Systema Saturninum* (Haga Comitum An. 1659, in 4. plag. 12), in quo annulus Saturni describitur & unus ejus satellitum annunciat, & inprimis ejusdem *Cosmotheoros* (ibid. An. 1698, in 4. plag. 18, Tabb. 5, item *Leoburgi* 1704, in 8. plag. 8, Tabb. 5), in quo natura planetarum ex conjecturis probabilibus eruitur: FRANCISCI BLANCHINI *Hesperii & Phosphori Nova phenomena, sive Observationes circa Planetam Veneris* (Romæ An. 1728, in fol. Alph. 1, plag. 2, Tabb. 10), in quo opere maculæ Veneris exactissime delineantur, & Veneri eadem opera impenditur, quam in Luna consumpsit HEVELIUS, præter alia ad parallaxin Veneris & ejus a Terra distantiam spectantia: DE MAUPERTUIS *Discursus Gallice conscriptus de Figuris differentibus astrorum* (Parisi An. 1732, in 8. plag. 5½): JACOBI BERNOULLI *Conamen novi systematis Cometarum* (Amstelodami An. 1682, in 8. 6½ plag. Tabb. 8): JOH. BAPTISTÆ DU HAMEL *Astronomia Physica* (Tom. 1. Operum Philos. Norimb. An. 1681, in 4): WILHELMI DERHAM *Theologia Astronomica*, quæ sub titulo: *Astrotheology*, Londini An. 1715, in 8. (plag. 20, Tabb. 3) prodiit, & *Hamburgi* ex Anglico sermone in Germanicum translata lucem adspexit.

§. 40. Huc etiam referendi sunt

Autores qui motuum cœlestium causas physicas tradere aggressi sunt; KEPPLERUS in *Physica cœlesti seu Commentariis de motibus stellæ Martis*, & in *Epitome Astronomiæ Copernicanæ* (§. 16), NEWTONUS in *Principiis Philos. Natur. Mathem.* cum GREGORIO in *Elementis Astronomiæ* (§. cit.) VILLEMOT supra laudatus (§. cit.): & Cel. J. POLENNUS in *Dialogo de Vorticibus cœlestibus* (Patauii An. 1712, in 4. 1 Alph. 6 plag. 7 Tabb.).

§. 41. *Systema Copernicanum* defendunt, præter GALILÆUM ante laudatum in *Dialogis de Systemate mundi* (§. 39), peculiaribus scriptis PETRUS MEGERLINUS, Professor Mathematicum Basileensis in *Systemate mundi Copernicano argumentis invictis demonstrato* (Amstelodami An. 1682, in 8. plag. 6, Tabb. 3); BULLIALDUS in *Philolao ab inferis resuscitato seu Dissertatione de vero systemate* (Amstelod. An. 1629, in 4.), PETRUS HORREBOWIUS Mathematicum Professor Hafniensis, in *Copernico triumphante, sive de parallaxi Orbis annui Tractatu epistolari* (Hafniæ 1727, in 4. plag. 7, Tabb. 1) & JOH. JACOBUS ZIMMERMANN in *Scriptura Copernicante* Germanice sæpius edita. Utor editione *Norimbergenfi* anni 1709, in 8. (plag. 8).

§. 42. Astronomiam, quam in parte prima secundum proprias hypotheseas explicaverat, in secunda ad usum concionatorum transfert AN-

TONIUS MARIA SCHYRLÆUS DE RHEITA, Capucinus, in *Oculo Enochii atque Eliae*, seu *Radio sidereo mystico* (Anverpiæ An. 1665, in fol. 4 Alph. 9 plag.), qui etiam sub finem partis primæ praxin Dioptricæ explicat.

§. 43. Calculum eclipsium peculiaribus scriptis in usum tyronum illustrarunt ELIAS MOLERUS in *Opere novo Astronomico*, in quo doctrina de supputandis deliquiis juxta Tabulas Prutenicas explicatur (Lugduni An. 1687, in 4. I Alph. 4 plag.); JOHANNES HANKE, e Societate Jesu, in *Tenebris summatis illustratis*, qui secundum Tabulas RICCIOLI computum instituit (Moguntiae An. 1682, in 4. plag. 15) & inprimis ZIMMERMANNUS modo laudatus in scripto Germanico, cui titulus: *Auf alle und jede Hypothesen applicable Fundamental-Aufgaben von den Sonn- und Mond-Finsternissen* (Hamburgi An. 1691, in 8. 15½ plag.) Eclipseos solaris calculum quoque bene tradidit, & Logarithmos in usum Logisticæ sexagenariæ exhibuit, quales alibi non prostant. Commemorari hic quoque mererentur Dissertationes quædam academicæ. Nimirum calculum Eclipsium solarium exemplo Eclipseos anni 1705, illustravit JOHANNES BERNHARDUS WIDEBURGIUS, nunc Professor Mathematicum Jenensis (Helmstädti An. 1714, in 4. plag. 12, Tab. 4) & Eclipseos solaris anni 1723, calculum secun-

dum methodum PHILIPPI DE LA HIRE, ex ejusdem Tabulis, quoad minutissima, repræsentat GEORGIUS MATTHIAS BOSE, nunc Physicæ Professor in Academia Wittebergenfi, in *Commentatione in Eclipsin Terra* An. 1723, d. 13 Maji (Lipsiæ An. 1723, in 4. maj. Alph. I, Tab. I) Huc etiam pertinent *Dissertationes de Eclipsi lunari & de Eclipsi solari* CHRISPHORI LANGHANSEN, Professoris Mathematicum Regiomontani, quarum primam sub præsidio BLÆFINGII, tum Mathematicum Professoris, alteram ipse Præses defendit.

§. 44. Equidem Tabularum astronomicarum conditores præcepta quoque calculi iisdem præmittere solent, quod etiam fecit PHILIPPUS DE LA HIRE: quoniam tamen sæpiissime præcepta breviora sunt, quam ut ad omnem calculum astronomicum absolvendum tyronibus præsertim satisfaciant; ideo JOANNES ALBERTUS KLIMMIUS, idiomate Germanico, Norimbergæ An. 1725, in 4. (Alph. I, plag. 17, Tab. 16). Tabulas PHILIPPI DE LA HIRE cum nova, completa, & accurata descriptione omnis calculi astronomici in usum tyronum calculi edidit. Ad eundem finem tendit opus in hoc genere maxime commendandum, *Astrosophia numerica*, sive astronomica supputandi ratio ANGELI CAPELLI, Canonici & Astronomiæ Professoris Parmensis, quæ duabus partibus *Venetis* An. 1733 & 1736, in 4. prodiit

diit (Pars I, plag. 14, Tabb. an. 8. Pars II, Alph. I, plag. 16). Parte priori abunde docentur, quæ ad calculum faciunt; posteriori autem Tabulæ astronomicæ continentur.

§. 45. JOANNES LEONHARDUS ROSTIUS An. 1718, *Norimbergæ* in 4. (Alph. 3, Tabb. 14), edidit librum astronomicum sub Titulo: *Astronomisches Hand-Buch*, h. e. Manuale Astronomicum, in quo doctrinam sphericam exemplis perspicuis illustrat, & modum observandi declarat, ipse nimirum in observando versatissimus. Addidit deinde An. 1727, (*Norimbergæ* in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 14) partem alteram sub Titulo: *Aufrichtiger Astronomus*, h. e. Astronomus ingenuus. In ea plurima tradit, quæ ad doctrinam sphericam, motus Cometarum, & observationes astronomicas spectant. Inprimis autem plurima tradit, quæ ad calculum Eclipsium facilitandum conducunt. Ad Astronomiam adeo practicam addiscendam utile opus.

§. 46. Quoniam in anterioribus aliquoties mentionem injecimus *Operum Mathematicorum* JOANNIS SCHONERI, ut de iis adhuc dicamus res ipsa flagitare videtur. Ea in unum volumen congeffit, & correctæ & locupletata *Norimbergæ* An. 1561, in fol. excudi curavit Autoris filius ANDREAS SCHONERUS (Alph. 10). Continentur in hisce 1. Isagoge Astrologiæ judiciaræ, 2. de Judiciis Nativitatum libri tres, 3. Tabulæ re-

solutæ astronomicæ, 4. de usu globi coelestis, 5. de compositione globi coelestis, 6. de usu globi terrestis, 7. de compositione globi terrestis, 8. Libellus de distantis locorum per numeros & instrumentum investigandis, 9. de constructione Torqueti, 10. In constructionem atque usum Rectanguli sive radii astronomici Annotationes, 11. In Fabricam & usum magnæ Regulæ PTOLEMÆI Annotationes, 12. Horarii Cylindri Canones, 13. Æquatorium astronomicum, ex quo errantium stellarum motus, luminarium configurationes & defectus colliguntur, oppositis ubique planetarum sphaeris & terminorum expositionibus, 14. Planisphaerium seu Meteoroscopium, in quo singula, quæ per motum primi mobilis contingunt, inveniuntur, 15. Organum Uranicum, quo facillime, absque scrupulosa supputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, 16. Instrumentum impedimentorum Lunæ, per quod dies impediti facillime colliguntur his apprimè utile, qui Almanach conscribere gestiunt. Videmus adeo in hisce operibus non contineri alia, nisi quæ ad præsens caput pertinent, quæ siderum nempe scientiam concernunt.

§. 47. Plura nobis recensenda essent scripta astronomicæ, si omnia promiscue in medium asferre liberet. Sed cum ea, quæ a veteribus & recentioribus usque ad Annum 1660, seculi superioris literis consignata fue-

re, ex RICCIOLI Almagesto facile suppleri queant, cetera ex Diariis Eruditorum, quæ hodie magno numero eduntur, peti queant; potiora a nobis commemorata esse sufficit. De TYCHONIS tantum *Progymnasmatibus Astronomiæ instaurata*, aliquoties laudatis, observamus, quod pars prima equidem inscribatur *De nova stella anni 1572*, generaliter tamen de restitutione motuum Solis & Lunæ stellarumque inerrantium tractet (*Uraniburgi & Pragæ* 1610, in 4. 4 Alph. 13 plag.); altera vero de Cometa An. 1577, agat (*Pragæ* An. 1610, in 4. 2 Alph. 13 plag.). Tomo secundo hujus editionis adjiciuntur TYCHONIS DE BRAHE *Epistole Astronomicæ* (*Uraniburgi* An. 1610, in 4. 1 Alph. 16 plag.). Sola Progymnasmata sub titulo Operum TYCHONIS DE BRAHE postea *Francofurti ad Mœnum* in 4. recusa.

§. 48. Dignum quoque est, cuius singularem mentionem injiciamus, Automatum Planetarium HUGENII, motus planetarum motu suo accurate indicans, descriptum sub finem posthumorum (§. 35, cap. 1). Et si enim ante ipsum istiusmodi automata construxerint alii, quorum nonnulla recenset SCHOTTUS in Technica curiosa: eorum tamen usus hodie nullus amplius est, postquam *Hugenianum* ad Astronomiæ recentioris perfectionem compositum.

§. 49. Præterea, nobis adhuc commemoranda sunt scripta quædam

recentiora, quæ silentio præteriri nefas. Nimirum An. 1697, *Norimbergæ* in fol. (Alph. 1, plag. 4, Tabb. 4) JOH. PHILIPPUS A WURTZELBAU edidit Tractatum de situ Geographico secundum latitudinem & longitudinem civitatis Norimbergenfis sub titulo: *Uranies Noricæ Basis*; in usum observationum suarum, quæ ibidem multa solertia & instrumentis exquisitis instituebat. Sed cum in longitudine ac refractionibus aliquid immutandum esse posthac deprehenderet, ejus supplementum An. 1713, in fol. (plag. 5½) addidit sub titulo: *Stabilimentum Baseos Uranies Noricæ Astronomicæ & Geographicæ, pro deducta antehac inclytæ urbis latitudine & corrigendis longitudinum Geographicarum numeris &c.* ubi etiam de obliquitate Eclipticæ & refractione horizontali agit. Tandem An. 1719, accessit opus Motuum solarium, in qua ex Solis observationibus in Meridiano Norimbergenfi per tria secula habitis iidem definiuntur, & eorundem Tabulæ exhibentur, sed intra dimidium seculum variabiles ob eccentricitatis, quam statuit, mutabilitatem. Prodiit *Norimbergæ* An. 1719, in fol. (plag. 22½, Tab. 1) sub titulo: *Uranies Noricæ Basis astronomica, sive Rationes motus annui ex observationibus in Solem, hoc nostro & seculo abhinc tertio, Norimbergæ sub eodem Meridiano habitis quam plurimis deductæ & amplius demonstratæ.* Operi huic solari adjicitur tractatus de situ geographico Norim-

Norimbergæ & ejus supplementum, de quo ante diximus, ut adeo integrum, quale nunc in bibliopoliis prostat, constat (Alph. 2, plag. 9, Tabb. 5).

§. 50. An. 1735, *Hafnia* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 11) PETRUS HORREBOWIUS, Phil. & Med. D. in Univerſitate Hafnienſi Aſtronomiæ Profeſſor, edidit *Baſin Aſtronomiæ*, ſive Aſtronomiæ partem mechanicam, in qua deſcribuntur obſervatoria atque instrumenta aſtronomica Røemeriana Danica, ſimulque eorundem uſus, ſive methodi obſervandi Røemerianæ in uſum publicum, & præſertim in gratiam una prodeuntis valde inſignis atque uſus ampliſſimi, nunquam non poſteris memorandi, Tridui obſervationum Tuſculanarum ROEMERI ex fundamentis exponuntur. Dolendum vero, quod duo libri, in quo obſervationes ſuas deſcripſerat ROEMERUS ferali iſto incendio An. 1726, quod circa finem Octobris totam fere Hafniam vaſtavit, una cum obſervationibus *Horrebovianis* perierint.

§. 51. Multum deſudavit ROEMERUS in detegenda parallaxi orbis annui, nec ſine ſucceſſu hoc ſe præſtitiffe ſibi videbatur. Exejuſadeo obſervationibus HORREBOWIUS eandem demonſtrandam ſibi ſumſit, ediditque ea fini Hafniæ in 4. (plag. 8, Tab. 1) ſuis ſumtibus *Copernicum triumphantem*, ſive *de parallaxi orbis annui Tractatum epistolarem* ad Sere-

niſſimum Principem CHRISTIANUM, Daniæ & Norwegiæ hæredem An. 1727, cujus pleraque exemplaria ferali iſtud, quod modo commemoravimus, incendium conſumſit.

§. 52. Enimvero nondum triumphare Copernicum in *Commentariis Bononiensis Scientiarum & Artium Inſtituti* (§. 40, cap. 1) oſtendit EUSTACHIUS MANFREDI, cum ex obſervationibus Røemerianis, quæ colligitur in fixis, quoad declinationem & aſcenſionem rectam, mutatio parallaxi orbis annui minime conſentiat. Nimirum hætenus Aſtronomi in parallaxin orbis annui inquiſituri id tantummodo agebant, ut omni circumſpectiōe diſpicerent, num aliqua fixarum a loco fixo aberratio annua deprehendatur, parum ſolliciti utrum præciſe talis ſit, qualem exigit motus annuus Telluris circa Solem, an vero eidem contrarietur. Saluberrimo igitur conſilio MANFREDIUS *Theoriam de annuis inerrantium ſtellarum aberrationibus*, in Aſtronomia hætenus deſideratam condidit camque publici juris fecit *Bononia* Anno 1729, in 4. (plag. 10, Tabb. 6), ut juxta cam obſervationes examinari queant, ne per errorem parallaxis orbis annui inde colligatur, quæ inde colligi nequit.

§. 53. Celebratiſſimus hodie inter Aſtronomos eſt Gnomon Meridianus Bononiensis ad D. Petronii, cui Aſtronomia multa debet incrementa & cujus hiftoriam dederunt

JOANNES DOMINICUS CASSINI atque DOMINICUS GULIELMINUS. Hujus instrumenti descriptionem & observationes astronomicas omnes eodem, ab ejus constructione usque ad hoc tempus, peractas An. 1736, Bononie in 4. reg. (Alph. 2. plag. 2) edidit idem MANFREDIUS. In hoc opere de obliquitatis eclipticæ mutatione & theoria Solis præclara leguntur, & illa inprimis extra omnem controversiæ aleam ponitur.

§. 54. Anno 1725, HORREBOVIUS edidit *Hafniæ* in 4. (plag. 16, Tab. 1) *Clavem Astronomiæ*, sive *Astronomiæ partem physicam, in qua potissimum in parallaxin Solis inquiritur*. Pendet autem methodus ab hypothese quadam physica. Unde ipsi posthac consultum visum, ut missis omnibus hypothesebus elementa Astronomiæ quoad refractiones, obliquitatem eclipticæ, polique altitudinem nudis observationibus ROEMERI superstrueret. Eo consilio in publicam lucem emisit, An. 1732, *Hafniæ* in 4. (plag. 16, Tab. 1). *Atrium Astronomiæ*, sive *de inveniendis refractionibus, obliquitate eclipticæ, atque elevatione poli* Tractatum. Subjunxit schediasma de arte interpolandi, quod jam antea seorsim publicatum ad scripta analytica referendum. Ceterum in Atrio hoc aperiendo amplissimum usum ostendit Tridui illius *Roemeriani*, quod in Basi Astronomiæ extat (§. 50), & se in posterum uberiorum adhuc ostensurum pollicetur.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Unde non mireris ROEMERUM mortui vicinum ejus editionem, una cum descriptione instrumentorum suorum serio commendasse, & eo fine ejus exemplar nitide descriptum S. R. Selandiæ Episcopo C. W. WORMIO tradidisse.

§. 55. Ad scripta Astronomica referendæ etiam sunt Ephemerides, in quibus loca planetarum eorumque adspæctus, ad singulos anni dies computati, una cum Eclipsium descriptionibus exhibentur. Juxta Tabulas Prutenicas, *Ephemerides* ab An. 1577, ad annum 1590, construxerat JOANNES STADIUS. Juxta eandem ab An. 1581 usque ad annum 1620, computatas *Venetis* excudi curavit JOANNES ANTONIUS MAGINUS, Mathematicum Professor Bononiensis, edito opere *Primi Mobilis*, duodecim libris contenti, in quibus habentur Trigonometria sphericorum & astronomica, gnomonica, geographicaque problemata, magnus trigonometricus canon emendatus & auctus, ac magna primi mobilis Tabula ad decades primorum scrupulorum supputata (*Bononiæ* An. 1609, in fol. Alph. 10, plag. 21), celebris: sed cum eas examinaret DAVIDES ORIGANUS, Mathematicum Professor Francof. ad Viadrum, eas non satis accuratas deprehendit. Quamobrem ipse An. 1599, *Franc. ad Viadrum* in 4. (4 Alph. 12 plag.) novas edidit *Ephemerides*, ab An. 1595 usque ad An. 1630, deinceps continuatas usque

usque ad finem sæculi. Præmissa est Introductio seu compendiaria Ephemeridum enarratio, qua non solum; quæ ad motum primi & secundorum mobilium usumque pleniorē Ephemeridum faciunt, sed & plurima alia chronologica & astrologica præcepta ea facilitate explicantur, ut inde quisque calendaria anniversaria & nativitatū texere possit judicia. Hæ Ephemerides seculo decimo sexto celebratissimæ fuerunt, iisdemque usi sunt calendariographi. Est enim KEPLERUS ab An. 1617 usque ad An. 1636, ex Tabulis suis Rudolphinis supputatas *Lincii* in 4. (3 Alph. 17 plag.) edidisset, inchoatas *Lincii* 1616, & absolutas *Sagani* Silesiæ typis Autoris An. 1630, quibus præmittitur explicatio fundamentorum Ephemeridis & instructio super novæ ejus forma; facile tamen apparet, cur usum Ephemeridum ORIGANI impedire minime potuerint.

§. 56. Cum ORIGANI Ephemerides cum seculo præcedente exspirassent, initio hujus complures de novis computandis consilia agitarunt: quo successu, nostrum jam non est enarrare. Initio hujus sæculi Ephemerides dederat MEZZAVACCHA, quibus deficientibus, manum eidem operi admovit Marchio ANTONIUS GHISLERIUS, cujus *Ephemerides motuum cælestium* ab An. 1721 ad An. 1740, ex Tabulis DE LA HIRE, STREETII & FLAMSTEDII ad Meridianum Bononiæ supputatæ pro-

dierunt *Bononiæ* An. 1720, in 4. (Alph. 3, plag. 9½). Anno autem 1725, ibidem lucem adspexere *Novissimæ Ephemerides motuum cælestium e Cassinianis Tabulis ad meridianum Bononiæ supputatæ*, autoribus EUSTACHIO MANFREDIO Bononiensis Scientiarum Instituti Astronomo & sociis ad usum Instituti. Tomus primus continens Ephemerides ex An. 1726 in An. 1737, constat Alph. 2, plag. 4, Tabb. 3: Tomus II, complectens Ephemerides ex An. 1738 in An. 1750, Alph. 2, plag. 6, Tabb. 7. Id singulare habet MANFREDIUS, quod dederit typos eclipsium solarium, quales per totam Telluris faciem, ubi conspicuæ sunt, apparent, juxta principia projectionis.

§. 57. Singulis annis Parisiis in usum anni sequentis, jussu Academiæ Regiæ scientiarum, ad Meridianum Parisiensem editur Ephemeris sub titulo: *Connoissance des Temps pour l'Année* v. gr. 1739. Ephemeridi subji-ciuntur Tabulæ quardam astronomicæ cum earundem explicatione & usu, una cum Catalogo singulorum membrorum Academiæ Regiæ scientiarum, qualis est mense Novembri ejus, quo editur, anni. Extant in iisdem eclipses Satellitum Jovis, cum in casum observationum astronomicarum potissimum edantur istæ Ephemerides, quæ præterea usum Calendarii præstant.

§. 58. Olim usque ultra dimidium sæculi superioris ad Astronomiam quo-

quoque relata fuit *Astrologia iudicaria*, ars divinandi ex astris: omnes enim & naturæ, & hominum actiones, horumque fata iisdem subjece-
runt Veteres. Magna ea fuit auto-
ritas, exculta & defensa a gravibus
Autoribus, ita ut ipse PTOLEMÆUS
de eadem commentatus fuerit, eam-
que Astronomiæ sociam fecerit (§. 10, cap. 9). Nostro autem ævo,
vanitate ejus agnita, indigna cense-
tur, quæ inter scientias mathemati-
cas referatur: quæ etiam ratio est,
cur nullum eidem in Elementis no-
stris Matheseos universæ fecerimus
locum. Quodsi tamen cui volupe
fuerit Astrologiæ præcepta cognos-
cere, ei satisfaciet SCHÖNERUS in
Opusculo astrologico, quod ex diver-
sorū libris summa cura pro studio-
sorū utilitate collegit & Norimber-
gæ An. 1539, in 4. (plag. 14) edi-
dit. Legitur idem in Operibus, in
quibus primum tenet locum (§. 46).
In his autem proluxa quoque occur-
rit tractatio de judiciis nativitarum,
ut in hac Astrologiæ parte nihil am-

plius desiderari possit. Compendio-
rior est *Tractatus astrologicus de ge-
nethliacorum thematum judiciis*, pro
singulis nati accidentibus, ex vetustis &
optimis quibusque auctoribus collectus
industria HENRICI RANZOVII,
Producis Cimbrici, qui *Francofurti ad
Mœnum* An. 1633, in 8. (Alph. 1,
plag. 2) prodiit, & quo in juventu-
te usus, cum artem illam pernosce-
re gestirem.

§. 59. Superiori adhuc seculo As-
trologiæ maxime deditus fuit JOAN-
NES BAPTISTA MORINUS, Me-
dicinæ Doctor, & Parisiis Regius
Mathematicarum Professor, cujus *Astro-
logia Gallica principiis & rationibus
propriis stabilita*, atque in 26 libros
distributa, prodiit *Hagæ Comitum* An.
1661, in fol. cum proluxa præfatione
apologetica (Alph. 6, plag. 12), qui
vulgo dicitur Astrologiam demon-
strasse. Sed quantum distent a ve-
ris demonstrationibus ejus probatio-
nes, haud difficulter judicabit, qui
genuinæ demonstrationis formam ani-
mo concepit.

C A P U T X.

De Scriptis Chronologicis, Geographicis & Gnomonicis.

§. 1. **D**OCTRINAM temporum pri-
mus in Scientiæ formam
redegit JOSEPHUS SCALIGER, cujus
De emendatione temporum libri primum

An. 1587, lucem adspexerunt, dein-
de quindecim annis elapsis prorsus
immutati denuo prodierunt. Multa
eruditione conscriptum est hoc opus;

sed ad captum Tyronum minime compositum.

§. 2. Præclarum quoque in Chronologia opus est DIONYSII PETAVII *Doctrina Temporum*, Parisiis An. 1627, in fol. primum edita; sed An. 1703, tribus Tomis in fol. reg. (21 Alph. 7 plag.) Antverpiæ recusa. Accessit editioni novæ integer Tomus tertius, in quo continentur *Uranologium sive systema variorum auctorum, qui de Sphæra ac sideribus eorumque motu Græce commentati sunt*, An. 1630, seorsim editum; Libri VIII variarum Dissertationum Chronologiam illustrantium & Libri tres epistolarum. Nimirum in Uranologio continentur GEMINI Elementa Astronomiæ; PTOLEMÆI de Apparentiis inerrantium & significationibus, cui Tractatui subiungitur Calendarium vetus Romanum, cum ortu occasuque stellarum ex OVIDIO, COLUMELLA, PLINIO; ACHILLIS TATII *Istagogæ* ad ARATI Phænomena; Ejusdem fragmenta a VICTORIO edita, quæ cum anterioribus eadem fere continent; HIPPARCHI BITHYNI ad ARATI & EUDOXI Phænomena Enarrationum libri tres; ARATI Genus & Vita; THEODORI GAZÆ liber de mensibus; S. MAXIMI Martyris Computus ecclesiasticus; ISAACI Monachi Computus; S. ANDRÆ Hierosolymitani methodus investigandi Cycli solaris & lunaris, nec non Pascharis. Ceterum paulo durius tractat SCALIGE-

RUM, cui opus suum opposuit.

§. 3. Dogmata SCALIGERI ad faciliorem intelligentiam proposuit SETHUS CALVISIUS, Cantor Lipsiensis, vir longe ultra sortem sui similium cruditus, cujus *Introductio ad Chronologiam* sæpius cum in 4. tum in folio recusa.

§. 4. Triumviris istis jungi meretur JOANNES BAPTISTA RICCIOLUS in *Chronologia Reformata*, quæ Bononiæ An. 1669, in fol. prodiit (Alph. 11, plag. 18).

§. 5. Tyronibus inserviunt DIONYSII PETAVII *Rationarium temporum* (*Moguntia* An. 1646, in 8. 2. Alph. 22 plag.), GUILIELMI BEVEREGII *Institutiones Chronologicae*, quæ cum *Arithmetica Chronologica* recusa Londini An. 1705, in 4. (1 Alph. 11 plag.) & ÆGIDII STRAUCHII *Breviarium Chronologicum* (*Wittebergæ* An. 1664, in 12. 2 Alph. 10 plag.).

§. 6. Ad Chronologiam Historicam spectat opus ISAACI NEWTONI, quod Londini An. 1728, in 4. sub titulo: *The Chronology of ancient Kingdoms amended* (Alph. 2, plag. 4, Tab. 3) prodiit, in quo agitur de Chronologia Græcorum, Egyptiorum, Assyriorum, Babyli-niorum & Medorum, atque Persarum. Traditur etiam in eodem descriptio templi SALOMONIS. Cum nobis jam sit negotium cum Chronologia mathematica; facile patet, Chronologiam NEWTONI non esse hujus

hujus loci. Ne tamen quis miretur, cur ejus nullam injecerimus mentionem, cum NEWTONUS inter Mathematicos summus emineat; eum silentio præterire noluimus. Singulares vero prorsus sibi que proprias de Chronologia antiquorum imperiorum fovet opiniones NEWTONUS, ita ut enormis detur inter ipsum & ceteros Chronologos dissensus. Quamobrem eodem adhuc anno, ARTHURUS BEDFORD idiomate patrio Animadversiones in Chronologiam NEWTONI edebat Londini in 8. (plag. 15). Ostendit autem, NEWTONUM e diametro esse adversum scriptoribus sacris: quæ adeo ratio esse videtur, cur ad eum confutandum adeo properaverit.

§. 7. Ad Calendariographiam spectant, quæ Tomo quinto operum CLAVII habentur (§. 24, cap. 1); SETHI CALVISII *Elenchus Calendarii Gregoriani* (Franc. ad Mæn. An. 1612, in 4. plag. 27); FRANCISCI VIETÆ *Relatio Calendarii vere Gregoriani & Calendarium Gregorianum perpetuum* (§. 25, cap. 1); BLONDELLI *Historia Calendarii Romani* Gallice conscripta (Parif. An. 1682, in 4.); ERHARDI WEIGELII *Bürgerlicher Zeit-Spiegel*, seu speculum temporis civile (Jene An. 1664, in 4. plag. 15); GUILIELMI BONJOUR *Calendarium Romanum* (Roma An. 1701, in fol. 21 plag.) FRANCISCI BLANCHINI *Solutio Problematis paschalis* (Roma An. 1703,

in 4. plag. 13, Tabb. 5); DOMINICE QUARTAIRONII *Responsiones ad assertiones DOMINICI CASSINI pro reformatione Calendarii Gregoriani* (Roma 1703, in 4. plag. 4); EUSTACHII MANFREDII *epistola ad QUARTAIRONIUM, qua CASSINI assertiones 16 vindicantur* (Venetiis An. 1705, in 4. reg. plag. 8); THOMÆ PII MAPHÆI *Opus De Cyclorum Soli - Lunarium inconstantia & emendatione* (Venetiis An. 1706, in 4. 1½ Alph.).

§. 8. *Calendarium Judaicum* ex Hebræorum penetralibus cum versione Latina edidit SEBASTIANUS MÜNSTERUS *Basilea* An. 1527, in 4. (1 Alph. 5 plag.); in quo computus Judeis usitatus exponitur. Rabbi ORI *Calendarium Palestinorum & universorum Judæorum* ex Hebræo sermone in Latinum vertit, & *Francof. ad Mænum* publicavit JACOBUS CHRISTMANNUS, in Academia Heidelbergensi Professor An. 1594, in 4. (plag. 20).

§. 9. Inter veteres Geographos eminet PTOLEMÆUS, cujus *Geographiæ* libri octo, in quibus non modo traduntur ad Geographiam mathematicam spectantia, sed inprimis etiam quæ ad historicam faciunt, *Basilea* prodire plus simplici vice, e. gr. An. 1542, in fol. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 48). Inter compendia vero maxime celebre fuit JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus *de sphaera*, sæpius recusus: in quem

post alios commentatus est CLAVIUS (§. 24, cap. 1).

§. 10. Præstantissimum in hoc scientiarum genere & fere unicum est JOHANNIS BAPTISTÆ RICCIOLI *Geographia & Hydrographia Reformata* (Venetiis An. 1662, in fol. 7 Alph. 17 plag.), ex quo ERHARDUS WEIGELIUS scitu præ cæteris necessaria, in tyronum gratiam, in compendium misit in speculo Terræ, (*Erd-Spiegel*), quod vocat, patrio idiomate conscripto, (Jenæ Anno 1665, in 4. 1 Alph. 3. plag.).

§. 11. Multa habet RICCIOLUS, quæ ad Geographiam proprie non spectant, sed ab eo in eadem pertractantur, ne ea aliunde supponere habeat opus. Unde tyronum conatibus magis respondet *Geographia*, quæ in cursu Mathematico MILLIETI DECHALES extat (§. 4, cap. 1).

§. 12. Ceterum applausum Eruitorum dudum quoque meruit BERNHARDI VARENI *Geographia generalis*, sæpius recusa. Elegans est editio *Cantabrigiense* anni 1672, in 8, (1 Alph. 9 plag. Tabb. 5), juxta quam recusa est *Jenæ* An. 1693, in 8. sed præstantissima omnium prodiit *Cantabrigiæ* An. 1712, in 8. reg. (1 Alph. 15 plag. 9 Tabb. 9) cum Appendice JACOBI JURIN, in qua nova habentur inventa, post obitum scilicet VARENI demum detecta. VARENIØ autem non solum mathematica, verum etiam physica curæ cordique sunt.

§. 13. Laudantur quoque *Elementa Geographia generalis* Cl. J. G. LIEBKNECHT Prof. Gieff. (*Franc.* An. 1712, in 8. 1 Alph. 10 plag. fig. plag. 3½). LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS vero in *Compendio Geographico*, quod idioma te vernaculo in gratiam tyronum *Francos.* An. 1705, in 8. edidit (plag. 10, Tabb. 5) praxin inprimis conficiendi mappas geographicas bene tradit, quamvis demonstrationes omiserit, utpote quæ non sunt ad palatum tyronum.

§. 14. De *Hydrographia*, seu arte navigandi, commendatur Tractatus in Cursu mathematico MILLIETI DECHALES (§. 4, cap. 1). Data opera omnium prolixissime scripsit de eadem GEORGIUS FOURNIER e Societate Jesu in *Hydrographia* Gallice edita *Paris.* An. 1653, in fol. (10 Alph. 10 plag.). Habebatur pro opere præstantissimo in hoc genere: verum postea in Anglia prodire libri complures de arte navigandi, qui præ illo commendari merentur.

§. 15. JACOBUS HODGSON, Matheseos in schola mathematica regia orphanotrophii ad S. Salvatorem conscripsit *Theoriam navigationis demonstratam*, in usum Navigationis docendæ. Eam deinde multo auctiorem sub titulo, *A system of the Mathematicks*, hoc est, systema Matheseos, *Londini* An. 1723, in 4. duobus Voluminibus (Alph. 7, plag. 19½, Tabb. æn. 14, cum figuris mul-

multis ligno incisis & textui insertis) multo auctiorem recudi curavit. In hoc systemate ex Mathesi non traduntur, nisi quæ ad Navigationem rigide demonstrandam faciunt & in ea usum habent. Præmittuntur ex EUCLIDIS Elementis sex prioribus, quæ ad hunc scopum conducunt, una cum Trigonometria plana ex inventis recentiorum plurimum illustrata. Reperies hic porro Trigonometriam sphericam, & doctrinam de projectione spheræ, tam orthographica, quam stereographica prolixè explicatam, quarum hæc ad solvenda problemata trigonometrica & astronomica applicatur. Ex Astronomia docentur, quæcumque usui esse possunt in navigatione, veluti modus computandi appulsus Lunæ ad stellas fixas, & harum per illam occultationes, quarum in determinandis longitudinibus locorum usus est. Inferuntur novæ Tabulæ solares, quarum docetur constructio & usus. Adduntur Tabulæ aliæ, quibus opus est in navigatione. Ipsa autem praxis Navigationis omnis perspicue docetur, exemplis illustratur, & Theoriæ demonstratæ superstruitur. Id nimirum egit Autor, ut ex suo opere Navigationis theoriam & praxin solide addiscere liceat, & quæ ex reliqua Mathesi præsupponuntur aliunde hauriri non demum opus sit.

§. 16. Anno 1715, HENRICUS WILSON, problemata nautica variis modis soluta dedit in Tractatu,

quem sub titulo: *Navigation new modell'd*, hoc est, Navigatio in novam formam redacta, Londini in 8. maj. (Alph. 1, plag. 12) publici juris fecit. Docet problemata ista solvere 1. per constructiones geometricas triangulorum, in locum solutionum trigonometricarum surrogandas, 2. per calculum trigonometricum, & ope peculiarium Tabularum, ut calculo nullo sit opus; 3. per calculum, qui canone sinuum, tangentium, secantium & logarithmorum non habet opus, sed tantummodo paucis quibusdam numeris in Tabulam redactis; 4. ope circini & scalæ geometricæ; tandemque 5. per novam methodum a se inventam, qua problemata Trigonometriæ planæ sine Tabulis ac instrumentis solvuntur. Navigationem primam geometricam, secundam trigonometricam, tertiam arithmeticam, quartam instrumentalem, quintam vero practicam appellat. Nullum adeo dubium est, quin hunc librum multo cum fructu legant, qui artem navigandi addiscere cupiunt, modo ex ceteris partibus Matheseos hausta theoriâ fuerint instructi, quæ hic præsupponitur.

§. 17. Quoniam libri, qui magno numero de navigatione conscripti sunt, vel solam praxin tradunt, vel nimis diffusi sunt, nec levi pretio comparandi; ideo ARCHIBALDUS PATOUN praxin navigationis ex primis principiis demonstratam sub titulo: *A Compleat Treatise of practi-*

cal

cal navigation demonstrated from its first Principles, una cum tabulis omnibus necessariis *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 10, Tab. 1) edidit. Præmittit adeo ea, quæ ex Geometria, Trigonometria plana, Geographia, Astronomia & Chronologia perfecta esse debent ei, qui artem navigandi penitus perspicere voluerit.

§. 18. Eodem anno idiomate itidem Anglico *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 9) a GEORGIO GORDONIO publicata sunt ex MSC. originali *Opera posthuma* JOHANNIS WARDI. In horum parte prima, præmissis principiis Geometriæ & Trigonometriæ planæ, Navigatio explicatur, ubi nova quædam methodus simul proponitur ab Autore inventa; in parte autem secunda Trigonometria sphaerica traditur, ubi simul sphaeræ projectio, tam orthographica, quam stereographica explicatur. Ad demonstrationes illius facilius percipiendas schemata ita construxit, ut casus singuli in solido representari possint; quo artificio etiam usus est JOANNES KEILL in *Trigonometria*, quam EUCLIDIS Elementis ex versione COMMANDINI a se editis subjunxit.

§. 19. Apud Batavos de arte navigandi Tractatum conscripsit WILLEBRORDUS SNELLIUS, qui sub titulo: *Tiphys Batavus, sive Histiodromice de navium cursibus & re navali*, *Lugduni Batavorum* An. 1624,

in 4. Alph. 1, plag. 7) prodiit. De Loxodromia accuratas affert demonstrationes quæ hætenus desiderabantur. Theoriam tradit libro primo; praxin secundo.

§. 20. Inter problemata vexata refertur problema de inveniendâ longitudine maris, quod hætenus multum exercuit ingenia Mathematicorum, irritò successu solutionem ejus aggressorum. Nimis prolixum foret recensere tentamina, quæ publice descripta prostant. Non tamen possumus, quin mentionem injiciamus Autoris cujusdam personati DOROTHEI ALIMARI, Mathematici (si credimus) Veneti, cujus *Methodus longitudinis aut terra, aut mari investiganda, adjectis demonstrationibus & instrumentorum Iconis*ms, *Londini* An. 1715, in 8. (plag. 13, Tab. 4) prodiit. Etsi enim ea non satisfaciât, continentur tamen in hoc Tractatu quæ legi merentur.

§. 21. Pars nauticæ difficillima est manualia nautica, quia reconditam Geometriæ sublimioris notitiam supponit. Agit autem manualia nautica de dispositione velorum, gubernaculi & navis. Equidem Vir & generis nobilitate, & experientia maritima præstans RENAU An. 1689, libellum de ea ediderat; sed mox HUGENIUS principium ejus unum, dein ex intervallo celeberrimus BERNOULLIUS alterum impugnavit; & theoriam aliam substituit in Tentamine novæ theoriæ nauticæ, quæ idio-

idiomate Gallico sub titulo : *Essai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, una cum epistolis nonnullis de eadem materia perscriptis, *Basilæ* An. 1714, in 8. reg. (pag. 15, Tab. 10) prodiit. Theoriam hujus artis ad praxin aptare studuit PITOTUS in libro Gallice conscripto, qui sub titulo: *Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux réduite en Pratique*, *Parisii* in 4. An. 1731, prodiit.

§. 22. Ad Geographiæ potissimum perfectionem tendunt *Observationes Mathematica & Physica in India & China factæ a R. P. FRANCISCO NOEL, e Societate Jesu ab An. 1684, usque ad An. 1708, (Pragæ 1710, in 4. pag. 17, Tab. 2) & Observationes argumenti similis a R. P. FRANCISCO FEUILLE e jussu Regis Christianissimi in regionibus potissimum Australibus factæ, de quibus supra (§. 9, cap. 9). Summæ harum observationum leguntur in Actis Eruditorum Lipsiensibus.*

§. 23. Commemorandi hic denique sunt Autores, qui in magnitudinem & figuram Telluris inquisiverunt. Laudandus hic nobis WILHELMUS BRORDUS SNELLIUS, cujus *Eratosthenes Batavus de Terræ ambitus vera quantitate*, *Lugduni Batavorum* An. 1617, in 4. (Alph. 1, pag. 11½) prodiit. Sed errores quosdam in metiendis angulis, tum & in calculo admisit, quos ipse agnovit: Unde observationes repetiit & in *MSC.* correctas reliquit. Emendationes videlicet *Wolffii Oper. Mathem.* Tom. V.

dere licet in *Dissertatione de magnitudine Terræ* PETRI VAN MUSCHENBROEK, Mathematicum Professor in Academia Ultrajectina, quæ legitur in opere *Dissertationum physicarum experimentalium & geometricarum de magnete, tuborum capillarum vitrearumque speculorum attractione, magnitudine Terræ, coherencia corporum firmorum*, *Lugduni Batavorum* An. 1729, in 4. reg. edito p. 354, & seqq.

§. 24. In Gallia feliciori successu laborem hunc exantlatus est PICARDUS, postea continuatus a CASSINO. Mensurationem PICARDI videre licet in Tractatu, quem ex sermone Gallico in Anglicum transtulit RICHARDUS WALLER & *Londini* sub titulo: *The Measure of the Earth* 1688, (pag. 6, Tab. 4), edidit, tum in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum Parisinæ ab An. 1666, usque ad An. 1699, Tom. 7, *Cassinianam* vero in Commentariis An. 1718.

§. 25. Quoniam per mensurationes *Cassinianas* alia prodibat figura Telluris, quam per demonstrationes NEWTONI atque HUGENII; ideo jussu Regis Christianissimi DE MAUPERTUIS cum Sociis, summo cum studio & plusquam Herculeo labore, gradum Meridiani prope circulum polarem dimensus est aliasque observationes huic instituto inservientes instituit. Legatur Tractatus, quem *Parisii* An. 1738, in 8. edidit (pag. 13, Tab. 10). Observationibus hisce exactis-

exactissimis figura Telluris confirmatur *Newtoniana*, & *Hugeniana*. Constat jussu Regis Christianissimi eodem fine missos esse Mathematicos in regnum Peruvianum, qui ubi redierint, cum publico dubio procul communicabunt absque mora suas quoque observationes.

§. 26. Theoriam atque praxin Gnomonicam more veterum rigidissime, sed adeo intricate demonstravit CHRISTOPHORUS CLAVIUS (§. 24, cap. 1) ut vix credibile sit, ullum unquam ejus demonstrationes omnes perlegisse. Faciliores vero exhibent DECHALES atque OZANAM in cursibus (§. 4, 7, cap. 1).

§. 27. Demonstrationes quoque affert GUARINUS GUARINI in parte posteriore *Mathematica celestis* (*Mediol.* An. 1683, in fol. 1 Alph. 3 plag.). Pars prior, quæ una cum posteriore prodit (7 Alph. 5 plag.) integram Astronomiam complectitur.

§. 28. Novam methodum horologia solaria magna conficiendi, lineis horariis per calculum determinatis, invenit PICARDUS, quæ in Operibus Mathematicis Academico- rum Gallicorum (§. 31, cap. 1) legitur. Et Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in sua *Gnomonica*, quam patrio sermone *Parisiis* 1683, in 12. reg. publici juris fecit, methodum Geometricam exposuit, ex quibusdam punctis per observationem determinatis lineas horarias ducendi.

§. 29. Anno 1625, EBERHAR-

DUS WELPERUS, Artium Magister, *Argentorati* propriis sumibus typis describi curavit suum de *Gnomonica* tractatum vernaculum in 4. (plag. 8), in quo ex facili fundamento horologia in planis primariis describere docet. Idem fundamentum jam antea perspicue exposuit eodemque in describendis horologiis usus est SEBASTIANUS MUNSTERUS in *Rudimentis Mathematicis*, quorum liber prior prima elementa Geometriæ, posterior omnigenum horologiorum genus delineare docet. (*Basilee* An. 1551, in fol. 2 Alph. 20 plag.).

§. 30. WELPERI *Gnomonica* An. 1672, *Norimb.* in 4. (plag. 21, Fig. plag. 14½) recudi curavit & integra parte secunda de horologiis inclinatis & declinatis, ac figuris Zodiacalibus, arcubusque diurnis, & horis varii generis inscribendis auxit, notisque partem primam illustravit JOH. CHRISTOPHORUS STURMIUS, Math. Prof. Altorfinus. Addidit An. 1681. (*Norimbergæ* in 4. plag. 19, Fig. plag. 9) partem tertiam de horologiis reflexis & portatilibus. Eadem *Gnomonica* cum insigni augmento *Sturmiano* denuo recusa *Norimbergæ* An. 1708, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tab. 35). Accessit vero pars quarta, in qua methodi, *Picardiana* & *Lahiriana*, magna horologia describendi exponuntur (§. 28). In hoc adeo opere plura continentur, quam ullibi in unum volumen con-

congesta reperire licet, ita ut instar omnium esse possit, nisi quis demonstrationes exasciatas praxium desideret, theoriae magis, quam praxi intentus. Appendicis quoque loco adjicitur Tractatus de horologiis automaticis ex Anglico in Germanicum sermonem translatus, quemadmodum jam supra monuimus (§. 26, cap. 6.).

§. 31. Commendandum hic quoque est opus de horologiis majoribus delineandis, methodo universalis, quod debetur J. G. DOPPELMAYERO, Matheseos Professori Norimbergensi, & sub titulo: *Neue und gründliche Anweisung, wie nach einer Universal-Methode grosse Sonnen-Uhren aus einem arithmetischen und geometrischen Fundament zu zeichnen*, Norimbergae An. 1719, in fol. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. 20) prodiit. Quodsi idem cum novissima & auctiori Gnomonica *Welperiana* conjungas, vix est ut quicquam in praxi Gnomonica, sive utilitatem, sive curiositatem spectes, amplius desideres. Ceterum ALEXANDER in eximio de horologiis Tractu egregiam quoque tradit methodum horologia majora solaria accurate in quovis pariete delineandi (§. 26, cap. 6.).

§. 32. Solas praxes tradunt JOHANNES PETERSON STENGEL in *Gnomonica universalis*, idiomate vernaculo (*Ulma* An. 1706, in 8. plag. 18, Tabb. 109) edita, rerum varietate commendanda; GEORGIUS MICHAELIS in *Praxi Gnomonica*

Germanice An. 1701, *Jena* in 8. edita (12 plag. fig. æn. plag. 1½), qui tamen tantum communiora exponit; JOH. ULRICUS MULLER in *Indice horarum infallibili* Germanice itidem *Ulma* An. 1702, in 8. edito (1 Alph. plag. 9, Fig. æn. plag. 9) & HENRICUS COETSIUS in *Horologographia plana* (*Lugd. Batav.* An. 1689, in 4. plag. 12, Tabb. 20), qui tamen inscriptiones signorum & arcuum diurnorum negligit, nec ad horologia portatilia descendit.

§. 33. Anno 1711, *Augustæ Vindelicorum* in 4. (2½ Alph. Tabb. æn. 21½ plag.) prodiit JOHANNIS GAUPPENII *Gnomonica Mechanica universalis*, sermone vernaculo in eorum gratiam conscripta, qui in theoria Mathematica parum versati. Inseruit operi suo Tractatum brevem, quem HENRICUS BIERUM, Architectus militaris, An. 1676, (plag. 4) ediderat, & ejus fundamento mechanice describendi horologia utitur. Rerum varietate commendatur iis, qui variis horologiorum solarium generibus conficiendis delectantur.

§. 34. Eodem fundamento nititur JOHANNES JACOBUS SCHEUBLERUS in libro Germanico, qui sub titulo: *Neue und deutliche Anleitung zur practischen Sonnen-Uhr-Kunst*, Norimbergae An. 1726, in 8. reg. (plag. 14, Tabb. 44) prodiit, & ubi inter alia ornamenta, quibus horologia solaria parietibus inscripta circumscribi possunt, delineat. Alias jam

initio sæculi præteriti CASPARUS UT TENHÖFFER, civis Norimbergensis, Pedem Mechanicum invenit, cujus ope horologia solaria mechanice delinearî possunt. Descriptionis editio altera auctior prodiit Norimbergæ An. 1620, in 4. (plag. 7).

§. 35. Horologiorum solarium omnis generis, præsertim portatiliû descriptionem etiam tradit NICOLAUS BION in operẽ Gallico *De constructione & præcipuis usibus instrumentorum mathematicorum* (Parisiis An. 1709, in 8. reg. 1 Alph. Tabb. 28), quod unicum fere in hoc genere a J. G. DOPPELMAYERO Prof. Math. Noribergensi ex Gallico in Germanicum sermonem verti meruit (Noribergæ An. 1712, in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 28).

§. 36. Commendari quoque merentur Machinæ duæ, quæ pro describendis horologiis solaribus publicavit aliquoties jam citatus IGNATUS GASTON PARDIES (*Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. 2 plag.). In hac editione tertia subjunguntur Elementis Staticæ.

§. 37. Methodum trigonometricam describendis horologia solaria excoluit BERNARDUS GRUBER, S. Ordinis Cisterciensis in Monasterio B. V. Mariæ de Alto Vado Professor, in Collegio Archiepiscopali Pragæ A. L. L. & Philosophiæ Professor, in *Horographia trigonometrica*, seu *Methodo accuratissima arithmetice per sinus & tangentes horologia quævis*

solaria in plano stabili qualitercunque situato, etiam declinante & simul inclinato, facile negotio describendi, & quædam alia, quæ vialia dicuntur, expostis eorundem fundamentis & rationibus, Vetro-Pragæ An. 1718, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 11) edidit. Idem institutum fuit BENEDICTI MARIÆ CASTRONII, Ordinis Prædicatorum ac Panormi Matheos Professoris, qui *Horographiam universalem*, seu *Sciaticorum omnium planorum, gnomonice nova methodo describendorum*, pro quovis horologio sive astronomico, sive Italico, sive Babylonico, sive Judaico doctrinam uniformem atque universalem, sola triangulorum analysi breviter expositam, cum *Isagogicis nonnullis Mathematicarum & triplici Appendice de nautica scientia, de militari Architectura, ac de temporum Janua*, Panormi An. 1728, in fol. (Alph. 4, plag. 10, Tabb. 19) edidit. Temporum Januam vocat Calendarium quoddam perpetuum, Januæ formam præ se ferens, quod a se inventum. Tenendum hic est methodum trigonometricam, quæ & arithmetica dici solet, in Gnomonica præferendam esse geometricæ, cum hæc facilius errori obnoxia fiat, qui per illam evitari potest.

§. 38. Quoniam non cujusvis est per calculum trigonometricum erucere numeros, quibus in describendis horologiis solaribus opus est; ideo JOANNES LUDOVICUS QUADRI, Academiæ Instituti Scientiarum Bononiensis

nienſis adſcriptus idiomate Italico Bononiæ An. 1733, in 4. (Alph. I, plag. 5, Tabb. 6) edidit *Tabulas Gnomonicas delineationi Horologiorum ſciæ-tericorum inſervientes*; quæ conſentiunt cum horologiis Italicis, ſonitu campanæ pulſæ horas indicantibus: ut adeo Italorum tantummodo uſui deſtinentur. Dederat jam ante iſtiusmodi Tabulas in Italia P. ANGELUS MARIA COLOMBONUS & apud Noſtros JO. GAUPPIUS in *Gnomonica mechanica* (§. 33) & BERNARDUS GRUBER in *Horographia trigonometrica* modo laudata (§. 37). Edidit quoque Tabulas Gnomonicas, ſed pro horarum quovis genere, ſub titulo *Deliciarum mathematicarum*, ſermone patrio, una cum brevi deſcriptione praxeos univerſæ Geometriæ & Trigonometriæ tam ſphæricæ, quam planæ, quæſtionibusque & problematibus aſtronomicis chronologicisque ad Calendarium eccleſiaſticum pertinentibus, ope tabularum logarithmicarum facili modo ſolvendis, Romæ An. 1730, in 4. reg. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 14).

§. 39. Hic denique commemorare lubet ADRIANI METII, Med. D. & Matheſeos Profeſſoris in Academia Friſiorum, *Primum mobile aſtronomice, ſciographice, geometricæ & hydrographice nova methodo explicatum*. Prodiit editio nova ab innumeris mendis vendicata & instrumentiſmathematicis aucta a GUILIELMO BLAEU *Amſtelodami* An. 1633, in 4. (Tomus I, Alph. 2. Tom. II, Alph. 1, plag. 12. Tom. III, Alph. 1, plag. 10. Tom. IV, plag. 20). Primo exponitur doctrina Sphærica, Gnomonica & Geographica; ſecundo continetur accurata deſcriptio Aſtrolabii utriuſque & ejus uſus, una cum Trigonometria ſphærica; tertio ſolvuntur problemata primi mobilis per aſtrolabium, Trigonometriam ſphæricam & Tabulas Aſtronicas; quarto denique problemata primi mobilis geometricè delineantur & arithmetice ſolvuntur, atque Tabulæ geographica & hydrographica deſcribuntur, & per eaſdem, tumque per Canones ex ſecantibus conſtatos, Ars navigandi abſolvitur.

CAPUT XI.

De Architectura Civili.

§. I. **I**ntegram Architecturam civilem tradidit VITRUVIUS, qui ſub AUGUSTO floruit, cui de-

cem *De Architectura* libros dedicavit. Optima editio Latina prodiit *Amſtelodami* An. 1649, in fol. (6 Alph.).

Accessere huic editioni novæ castigationes & observationes GUIL. PHILANDRI integræ, DANIELIS BARBARI & CLAUDII SALMASII excerptæ & passim insertæ. Præmittuntur *Elementa Architecturæ* HENRICI WOTTONI, Equitis Angli: subjiuntur *Lexicon Vitruvianum* BERNHARDI BALDI, ejusdem *Scamilli impares Vitruviani*, *De pictura* libri tres LEONIS BAPTISTÆ DE ALBERTIS, *De sculptura* excerpta ex Dialogo POMPONII GAURICI & Commentarius *De sculptura & pictura* LUDOVICI DEMONTIOSII.

§. 2. Reprehendunt in egregio alias opere *Vitruviano*, quod nullum ordinem tenuerit; quod obscure scripserit, nempe judice LEONE BAPTISTA DE ALBERTIS (a) Græcis Latine & Latinis Græce; quod denique multa superflua ac aliena immiscuerit. Hinc PERRAULT, quemadmodum olim suaferat PHILIBERTUS DE L'ORME, regulas Architectonicas Vitruvianas ex opere prolixo excerpfit & in ordinem redactas sub titulo: *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* publici juris fecit (*Amstelodami* An. 1681, in 8. 16½ plag. & fig. æn. plag. 1½). Textum obscurum VITRUVII in versione Germanica, & adjecta singulis capitibus paraphrasi clariorem redidit D. GUALT. H. RIVIVS. Recusa est hæc versio *Basilæ* An. 1614, in fol. (7 Alph. 2

plag.). In paraphrasi seu Commentario, si mavis, more *Vitruviano*, multa aliena admiscuit. Magis commendanda est versio Gallica, quam primum An. 1673, typis describi, sed An. 1684, auctiorem & emendatiorem recudi curavit PERRAULT adjectis notis selectis & figuris ærinitidissime incisis (*Parisiis* in fol. reg. 4 Alph. 5 plag.). Idem PERRAULT opus præclarum de Ordinibus An. 1684, in fol. addidit sub titulo: *Ordonnance des cinq espèces de Colonnes selon la methode des anciens*, in quo præjudicia Architectorum refellit & quod instar supplementi Architecturæ VITRUVII haberi potest, qui doctrinam de Ordinibus imperfectam tradidit.

§. 3. Post VITRUVIUM libros decem *De re edificatoria* edidit LEO BAPTISTA DE ALBERTIS aliquoties recusos & ex idiomate Latino in varias Linguas translatos. Prodiit Latine *Parisiis* An. 1512, in 4. (2 Alph.) & *Florentiæ* An. 1585. Italice lucem adspexit *Venetis* An. 1546, in 8. (1 Alph. 9½ plag.); Gallice An. 1553. Multa habet utilia; sed VITRUVIO, quemadmodum intenderrat, palmam præripere non potuit. Doctrinam de Ordinibus non satis perfectam tradidit.

§. 4. Mox secuti sunt SEBASTIANUS SERLIUS & ANDREAS PALADIUS coætanei, quorum ille septem, hic quatuor *De Architectura* libros

(a) Lib. 6, cap. 1, de re edificatoria pag. 80. & seq.

bros composuit. Architecturæ *Serliane* libri quinque Italice *Venetis* An. 1602, in fol. Germanice, *Basilea* An. 1609, in fol. (4 Alph. 13 plag.) prodire. Quinque tantum ordines cum variis ædificiorum generibus describit; regulas ex VITRUVIO supponit, a quibus recedere religioni duxit. Vid. lib. 3, f. 46, edit. Venetæ. Liber sextus de ædificiis privatis in publicum nondum prodit: Septimum de ædificiis publicis JACOBUS STRADA Latine & Gallice *Francofurti* An. 1575, in fol. imprimi curavit.

§. 5. PALLADIUS hanc laudem meruit, quod splendorem ordinibus ac operibus suis conciliaverit. Libro primo regulas fundamentales Architecturæ tradidit; reliquis varia ædificiorum & operum architectonicorum genera delineavit. Commendatur Architecturæ purioris studiosis. Prodiere libri omnes Italice An. 1575, in fol. recusiano superiore An. 1714, *Venetis* in fol. adjecto ipsius de Antiquitatibus Romanis tractatu. Libros duos priores, GEORGIUS ANDREAS BOECKLER, Germanice vertit & multis annotationibus auxit (*Norimbergæ* 1689, in fol. 1 Alph. 3 plag. Tabb. 88). Idem PALLADIUS scripsit de *Templis Romanis*. (An. 1554, in 8).

§. 6. PHILIBERTUS DE L'ORME, Caroli IX. Consiliarius, Elemosinarius & Architectus An. 1567, *Parisis* in fol. edidit novem *De Architectura* libros idiomate vernaculo.

Architecturæ peritia adco celebris erat, ut ad excitanda palatia Principum ex Gallia in exteras regiones evocaretur.

§. 7. JACOBUS BAROZZIUS VIGNOLA An. 1631, Italice de quinque ordinibus scripsit, cujus liber in varias linguas translatus. Utor ego editione Gallica, quæ sub titulo: *Règles des cinq Ordres d'Architecture de J. B. DE VIGNOLE, avec plusieurs augmentations de MICHEL ANGE BUONAROTI*, cura DURÆI DE CHAMPDORE, *Lugduni Batavorum* An. 1712, in 8. prodit (plag. 9½). Eundem prolixis additamentis locupletavit DAVILER & idiomate Gallico *Parisis* in 4. edidit cum Lexico Architectonico. Mox recusum est opus sub titulo: *Cours d'Architecture, qui comprend les Ordres de VIGNOLE avec des Commentaires, les figures & descriptions des plus beaux bâtimens & de ceux de MICHEL ANGE &c. Amstelodami* An. 1694, in 4. (3 Alph. 20 plag. Tabb. 103, magnam partem textui inserta). LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS Germanice vertit & notis quibusdam auctum, omisso Lexico, *Amstelodami* An. 1699, in 4. (2 Alph.) edidit, figuram plagulis 3½, adjectis ultra eas, quæ in editione Gallica habentur. Prodiit nuper nova editio Gallica *Parisis* in 4. auctior. Laudatur ob facilitatem & perspicuitatem. Unde omnibus fere sese probavit, qui praxi operam dant.

§. 8. VINCENTIUS SCAMOZZI An. 1615, Venetiis sermone patrio edidit librum primum, secundum, tertium, sextum & septimum *Idea Architecturae universalis* in fol. Præstantissima editio est, quæ idiomate Gallico *Lugd. Batav.* An. 1713, in fol. reg. (3 Alph. 5 plag. Tabb. 105, quarum 84 textui insertæ) sub titulo: *Oeuvres d'Architecture de VINCENT SCAMOZZI* prodiit. Liber sextus & tertius Germanice versus sub titulo: *Klärliche Beschreibung der fünf Säulen-Ordnungen und der ganzen Bau-Kunst.* *Norimbergæ* An. 1697, in fol. (2 Alph. 6 plag. Tabb. 85) lucem adspexit. Laudatur, quod Symmetriam unus omnium optime excoluerit, sed intricate scribit.

§. 9. CAROLUS PHILIPPUS DIEUSSART in *Theatro Architecturae civilis*, quod vernaculo sermone *Bambergæ* An. 1697, in fol. reg. (1 Alph. 3 plag. Tabb. 95) prodiit, non modo regulas Architectonicas explicavit, verum etiam Ordines iuxta institutum PALLADII, VIGNOLÆ, SCAMOZZI, PETRI CATANEI, SEBASTIANI SERLII & BRANCÆ inter se comparavit: quod idem excusus est ante ipsum ROL. FREARD DE CHAMBRAY in *Parallelismo Architectonico* Gallice *Parisiis* An. 1650, in fol. publicato. Et postea idem fecit LE BLOND in Libro sub titulo: *Parallele des V. Ordres d'Architecture,* *Parisiis* An. 1710, in 4. edito. Plurimum quoque Architectorum Ordines

inter se confert JOHANNES CHRISTIANUS SEYLER, in *Parallelismo Architectonico* Germanice *Lipsiæ* in fol. edito.

§. 10. FRANCISCUS BLONDEL in *Cursu Architecturae* Gallico (*Parisiis* An. 1698, in fol. reg. 8 Alph. 14 plag. Tabb. 24, cum figuris plurimis textui insertis) parte prima Ordines VITRUVII, VIGNOLÆ, PALLADII & SCAMOZZI explicat; in ceteris quatuor ex omnium Architectorum celeberrimum scriptis concessit, quicquid circa ordinum usum notatu dignum occurrit. Habentur etiam in eodem alia nonnulla ad Architecturam spectantia, v. gr. de fenestris & scalis. Cursus hujus aliquid jam 1675 prodierat. Ea potissimum explicare intendit, quæ ad ornatum ædificiorum faciunt.

§. 11. NICOLAUS GOLDMANNUS, Vratislaviensis, in *Tractatu de Stylo-metris* (*Lugd. Batav.* An. 1661, fol. Lat. & Germ. 9 plag. Tabb. 40) ostendit, quomodo Ordines Architectonici ab ipso ad majorem perfectionis gradum deducti ope peculiarium quorundam instrumentorum facile delineari possint: quorum & constructionem, & usum docet, textui Latino ad latus adjecta versione Germanica. In opere vero Architectonico, quod LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS sub titulo: *Vollständige Anweisung zu der Civil-Bau-Kunst* (*Guelpherbyt* An. 1696, in fol. reg. 2 Alph. 4 plag. Tabb.

Tabb. 74) publici juris fecit, præter Ordinum doctrinam, magna dexteritate tradidit quicquid in VITRUVII, & Architectorum Italorum scriptis atque VILALPANDI Commentario in Prophetam Ezechielem, ex quo se plura didicisse ait, quam ex Architectorum ceterorum omnium scriptis, boni continetur: ita ut hoc opus ceteris omnibus præferatur. Cl. Editor An. 1699, Appendicem sub titulo: *Ausübung der Civil-Bau-Kunst des Goldmanns*, in fol. (1 Alph. 14 plag. Tabb. 19) adjecit, in quibus ex aliis supplet, quæ in eo scitu necessaria desiderantur. Ordinem quoque sextum, quem Germanicum appellat, proponit; sed hæcenus in usum non recepit. Fallitur autem plurimum editor, dum sibi aliisque persuadere vult, GOLDMANNUM regulas Architecturæ demonstrasse & eam in formam scientiæ redegisse. Plura ad operis hujus illustrationem posthac edidit STURMIUS, qui Architecturæ totus erat deditus. Sed de his dicemus mox apertius.

§. 12. DOMINICUS DE ROSSI in *Studio Architectura civilis in ornamentis portarum & fenestrarum, delineatis ex insignioribus Romæ ædificiis* An. 1702, seu potius 1712, Romæ in fol. reg. edito figuris æncis 143, celeberrimorum Architectorum monumenta circa ornatum portarum & fenestrarum representat. *Augustæ Vinelicorum* figuris ad minorem modulum reductis recusum est hoc opus,

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

ut facilius & minori sumtu comparari possit. Plurima tamen habet, quæ imitari non licet, nisi a puritate Architecturæ Græcorum recedere velis.

§. 13. Ad eam perspicendam inservit opus, quod ANTONIUS DESGODETZ, qui ædificia antiqua Romæ ex ruderibus nitidissime delineavit, sub Titulo: *Edifices antiques de Rome* (Parisis An. 1697, in fol. (3 Alph. 17 plag.) edidit.

§. 14. JOHANNES BALTHASAR LAUTERBACH in *Compendio Architecturæ* (Amstelodami An. 1699, in 8. Gall. 2 plag. Tabb. 18) ordines Architectonicos delineandi methodum facillimam proponit.

§. 15. In *Gallia* An. 1728, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 19½, Tabb. 150) prodiit opus architectonicum sub titulo: *Architecture moderne, ou l'Art de bien batir pour toutes sortes de Personnes, tant pour les Maisons des particuliers, que pour les Palais*. Explicantur satis perspicue omnia, quæ ad exstructionem ædificiorum omnis generis scitu necessaria, excepta doctrina de Ordinibus, quæ aliunde nota supponitur. Maximam operis partem complent omnis generis ædificiorum delineationes, quibus doctrina de distributione ædificiorum illustratur, vulgo vel neglecta, vel saltem non nisi levi brachio pertractata. Commendatur etiam Tractatus de Architectura, quem LE MUET in 4. edidit, inventiones quasdam novas continens; sed nobis non visus.

P

§. 16. Ædi-

§. 16. *Ædificia* magnifica, cura PETRI POST Architecti insignis, passim per Bataviam exstructa accurate describuntur tum quoad ichnographiam, tum quoad orthographiam cum externam, tum internam in opere splendido, quod sub titulo: *Les Oeuvres d'Architecture de PIERRE POST*, Lugd. Batav. An. 1715, in fol. reg. (plag. 22, Tabb. 75) prodiit. Orthographiæ externæ & ichnographiæ ædificiorum, quæ in Batavia extruxit PHILIPPUS VINGBOON, Architectus Amstelodamensis, exhibentur in alio opere, quod sub titulo: *Les nouvelles Oeuvres d'Architecture de PHILIPPE VINGBOONS Lugduni Batav.* An. 1715, in fol. reg. (plag. 11, Tabb. 80) lucem adspexit.

§. 17. Villas Veterum, in quibus describendis admodum parvus est VITRUVIUS, idiomate Anglico plenius descripsit ROBERTUS CASTELLUS & sub titulo: *The Villa's of the Ancients illustrated*, Londini suis sumtibus in fol. (Alph. 1, plag. 12, Tabb. 11) edidit. De Amphitheatris vero & præcipue Veronensi libros duos idiomate Italico VERONE 1718, in 12, (plag. 15, Fig. an. 15) edidit SCIPIO MAFFEIUS, in quo non minus ea, quæ ad historiam, quam architecturam eorundem pertinent, exponuntur. Formam minorem elegit autor ob commodiorem usum in rudëribus eorundem perlustrandis.

§. 18. Anno 1721, *Vienne Austrie* in fol. reg. (Alph. 1, plag. 21,

Tabb. 93) prodiit opus splendidissimum JOHANNIS BERNHARDI FISCHERI AB ERLACHEN, S. Casaræ Majestatis Architecti primarii, sub titulo: *Entwurf einer historischen Architectur*, hoc est, Speciminis Architecturæ historicae, sumtibus Autoris, in quo varia exhibentur ædificia, quæ ab antiquis historicis celebrantur, vel hodiernum apud exteras gentes conspiciuntur, æri nitidissime insculpta. Textui Germanico adjicitur versio Gallica, ut exteriorum quoque usui inserviat.

§. 19. In *Opere architectonico* FRANCISCI BORROMINI, Patrum Congregationis Oratorii, quod Romæ est, Architecti, describuntur Oratorium & desque Romanæ P. P. Congregationis Oratorii S. *Philippi Neri*. Prodiit Romæ An. 1725, in fol. (plag. 8, Tabb. 67).

§. 20. In *Schola vero civili Architectura*, quam FERDINANDUS RUGGIERI, Architectus Italus, idiomate patrio Florentiæ An. 1722, in fol. reg. (Tabb. 80) edidit, præmissa præfatione & dedicatione cum indice contentorum, exhibentur ornamenta januarum & fenestrarum cum mensuris, ichnographia, orthographia & sectionibus verticalibus e potioribus Florentiæ ædificiis desumpta, quæ a celeberrimis Italiæ Architectis exstructa esse constat, ita ut nulla per totam Italiam occurrat urbs, quæ ædificiis se magis commendat Florentia,

§. 21. Non

§. 21. Non exiguus est numerus illorum scriptorum, quæ illustrandæ Architecturæ Goldmanniæ causa reliquit LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS & quæ post fata ipsius Augustæ Vindelicorum impensis Chalcographi Augustani JEREMIAE WOLFFII lucem adspexerunt. Eorum argumentum ex ipso titulo comparet, quos hic ex Germanico in Latinum verfos exhibere lubet. *Nimirum* An. 1718, in fol. (plag. 8, Tabb. 11) lucem adspexerunt *Idea & compendium Architecturæ Civilis*, explicationem terminorum technicorum & præcipuarum regularum exhibens; An. 1717, (plag. 17, Tabb. 17) *Officina ornatus architectonici perfecta*, in qua ordines architectonici juxta GOLDMANNUM, cujus insignia in hoc genere merita, describuntur; An. 1730, (plag. 4½, Tabb. 10) *Regula symmetriæ*, eæque in Architectura templi Salomonæi conspicuæ & ab eodem mutuo in nostra opera transumptæ; An. 1718, (plag. 4½, Tabb. 9) *Tractatio de arcuationibus architectonicis triumphalibusque arcibus rite designandis*; An. 1720, (plag. 3, Tabb. 17) *Institutio de interioribus ædificiorum rite ordinandis & disponendis*, ubi etiam de aperturis fenestrarum & januarum, & de caminis, scalis, cœlis conclavium, aulis subdialibus præcepta reperiuntur. Anno eodem (plag. 4½, Tabb. 5) *Institutio Goldmanniana de ornatu architectonico extraordinario*, veluti picturis, quibus ædificia exor-

nantur, statuis & sculpturis, obelificis, encarpis, cornibus Amaltheæ &c. An. 1715, (plag. 4, Tabb. 15) *Institutio de commoda dispositione ædium privatarum & civilium*; An. eodem (plag. 5, Tabb. 8) *De suburbanis & nobilium ædibus in agris*; An. 1718, (plag. 21, Tabb. 35) *De construendis palatiis Principum* ad Architecturæ regulas & genium seculi nostri; An. eodem (plag. 6, Tabb. 13) *De ædificiis ad conventus publicos Provincie rectorum, magistratuum, mercatorum &c. instituendos aptis*; An. eodem (plag. 8, Tabb. 22) *De templis varii generis bene construendis*; An. 1720, (plag. 6½, Tabb. 15) *De ædificiis publicis, quæ cura orphanorum, liberalibus studiis erudiendorum, ob flagitia castigandorum, senum, egrotorum, peregrinorum & victorum custodie destinantur, rite parandis*; An. eodem (plag. 2, Tabb. 5) *De monumentis defunctorum, cenotaphiis, castris doloris &c.* An. eodem (plag. 4½, Tabb. 10) *De machinis hydraulicis, aquæ ductibus, fontibus & cisternis publicis, & tandem* An. 1721, (plag. 2½, Tabb. 4) *De Navium armamentariis & stationibus, itemque partibus rite parandis.* Ceterum huc etiam pertinet Prodigus Architecturæ Goldmannianæ editioni novæ & auctiori præmissus, qui sub titulo: *Vorbereitung zu einer neuen und vermehrten Edition der vollständigen Anweisung zur Civil-Bau-Kunst, Augustæ Vindelicorum* An. 1714, in fol. reg. (plag. 10, Tabb. 29) prodit.

diit. In eo de cognitione Architecto necessaria agit, consilium impertitur, quomodo Princeps efficere possit, ut omnis materia sufficienti copia in promptu habeatur, ædificium publicum describit, in quo materiæ cum machinis & instrumentis asserventur, & denique specimina quardam Architecturæ exhibet, veluti ideam palatii principalis, domus suburbana Ducis Megapolitani & turris alicujus prægrandis.

§. 22. In Anglia GUILIELMUS HALFPENNY Londini An. 1728, in 4. (plag. 3, Tabb. 15) edidit libellum sub titulo: *Magnum in parvo*, seu *The Marrow of Architecture*, hoc est, Medulla Architecturæ. In eo ordines architectonicos juxta PALADIUM una cum arcubus delineare docet.

§. 23. Artem tignariam illustrant DECHALES in cursu (§. 4, cap. 1) JOHANNES WILHELM in *Architectura civili* idiomate Germanico edita Norimbergæ in fol. (5 plag. Tabb. 74) & JOHANNES VOGEL in *Architectura moderna* Germanico itidem idiomate conscripta (Hamburgi An. 1707, in fol. 3 plag. Tabb. 36). In Anglia JACOBUS SMITH edidit Tractatum de Arte tignaria Londini An. 1733, in 8. maj. (plag. 2, Tabb. 41) sub titulo: *The Carpenters Companion*, h. e. Fabrorum lignariorum Comes. Sed non alia habet quam WILHELMUS, nisi quod appendicem de ordinibus delineandis adjecerit.

§. 24. Artem secandi lapides in usum architectonicum, quam primus dedisse creditur PHILIBERTUS DE L'ORME in Architectura (§. 6), docent DECHALES in cursu (§. 4, cap. 1), qui sua ex opere, quod P. DERAN An. 1643 publicavit, præstantissimum in hoc genere, descripsit & DES ARGUES, cujus liber ex Gallico in Germanicum versus sub titulo: *Kunstrichtige und probmäßige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau Kunst*, Norimbergæ An. 1699, in 8. (15 plag. Tabb. 154) prodiit.

§. 25. Quoniam vero Autores isti, si P. DECHALES excipias, omisissis demonstrationibus, tantummodo praxin inculcant, neque etiam hic perfectam dedit Theoriam; ideo hunc defectum supplere conatus est FREZIER in *Theoria & Praxi de Sectione Lapidum*, seu *Tractatu de Stereotomia*, sermone Gallico duobus Tomis Argentorati 1737, & 1738, in 4. maj. edito (Tomus I, Alph. 2, plag. 14, Tabb. 27. Tom. II, Alph. 2, plag. 19½, Tabb. 69). In usum eorum, qui praxi operam navant, ex Tomo secundo excerpti poterant, quæ huc faciunt, aut opus insigne P. DERAN in Linguam Germanicam verti mereretur.

§. 26. Ad Architecturam aquarum spectant libri Italici sequentes: 1. JO. BAPTISTÆ BARATTERI *Architettura d'Acque* (Piacenza An. 1656, in fol. 3 Alph. 6 plag.) 2. CORNELII MEYERI, Batavi, *L'arte di resti-*
tuira

ruire a Roma la tralasciata navigazione del suo Tevere (Roma 1675, in fol. 2 Alph. 3 plag. cum multis figuris textui insertis) & ejusdem Nuovi ritrovamenti (Roma An. 1689, in fol. plag. 8, & 1696, in fol. plag. 12, cum figuris plurimis). 3. DOMINICI GUELMINI della natura de' fiumi Trattato (Bononia An. 1697, in 4. 2 Alph. 2 plag. 15 Tabb.). Ex Meyerilibro insigni plagio sua omnia descripsit Anonymus Gallus in libello Amstelodami An. 1696, in reg. 8. edito (6 plag. Tabb. 12) sub titulo: *Traité des moyens de rendre les Rivières navigables*. Quoniam vero Theoria loco est, quod ab Italis præsertim de motu aquarum traditum; ideo non alienum a scopo præsentis est injicere mentionem sylloges scriptorum de motu aquarum, quæ sub titulo: *Raccolta d'Autori, che trattano del moto dell' Aque*, Tomis tribus in 4. maj. Florentiæ An. 1723, (Alph. 9, plag. 6, Tabb. 44, cum multis figuris textui insertis) prodiit.

§. 27. Ad Architecturam aquarum referri quoque potest Tractatus de pontibus & aggeribus & dissertatio de erismatis, fornicibus, pilis & anteridibus pontium HENRICI GAUTIER, Architecti & Inspectoris viarum regiarum, pontium & aggerum in Gallia. Prodiit ille sub titulo: *Traité des ponts & chaussées*, Parisiis An. 1716, in 8. (plag. 14, Tabb. 26); hæc vero sub titulo: *Dissertation sur les Culées, voutoirs, piles &*

poussées des Ponts. Habemus ab eodem autore Tractatum de viis muniendis sub titulo: *Traité de la Construction des Chemins*, (Parisiis An. 1716, in 8. (plag. 8, Tabb. 5) editum.

§. 28. De Architectura navali sermone Anglico commentatus est WILHELMUS SUTHERLAND, cujus quinque tentamina huc spectantia sub titulo: *The Shipbuilders Assistant, or Some Essays towards compleating the Art of Marine Architecture*, Londini An. 1711, in 4. (Alph. 1, Tabb. 13) lucem adspexerunt. Inprimis autem hanc Architecturæ partem tradidit Anonymus in Arte extruendi naves & earum constructionem perficiendi, quæ Amstelodami sub titulo: *L'Art de bâtir les Vaisseaux*, in 4. (Alph. 1, plag. 5½, Tabb. 147, quarum 35 textui inseruntur) edita.

§. 29. Geometriam practicam ad Architecturam civilem applicatam addiscere licet ex opere Anglico, quod sub titulo: *Practical Geometry applied to the useful Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration*, Londini 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. 40) edidit BATTY LANGLEY. Eodem instituto inservit *Architectura practica*, quam BULLET, Architectus Regius, An. 1691, in 8. maj. (Alph. 4, plag. 4) Parisi publici juris fecit.

§. 30. In Dictionario Architectonico, quod Londini 1734, in 8. reg. (Alph. 2, plag. 18, Tabb. 33) sub titulo: *The Builder's Dictionary* pro-

diit, non modo termini explicantur, verum etiam ex Architectorum celebrium scriptis excerpuntur, quæ res ipsas vocabulis denotatas concernunt. Unde non modo usui est Anglis, verum etiam exteris usui esse potest.

Ceterum nullam hic mentionem facimus scientiæ Architectorum militarium de BELIDOR, in qua multa habentur ad Architecturam spectantia singularia, quæ alibi frustra quæsieris, quia de hoc libro dicemus capite 13.

C A P U T XII.

De Pyrotechnia.

§. 1. **I**Nter nostros, qui Pyrotechniæ operam dant, maximi fiunt CASIMIRUS SIMIENOWITZ, Polonus, JOHANNES SIGISMUNDUS BUCHNERUS & ERNESTUS BRAUNIVS. Illius opus a THOMA LEONHARDO BEEREN ex Latino idiomate in Germanicum translatum & a DANIELE ELRICH integra parte secunda auctum prodiit *Francofurti ad Mænum* An. 1676, in fol. sub titulo: *Vollkommene Büchsen-Meisterey-Kunst*. Ex eo sua plerumque descripsit DECHALÈS in *Cursu* (§. 4, cap. 1). Istius *Theoria & praxis Artilleriæ* Germanico idiomate *Norimbergæ* An. 1685, in fol. (2 Alph. 18 plag. Tabb. 53) Hujus denique *Novissimum Fundamentum & praxis Artilleriæ* eodem sermone conscriptum *Dantisci* An. 1687, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tabb. 60) lucem adspexit. Ceterum Autores isti non tantum de iis agunt, quæ in bello usui sunt, sed ignium quoque festivorum rationem exponunt.

§. 2. MICHAEL MIETH in *Artilleria recentiori praxi* lingua nobis vernacula conscripta (*Francof. An.* 1684, in fol. 3 Alph. 10 plag. Tabb. 60) tormentorum & mortariorum descriptionem omnium exactissimam dedit & ignium nocivorum rationem declaravit, festivis omiſsis. Atque hi Autores abunde satisfaciunt iis ipsis, qui Pyrotechniæ data opera incumbunt.

§. 3. Inter Gallos eminet SURIRÆUS DE S. REMIGIO, cujus Commentarii Pyrotechnici (*Mémoires d'Artillerie*) accuratam descriptionem continent omnium machinarum & instrumentorum bellicorum hodie usitatorum, una cum rebus aliis eo pertinentibus. Optima editio est *Parisiensis* An. 1707, in 4. rég. (4. Alph. 17 plag. Tabb. 196), quæ ceteris quoque longe auctior.

§. 4. Ob peritiam bellicam celeberrimus COEHORNIUS sermone Batavo de *Artilleria* libellum brevem, sed

fed autore suo dignum, conscripsit, qui suppresso ejus nomine in Germanicum translatus sub titulo : *Der gründliche Unterricht von der Artillerie, Hamburgi* An. 1699, in 8. (10 plag. Tabb. 23) prodiit.

§. 5. Tyronum usui servit Fabrica *Vulcani*, quam *Eques de S. Juliano* (*Chevalier de SAINT JULIEN*) *Hage* An. 1706, in reg. 8. (10 plag.) edidit. Titulus libri : *La Forge de Vulcain, ou l'Appareil des Machines de Guerre*.

§. 6. An. 1713, idiomate vernaculo prodiit Compendium pyrotechnicum, Pyrotechniæ studiosis commendandum, sub titulo : *Gründlicher Unterricht von der Theoria und Praxi der heutigen Büchsenmeisterei, Francofurti* An. 1713, in 8. (2 Alph. 4 plag. 29 Tabb.). Si titulo fidem habemus, lingua Gallica ipsum conscripsit *Eques de S. JULIANO* modo laudatus, & inde in Germanicam transtulit *AUGUSTINUS BRAND*. Sed diversum non modo est a Fabrica *Vulcani* paulo antelaudata; verum etiam partem primam integram verbotenus ex *MIETHII* Artilleria descriptam reperio, quod quomodo in versione libri a Gallo Gallice conscripti accidere potuerit, non satis apparet.

§. 7. Aliud compendium, sed minoris pretii, ante dedit *GEORGIUS ANDREAS BOECKLER* Tom. III, & IV, *Manualis Architectura militaris* (*Francof. & Lips.* An. 1689, in 16, Tom. III, 4 plag. Tabb. 11, & Tom. IV, 10 plag. Tabb. 34). Cum tamen *COEHORNIUS*, *Eques de S. JULIANO* & *BRANDIUS* tantum tradant, quæ usui bellico inserviunt; *BOECKLERUS* quoque de ignibus festivis tractat.

§. 8. Ceterum huc etiam referri debet *BLONDELLI* Tractatus de bombis jaciendis, qui sub titulo : *L'Art de jeter les Bombes, Parisiis* An. 1683, in 4. prodiit & in Germanicam linguam translatus *Sulzbachi* An. 1686, in 8. recusus. Scriptum Mathematico dignum. Huic affine est scriptum, quod sub titulo : *Le Bombardier François, de BELIDOR, Parisiis* editum, *Amstelodami* recusum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 8), in quo simul praxis Pyrotechniæ concinna perspicuitate exponitur. Pertinet huc etiam *F. E. Comititis de HERBERSTEIN Cyclodiatomia*, qua pro rei tormentariæ incremento motum ac tempus projectorum mensurat & demonstrat. (*Prage* An. 1716, in 8. Alph. 1, 2, Tabb. 20).

CAPUT XIII.

De Architectura Militari.

§. 1. **Q**ui de Architectura militari commentati sunt, vel formas muniendi proprias, vel alienas exponunt.

§. 2. Primum forma muniendi Belgica admodum celebris exitit, de qua scripsit ADAMUS FREYTAG, Polonus, cujus *Architectura militaris Germanice* prodiit *Amstelodami* An. 1665, in fol. (2 Alph. 9 plag. Tabb. 1½ Alph.). Eandem in numeris tantum immutavit GERHARDUS MELDER, cujus *Praxis fortificatoria, Francofurti* An. 1666, in fol. lucem adspexit (plag. 36, Tabb. 8).

§. 3. Minori autem in pretio statim haberi cœpit, cum An. 1645, Comes DE PAGAN suam muniendi formam publicaret *Parisiis* in fol. (1 Alph. 6 plag. Tabb. II) sub titulo: *Les Fortifications du Comte DE PAGAN*, postea in sermonem Germanicum translata. Cum eo in multis convenit HENRICUS RUSIUS *Baro de RUSENSTEIN*, cujus muniendi forma cum *Melderiana* prodiit (§. 2).

§. 4. Eidem quoque agnata est, magis tamen quam *Russiana* ab eadem diffidet, quam BLONDELLUS sub titulo: *Nouvelle manière de fortifier les places, Parisiis* An. 1686, in 12. reg. (5 plag. Tabb. 12) in lucem

emisit, recusam *Hagæ Comitum* (An. 1686, in 8) bonam quidem, sed sumtuosam nimis.

§. 5. Comes DE VAUBAN duas muniendi formas invenit & secundum eas celebria munimenta exstruxit; sed neutram ipsemet descripsit. Priorem optime delineavit Abbas DU FAY, qui eam sub titulo: *La véritable manière de bien fortifier de M. VAUBAN* in lucem publicam emisit. (*Amstelod.* An. 1692, in 12. plag. 9). Posteriores primus descripsit Autor Anonymus in libro Gallico, cujus titulus: *L'Ingénieur François (Paris.* An. 1691, in 8. reg. 13½ plag. Tabb. 33). Utramque STURMIUS, aliquoties jam laudatus, in libro Gallico sub titulo: *Le Véritable VAUBAN* explanavit (*Hagæ Comitum* 1709, in reg. 8. plag. 14, Tabb. 31). Recenset idem regulas Architecturæ militaris fundamentales & principia Arithmeticæ ac Geometriæ practicæ more communi præmittit, ut adeo tyronum instituto inserviat hic liber.

§. 6. COEHORNIUS suam muniendi methodum primum sermone Batavo edidit *Leeuwardia* An. 1685, in fol. (45 plag. Tabb. 14). Postea in sermonem Gallicum translatus prædiit *Hagæ Comitum* An. 1706, in reg. 8. (19 plag.

(19 plag. Tab. 14) sub titulo: *Nouvelle Fortification, tant pour un terrain bas & humide, que sec & élevé.*

§. 7. Singulares muniendi formas, a reliquis prorsus dissidentes, apud Italos dedere ALEXANDER DE GROTE & DONATUS ROSETTI. Prior prodiit Italice *Venetii* An. 1617, (3 Alph. in fol.) anno sequente Monachii Germanice recusa: posterior itidem Italice *Augusta Taurinorum* An. 1678, in fol. (Alph. 2, plag. 5).

§. 8. Similiter apud nostros inusitatam reliquis formam dedit BERNHARDUS SCHEITER in libro Germanico, cui titulus: *Neu vermehrte und verstärkte Vestungs-Bau- und Kriegs-Schule* (Brunswige An. 1672, in fol. 11 Alph. 7 plag. Tab. 24). Eam cum anno sequente oppugnaret CHRISTIANUS NEUBAUER eidemque aliam suam opponeret in libro Germanico, cui titulus: *Wohlmeinende Gedancken, oder Discurs über ausgegangne Fortification des Tit. Herrn JOH. BERNHARD SCHEITERS* (Coloniae ad Spream in 8.); SCHEITERUS An. 1677, Argentorati in fol. (1 Alph. 2 plag. Tab. 8) *Examen fortificationum* in lucem publicam emisit, in quo *Neubauerianam* oppugnat, suam defendit, aliamque novam superaddit. NEUBAUERUS autem An. 1679; suam in *vera praxi Architecturae militaris* (Stargardiae An. 1679, in fol. plag. 19, Tab. 8) uberiorius exposuit.

§. 9. ERNESTUS FRIDERICUS *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. V.

DE BORGS DORF novas muniendi methodos publicavit cum in Munimento inexpugnabili, cui titulus: *Unüberwindliche Festung* (Ulmae An. 1682, in 8. plag. 7, Tab. 8), tum in scripto altero, cui titulus: *Die befestigte Stütze eines Fürstenthums, oder neu erfundene Defension wieder das sonst Welt bezwingende Canoniren, Bombardiren und Miniren.* (Norimbergae An. 1687, in 8. cum aliquot figuris).

§. 10. GEORGIUS RIMPLERUS in libello Germanico, cui titulus: *Die bevestigte Festung* (Francofurti An. 1674, in 12. plag. 16) haecenus usitatas muniendi formas omnes rejicit, tanquam principii spuris nitentes, & axiomata prorsus nova substituit: quibus tamen convenientem muniendi formam ipse non delineat. Nemo autem magis in ea delineanda desudavit, quam Cl. STURMIUS in libello, cui titulus: *Entdeckung der unstreitig allerbesten Manier zu bevestigen* (Francof. ad Oderam An. 1704, in 8. plag. 12, Tab. 9). Alias quoque eandem operam sumsit DANIEL SUTTINGER in scripto Germanico *Dresdae* in fol. edito (plag. 14, & 9½ plag. fig.).

§. 11. Scripta RIMPLERI admodum rara annotationibus & schematicis, quæ desiderabantur, illustrata; additis nonnullis aliis, *Dresdae* in 4. An. 1724, (Alph. 3, plag. 9, Tab. 10) recudi curavit LUDOVICUS ANDREAS HERLIN, qui

Q

STUR-

STURMII de RIMPLERI inventis
judicium parum probat.

§. 12. RIMPLERI principia pro-
bat J. H. LANDSBERGIUS, Ger-
manus, Statuum Belgii fœderati Ar-
chitectus militaris primarius, & iis-
dem consonam muniendi formam de-
lineat: cum tamen non ex asse ipsi
satisfaciat, novam, quandam aliam
substituit, in libro Gallico, cui titu-
lus: *Nouvelle manière de fortifier les
places* (*Haga Comitum*, An. 1712, in
4. plag. 11, Tabb. 8).

§. 13. Idem laudatus LANDS-
BERGIUS, una cum aliis Architectis
militaribus peritis, valde probat
Architecturam militarem, quam DA-
NIEL SPECKLE, Architectus Ar-
gentoratenfis, jam An. 1589, in fol.
(2 Alph. 10. plag. Tabb. 36) publici
juris fecit. Hinc etiam factum est,
ut præclarum in hoc genere opus
Dresdæ An. 1705, in fol. fuerit recu-
sum (2 Alph. 12 plag. Tabb. 24).

§. 14. Sunt vero adhuc plures in-
ter nostros, qui singulares muniendi
formas dedere, attentione Archi-
tectorum, militarium non indignas.
Huc refero JOHANNEM FRANCIS-
CUM GRIENDEL AB AACH, qui
septem muniendi formis, utut eidem
fundamento superstructis, inclauit
(*Norimbergæ* An. 1683, in fol. plag.
14, Fig. plag. 15), CHRISTOPHO-
RUM HEER, qui in *Theoria & praxi
Artis muniendi* (*Francos.* An. 1689,
in 4. plag. 16, Tabb. 30) elegantes
dedit sibi que proprias constructio-

nes; in *Speculo vero Artis muniendi*
(*Lipsiæ* An. 1694, in 4. plag. 17,
Tabb. 31) præterea varia munimen-
ta celebria Europæ describit, &
CHRISTOPHORUM HEIDENMANN,
cujus *Architectura militaris* una pro-
diit *Monachii* An. 1664, in fol. (1
Alph. 22 plag. 27, & fig. plag.) al-
tera ibidem An. 1673, in fol. (plag.
10, & Fig. plag. 14).

§. 15. Nec forte e re esset WIL-
HELMI DILICHII *Peribologiam*
(*Francosurti* An. 1640, in fol. 2 Alph.
2 plag. Tabb. 409, seu 9 Alph. 11
plag.) in scenam adducere, quoniam
Architecturæ militaris periti multa ad
praxin proficua in ea reperient. Im-
mo si verum fateri fas est, in hoc
autore occurrunt, quæ dudum post-
hac in Gallia tanquam nova inventa
prodita fuerunt. Unde melius de eo
judicium ferendum, quam tulit DE-
CHALES in Tractatu de illustribus
Mathematicis Tomo I, Mundi Ma-
thematici (§. 4, cap. 1). Idem quo-
que edidit *Scholam militarem* (*Francos.*
ad Mæn. An. 1689, in fol. 10
Alph. 13 plag. cum ingenti numero
figurarum partim æri, partim ligno
incisarum), in qua omnia ad bellum
tam veterum, quam nostris moribus
necessaria describuntur & illustrantur.

§. 16. In eadem scena mimi vi-
ces adimplebit WENDELINUS SCHILD-
KNECHT, qui muniendi formam Ba-
tavam stylo-histrionico describit (*Ste-
tini* An. 1652, in fol. plag. 129, &
fig. plag. 20½).

§. 17. Eclecticam quandam muniendi formam ex ANTONII DE VILLE, Comitum DE PAGAN & VAUBAN methodis deductam proposuit Autor Anonymus in libro, cui titulus: *Nouvelle manière de fortifier les places, tirée des méthodes du Chevalier DE VILLE &c.* (Amstelodami An. 1689, in reg. 12 plag. 10 Tabb. 15), qui regulas Architecturæ militaris bene explicat, simulque ideam exhibet, quomodo diversorum Architectorum muniendi formas una ad praxin transferre liceat. ANTONII DE VILLE *Ars muniendi* prodiit Amstelodami An. 1675, recusa juxta editionem Parisinam An. 1672, in 8. (1 Alph. 3 plag. cum figuris multis partim textui insertis, partim seorsim excusis). Multa hic distincte exponuntur, quæ alibi vel omittuntur, vel strictim proponuntur.

§. 18. MATTHIAS DOEGEN in *Architectura militari moderna*, quæ An. 1647, in fol. (Alph. 5, plag. 13, Tabb. 78), Latina lingua prodiit, formam equidem muniendi Batavam nonnisi describit, quæ illo tempore usitatissima erat; multa tamen lectu digna habet iis præsertim, qui in extructione munimentorum scitu necessaria nosse desiderant. Regulas, quas tradit, exemplis veris celebrium tunc temporis per Europam munimentorum illustrat, calculos, ubi iis opus est, perspicue explicat, de figurarum irregularium fortificatione experientia confirmata tradit,

modumque munimenta oppugnandi & defendendi declarat. Singula variis historiis tam veteribus, quam novis confirmat. Partem Architecturæ militaris, quæ de locis muniendis agit, *Hercotectonicen*; alteram vero, quæ de munimentis oppugnandis & defendendis tractat, *Areotectonicen* vocat. Et hujus partem oppugnatoriam *Poliorecteticen*; repugnatoriam vero *Antipoliorecteticen* appellat.

§. 19. BONAUTUS LORINUS; Nobilis Florentinus, cujus *De Architectura militari* Libri quinque a DAVIDE WORMBSER ex Italico in Germanicum versi *Francofurti ad Mœnum* An. 1607, in fol. prodierunt, multa habet, quæ etiam in Architectura civili usui sunt, & libro quinto Mechanicam practicam tradit, variaque instrumenta & machinas varias describit.

§. 20. DONATUM ROSETTI singularem quandam muniendi methodum invenisse, quæ a ceteris prorsus diffidet, eandemque sub titulo: *Fortificazione à rovescio* sermone patrio edidisse, supra jam meminimus (§. 7). Ejus ideo mentionem injicere lubet, quia peritis viam ad ulteriora sternit. Unde eidem multum tribuit ALEXANDER CHRISTIANUS LE MAITRE in *Troja vetere & nova* An. 1684, in 8. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 14), ob principia utilia lectu dignissimus.

§. 21. Nec minus singularis ea est, quam pro inexpugnabili vendi-

tat JACOBUS DE LA VERGNE, Architectus militaris Cæsareus primarius, cujus *Nouvelle Fortification imprenable par force d'Armes*, lucem adspexit *Vienne Austria* An. 1700, in 4. (plag. 17, Tab. 1). Ostendit idem, quomodo munimenta ordinaria ad novam istam formam reduci queant. Edidit idem ibidem An. 1698, duos Tractatus alios in 4. quorum unus inscribitur. *De l'utilité d'avoir un bon Ingénieur ou Directeur général des Fortifications dans un Etat &c.* alter vero: *Nouveau exercice du Gabion & de la Fascine*. Constat ille plag. 11, hic itidem plag. 11, & Tabb. 3. Quemadmodum vero illi jungit Tractatum de officiis Architectorum militarium, qui subsunt Directori generali; ita in altero quoque agit de modo oppugnandi munimenti satis perspicue.

§. 22. Hactenus recensitas muniendi formas omnes, sola Landsbergiana excepta; una cum aliis a nobis brevitas studio prætermisissis atque propriis, breviter describit & ad examen revocat, vir in hoc studiorum genere probe versatus sapiusque jam nobis laudatus STURMIUS in *Architectura militari hypothesis & eclectica* (*Norimbergæ* An. 1702, in 8. plag. 10, & fig. plag. 6), ex quo adeo libro brevi temporis spatio cognoscere licet, quæ alias ex vastis voluminibus cum multo sumptuum & temporis dispendio forent conquirenda. In prima editione consideratur orthographia munimento-

rum. Hic vero defectus suppletur in altera, quæ multo auctior *Norimbergæ* An. 1719, in 4. (Alph. 1, Tabb. 41) prodiit.

§. 23. Novam quoque muniendi methodum dedit ROZARD, Architectus militaris Electoris Baviaræ, quam in libro sub titulo: *Nouvelle Fortification Française, Norimbergæ* in 4. reg. An. 1731, Alph. 1, Tabb. 42) editio describit. In parte altera desiderio aliorum satisfacturus adjecit explicationem trium systematum Comitum DE VAUBAN, qualem ex ipsis munimentis ab eodem extructis hausit, una cum omni praxi offensiva & defensiva, ubi etiam præliorum rationem habet, addens ubivis observationes, quas experientia domestica suggerebat.

§. 24. Restat ut de iis Autoribus dicamus, qui in gratiam Architecturæ militaris studiosorum libros ediderunt. Commendandi hic nobis sunt Don SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO in *Architectura militari*, quæ sub titulo *Ingénieur pratique*, *Bruxellis* An. 1696, in 8. (1 Alph. Tabb. 35) lucem adspexit; Cl. OZANAM, cujus Tractatus de *Architectura militari* (*Traité de Fortification*) *Parisis* An. 1694, in 8. reg. (17 plag. Tabb. 44) prodiit; *Eques* de S. JULIANO supra laudatus, cujus *Architectura militaris* publicata est sermone Gallico, *Hagæ Comitum* An. 1705, in 8. (plag. 11, Tabb. 25). In eundem censum venit

Anto-

Anonymi Architectus militaris Gallicus supra laudatus (§. 5).

§. 25. In vernacula nostra notissimi sunt libri sequentes: 1. GEORGE CONRAD MARTII *Europäischer Ingenieur* (Norimbergæ An. 1696, in 8. 2 Alph. 16 plag. Tabb. 60), qui præter Architecturam militarem etiam Arithmeticam & Geometriam practicam prolixè tradit: 2. JOH. HEINRICI BEHRS *aufs neu verschantzter Turenne oder gründlich- alt und neue Kriegs- Bau- Kunst* (Francofurti An. 1690, in 8. 1 Alph. 16 plag. Tabb. 32): 3. JOHANN SEBASTIAN GRUBERS *Friedens- und Krieges- Schule* (Norimbergæ An. 1697, in 8. 2 Alph. 11½ plag.): 4. Ejusdem *Examen Fortificationum* (Lipsiæ An. 1703, in 8. 1 Alph. 22 plag. Tabb. 19): 5. ejusdem *neuer und gründlicher Unterricht von der heutigen Fortification und Artillerie* (Norimb. 1700, in 8. 1 Alph. 17 plag. 16 Tabb.) aliique.

§. 26. Anno 1722, Bruxellis prodire Principia Architecturæ militaris modernæ (*Les Principes de la Fortification moderne*) Directoris Academiæ militaris Cæsareæ, quæ Bruxellis est, HARTMANNI in reg. (plag. 19, Tabb. 9). Explicat principia Comitissæ de VAUBAN & COEHORNII, ac multus inprimis est in uberius explicanda munimentorum oppugnatione & defensione, quam ab aliis factum: ut hinc addiscere liceat, quomodo munimentorum forma ad examen re-

vocanda, ubi quidem rectum de iis judicium ferre velis.

§. 27. Inprimis autem commendari meretur Anonymi * Institutio Architecturæ militaris, quam sub titulo: *Le parfait Ingénieur François*, Amstelodami An. 1734, in 4. (Alph. 1, plag. 22, Tabb. 42) edidit. Omnem enim artem muniendi secundum triplicem non modo methodum Comitissæ de VAUBAN, verum etiam ERRARDI, SARDII, Equitis de VILLE, Equitis de S. JULIANO, MAROLOISII, BOMBELLI, BLONDELLI, Comitissæ de PAGAN, COEHORNII, SCHEITERI, STURMII aliorumque anonymorum explicat, artem muniendi irregularem reformat, & praxin offensivam ac defensivam consummatam tradit. De STURMII cogitatis parum honorifice sentit, quantuscunque sibi visus fuerit Apollo.

§. 28. Antea celebrabatur liber Gallicus, quem secunda vice multo auctiorem sub titulo: *Les Travaux de Mars ou l'Art de la Guerre*, seu Artis militaris, Parisiis An. 1685, in 8. reg. ediderat ALLAIN MANESSON MALLET tribus tomis. Tomus I, constat Alph. 1, plag. 2, Tabb. 152; Tomus II, plag. 22, Tabb. 111; Tomus III, Alph. 1, plag. 3. Figuræ ipsi textui insertæ sunt & ornatus gratia multa adjiciuntur, quæ ad rem non faciunt, quemadmodum fecit in Geometria practica supra laudata (§. 30, cap. 3). Esti

Q 3

autem

* Abbatis DEIDIER.

autem ab eo tempore Architectura militaris multum subierit mutationis; in primo tamen præsertim ac tertio tomo habentur, quæ non sine fructu leguntur. Editionis primæ versionem Germanicam dedit An. 1672, *Amsstelodami* in 8. reg. excusam sub titulo: MANESSON MALLET *Kriegs-Arbeit*, qui puritatem linguæ Germanicæ ridicule affectabat PHILIPPUS A ZESEN, sed ob insuetum dicendi genus nullius momenti.

§. 29. Regulas fundamentales Architecturæ militaris qui cognoscere avent, iis abunde satisfaciet JOHAN. JACOBUS WERTMULLER in Theatro regularum fundamentalium Architecturæ militaris tam veterum, quam recentiorum, *Schauplatz der alten und neuen Fortifications-Maximen, Francof. ad Men.* An. 1691, in 8. 1 Alph. 20 plag. Tabb. 12.) & in Lapide Lydio Architectorum militarium, *Probiert-Stein der Ingenieur* An. 1685, in 8. 16 plag. Tabb. 4.), tum etiam in *Apologia fortificationis*, in qua Belgicam muniendi formam defendit, quamvis eam aliqua emendatione indigere fateatur (*Francof.* An. 1691, in fol. 1 Alph. 15 plag. & Fig. plag. 16).

§. 30. Quæ in excitatione muni-mentorū observari merentur, docent JOHANNES FAULHABER in *Schola Architectorum militarium (Norimbergæ* An. 1637; in 4.) & HEER in *Praxi Artis muniendi* (§. 14) præter alios, quos antea laudavimus.

Inprimis hic commemorari meretur LAMBERTUS LAMBION in *Praxi Architectonica (der Bau-Practica)* (*Vienna* An. 1696, in 8. plag. 16, & Fig. plag. 1½), ubi multa singularia occurrunt præsertim de cuniculis subterraneis, nisi quod linguæ Germanicæ non satis peritus male scripserit, ut adeo libellus Germanice scriptus in idioma Germanicum verti meretur.

§. 31. De praxi militari tam offensiva, quam defensiva data opera scripsit GOULON in libello Gallico, cui titulus: *Mémoires pour l'attaque & pour la défense d'une Place (Hagæ Comitum* An. 1706, in 8. plag. 13, Tabb. 4) & qui eodem adhuc anno recusus *Weseli* in 8. reg. (plag. 5, Tabb. 4) postea in Germanicum idioma translatus (*Norimb.* An. 1709, in 8. plag. 5½, Tabb. 4).

§. 32. Etsi autem multa utilia dederit, quæ domestica experientia ipsum docuit, non tamen dedit, quæ sufficiunt. Anno autem superiori 1737, *Hagæ Comitum* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 5½, Tabb. 33) prodiiit *Comitis* DE VAUBAN de praxi offensiva & defensiva opus posthumum, sub titulo: *De l'attaque & de la défense des places*, quod observationibus ultra dimidium seculum a se continuatis superstruitur. Composuerat idem in usum Ducis Burgundiæ, cui MSC. dederat, non ea intentione, ut publici juris fieret; sed ut arcani instar asservaretur. Neque adeo facile

facile erat MSC. istud describi, propter Tabulas majores, in quibus Schemata nitidissime delineata erant. Cum in eo candide de singulis mentem suam aperuerit; nullum superesse potest dubium, quin insigni cum fructu legatur ab iis, qui castra sequuntur, vel de praxi offensiva & defensiva judicium sibi sumunt.

§. 33. JOHANNES TEYLER in *Architectura militari* (Rot. 1697, in 4. plag. 8, Tabb. 41) ad Architecturam militarem Algebram applicare coepit, quoad calculum inprimis probabili-um, spem ferendi planum sclopeto vel tormento ad mensuram revocaturus. Aliud vero Specimen Algebrae ad Artem Fortificatoriam applicatae, diversum prorsus a *Teyleriano*, etiam dedit JOH. MATTHIAS HASSIUS, nunc Mathematicum Professor Wittebergenfis, *Lipsiae* An. 1707, in 4. (plag. 3½, Tab. 1).

§. 34. Tandem hic commemorandum est opus, quod in usum Architectorum militarium conscripsit BELIDOR, Commissarius ordinarius Artilleriae, Professor Mathematicum Regius in Scholis eidem destinatis, editum *Parisiis*, mox vero *Hagae Comitum* recusum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. maj. 53) sub titulo: *La Science des Ingénieurs dans la conduite des Travaux de Fortification & d'Architecture civile*. In eo Autor, qui omni studio id agit, ut ad solidam scientiam Architectos militares perducatur, eoque fine in eorum

gratiam Cursum mathematicum jam ante edidit, recusum *Parisiis* An. 1725, in 4. reg. cum 24 Tabulis figuras nitidissime aeri incisas exhibentibus, in quo ea inprimis docentur, quae iisdem scitu necessaria sunt ad finem istum consequendum, non modo ea tradit, quae ex Architectura militari, verum etiam quae ex civili iisdem perspecta esse debent. Traditur hic theoria multorum, quae haecenus in utraque Architectura nudae experientiae fuere superstructa. Videre hoc est ex libro primo atque secundo, quorum isto quae ad muros, hoc autem quae ad fornices pertinent, ex principiis geometricis & mechanicis demonstrat, usus hinc inde demonstrationibus algebraicis. Usui esse potest hoc opus iis, qui ad formam scientiae vere mathematicae utramque Architecturam reducere voluerint ea demonstraturi, quae haecenus experientiae fide sumuntur nondum satis limata. Opus hoc etiam in censum scriptorum de Architectura civili referendum, inter quae eminet, quatenus viam ad ulteriora sternit.

§. 35. Non silentio praetereundus est libellus Germanicus, quem JOHANNES CHRISTOPHORUS GLASERUS *Hala Saxonom* An. 1728, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 6) sub titulo: *Vernünftige Gedancken von der Kriegsbau-Kunst erste Probe* edidit, in quo ostendit in omnibus muniendi formis, quae haecenus prostant, deficere defensionem fossae sufficientem, novamque

vamque proponit, qua huic defectui succurritur. Addit adhuc aliam per Algebram erutam. Plura dare constituerat specimina Architecturæ militaris perficiendæ: sed nescio qui factum, ut a proposito suo destiterit.

§. 36. Artem militarem universam describit GEORGIUS ANDREAS BOECKLER in Schola militari moderna: *Neu vermehrte Kriegs-Schule*, quæ *Francofurti ad Mœnum* An. 1635, in 8. (Alph. 2, plag. 8, cum figuris multis æri incisis) prodiit. Tradit autor ea omnia, quæ in bello usui esse possunt, ita ut etiam jus militare Cæsareum, Suecicum & Batavum libro suo inseruerit, & sub finem in Appendice varia arcana doceat, quæ militibus scitu necessaria.

§. 37. Huc etiam pertinet JOANNIS FRIDERICI A FLEMMING, Regis Poloniarum & Electoris Saxonix Tribuni militum pedestrium, Miles Germanus perfectus, *der vollkom-*

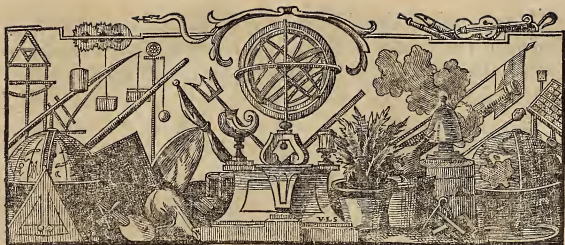
mene Deutsche Soldat, qui *Lipsiæ* An. 1726, in fol. (Alph. 9, plag. 8, Tabb. 64) prodiit, in quo autor omnem scientiam militarem, inprimis quæ ad militem pedestrem spectant, dilucide exponit. In eundem quoque censum referri potest liber Gallice conscriptus, quem sub titulo: *Les Fonctions du Capitaine de Cavalerie & les principales de ses Officiers subalternes*, multo auctiorem *Parisiis* edidit DE BIRAC, recusum *Hagæ* An. 1693, in 8. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 14). Optandum vero foret, ut quis rei militaris peritus, in Mathesi versatus & methodi gnarus Artem militarem in eam formam redigeret, qua nos Pyrotechniam, Architecturam militarem & civilem representavimus, iis simul perlustratis, quæ Autores modo laudati tradiderunt, & ex Autoribus superioribus aliisque peti possunt.

FINIS

Commentationis de præcipuis scriptis mathematicis.



PRÆFATIO



COMMENTATIO DE STUDIO MATHESEOS RECTE INSTITUENDO.

P R Æ F A T I O.



UI Mathesi addiscendæ operam navant, non eundem sibi scopum præfigunt. Elementa nostra Matheseos universæ ita conscripsimus, ut pro multiplici discientium scopo satisfaciant omnibus. Quoniam vero non omnes eadem industria eidem incumbere tenentur, nec omnia addiscenda omnibus; igitur

nobis propositum est docere, quid unicuique conveniat.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

R

Mul-

Multum omnino interest, ut studium Matheſeos rite tractetur, ſiquidem ſine moleſtia ac temporis diſpendio feliciter progredi volueris. Quamobrem noſtrum eſſe duximus, monſtrare viam, qua ſit eundem, ne ad devia declinemus: id quod facillime accidit. Eam igitur, quam in nos ſuſcepimus, de ſtudio mathematico rite inſtituendo tractationem utilitate ſua non deſtitutum iri confiſimus. Quamobrem ſuademus, ut omni attentione eandem legat & relegat, qui Matheſeos addiſcendæ animo ad Elementa noſtra legenda accedit. Quodſi quis ſtudioſe obſervet, quæ præcipimus, eum participem futurum fructus, quem eidem pollicemur, nulli dubitamus. Inſignem vero percipiet voluptatem, ubi ſenſerit voto reſpondere eventum: quem ubi prævidet, eo ipſo accendetur ardor majore induſtria Matheſeos ſtudium continuandi, quam qua idem inchoavit. Noſtrum inprimis eſt amplificare Matheſeos ſtudium, nunquam ſatis commendandum, nunquam prodignitate deprædicandum. Nihil igitur omittendum, quod huc quomodocunque facit. Alienam felicitatem qui noſtram exiſtimamus, id unice intendimus, ut dicamus, ut ſcribamus, quæ proſunt aliis. Quamobrem nec quicquam magis in votis habemus, quam ut omnes, qui ad Matheſin addiſcendam animum appellunt, participes fiant ejus fructus, qui ex ſtudio mathematico percipi poteſt.

COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHeseos
RECTE INSTITUENDO.

CAPUT PRIMUM.

De diversis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur.

§. 1. **T**Res dantur gradus cognitionis humanæ in omni veritatis genere, quos recto facultatum cognoscendi usu acquirere licet. Aut enim in eo acquiescimus, quod veritatem ab aliis propositam intelligamus; aut ulterius progressi id agimus, ut ejusdem etiam convincamur; aut denique operam damus, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio Marte eruere valeamus.

§. 2. Primus gradus acquisitionis omnium facillimus & a ceteris præsupponitur: neque enim veritatis, nisi intellectæ, convincitur animus; sive eum a priori, sive a posteriori convincere volueris; multo minus autem ex iis, quæ cognovisti, alia in-

cognita deducere potueris, nisi ea, quæ cognovisti, satis intellexeris. Gradus secundus difficilius comparatur primo, cum multo ampliorem requirat facultatum usum; nec ad tertium adspirandum, nisi ubi ad secundum ascenderis. Tertium denique omnium difficillime consequi licet, cum amplissimum omnium exigit facultatum usum. Qui in Logica & Psychologia satis fuerint versati veritatem dictorum abunde perspicient: ceteris satisfaciet experientia domestica, ubi diversis hisce gradibus acquirendis non sine successu operam dederint. Elucescet quoque quodammodo veritas ex iis, quæ mox de illis uberius dicentur.

§. 3. Cognitionem gradus primi
R 2 acqui-

acquisiturus, definitiones, theoremata & problematum resolutiones sibi perspecta reddere tenetur, omnis demonstrationibus. Cognitionis secundi gradus compos futurus addere debet demonstrationes. Ad cognitionem tandem tertii gradus perventurus, in rem præsentem veniat necesse est, & ex iis, quæ ipsi cognita & perspecta sunt, acquisito cum secundo gradu facultatum usu, erueri studeat opus est sibi nondum nota: quod quomodo fiat, posthac indigebimus, quantum præsentis instituti ratio permittit. Neque enim nobis jam propositum est explicare Artem inveniendi, quæ legitimum facultatum usum in eliciendis incognitis ex cognitis distincte docet.

§. 4. Theoremata & problemata eorumque resolutiones non intelliguntur nisi per definitiones terminorum, qui in iisdem occurrunt. Incipiendum igitur est a definitionibus, quæ ideo propositionibus præmittuntur; vel omnes simul, quemadmodum in Arithmetica & Geometria fecimus; vel eo saltem loco, ubi occurrunt propositiones, quæ per eas intelligendæ, quemadmodum in reliquis Matheseos partibus non sine ratione factum esse apparet.

§. 5. Ad definitiones intelligendas afferenda est attentio, sub initium præsertim molesta, adeoque omni modo excitanda & fovenda. Conducit huc, si definitiones exemplis, veluti in Arithmetica numeris, illus-

trentur, & in Geometria, ad figuram oculis præsentem applicentur. Ita enim facilius intelliguntur; ut molestia vanescat, quæ attentionis conservandæ difficultatem parit. Ita definitio similitudinis illustratur exemplis duorum horologiorum, & duorum ædificiorum, quæ in scholio definitioni adjecto in medium attulimus (§. 27. *Arith.*). Definitionem partis aliquotæ illustramus exemplo lineæ in quatuor partes æquales divisæ, cum enim pars una quater sumta lineam integram adæquet, erit ea pars aliquota (§. 30. *Arithm.*). Ita, in ipsa Arithmetica, definitionem numeri quadrati & radice quadratæ numeris adjectis illustravimus, ut tali exemplo non sit opus. Cum definitiones in Geometria retulerimus ad figuras; me tacente apparet, quomodo ad eas applicari possint, veluti dicendo in definitione trianguli æquilateri (§. 88. *Geom.*), quod sit $AB=BC=CA$ (*Tab. I. Fig. 16*); perinde ac si ratio cinio ostendi deberet, figuram, quæ oculis subjicitur, esse triangulum æquicrurum. Sensus nimirum, aut imaginatio, quæ sensu antea percepta denuo præsentia sistit, attentionem in objectum trahit, cujus idea exhibet, quæ in definitione continentur; quo ipso & attentio excitatur & conservatur: cumque definitionem a nobis intelligi nobis jam conscii simus, molestia evanescit, quam termini non satis intellecti primum nobis objiciebant, immo in voluptatem abit, quæ ardorem

ardorem dicendi accendit & inflammat, prout casus tulerit.

§. 6. Definitiones eo ordine collocantur, ut termini in anterioribus jam fuerint definiti, qui datam ingrediuntur. Ex. gr. Commensurabilia definiuntur, quod partem aliquotam communem habent, vel eorum unum sit pars aliquota alterius (§. 31. *Arithm.*). Pars vero aliquota jam fuit definita (§. 30. *Arithm.*), immo pars in genere (§. 9. *Arithm.*). Similiter Quadratum definitur per figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam (§. 98. *Geom.*). Sed figura jam ante (§. 34. *Geom.*), figura quadrilatera (§. 97. *Geom.*), figura æquilatera (§. 88. *Geom.*), figura rectangula (§. 97. *Geom.*) fuit definita. Unde consequitur, definitiones legendas esse eo ordine, quo in singulis disciplinis numerantur, & definitiones terminorum esse repetendas, qui datam ingrediuntur. Ita nimirum obtinetur, ut quolibet earum penitus intelligatur, & animo ingenerentur notiones adæquatæ, in quibus nihil latet obscuri, ut intellectus plena luce perfruatur. Ex. gr. ubi definitionem commensurabilium expendere volueris, illustranda primum est exemplis (§. 5), utrumque ejus casum repræsentando in numeris atque lineis. Ad exempla tam arithmetica, quam geometrica applicanda est definitio; ita ut primum contentus sis notionibus confusis, quas conspectus numerorum & figurarum

suggerit. Deinde applicanda ad eadem exempla sunt definitiones partis & partis aliquotæ; ita enim futurum, ut definitionem commensurabilium in utroque quantitatuum genere penitus intelligas, nec quicquam relinquatur obscuri, ubi eadem industria in definitionibus anterioribus fueris versatus. Sint ex. gr. duo numeri 3 & 12. Quoniam 3, sive ternarius, quater sumtus, numerum 12, sive duodenarium adæquat, erit ille hujus pars aliquota (§. 30. *Arithm.*); adeoque numerus unus est pars aliquota alterius. Numeri igitur hi 3 & 12 commensurabiles sunt. Et quoniam 3, 3, 3 & 3 simul faciunt unum numerum, nempe 12 sive duodenarium, adeoque idem sunt cum duodenario; 12 est totum, 3, 3, 3 & 3 sunt ejus partes, consequenter 3 pars una (§. 9. *Arithm.*). Similiter sint duo numeri alii 6 & 8, quorum primus componitur ex 2, 2, & 2, seu binario ter sumto, alter ex 2, 2, 2 & 2, seu binario quater sumto. Habent igitur partem aliquotam communem 2 (§. 30. *Arithm.*), adeoque commensurabiles sunt. Et quia 2, 2 & 2 simul sumti idem sunt cum 6, & 2, 2, 2 & 2 simul sumti idem cum 8; in genere etiam patet, esse 2 sive binarium partem ipsorum 6 & 8 (§. 9. *Arithm.*), adeoque communem. Idem etiam in lineis repræsentatur, si linea AB ter transferatur in CD, ita ut sit $CE=EF=FD=AB$. Erit enim AB pars aliquota ipsius CD.

Tab. I.
Fig. I.

R 3

(§. 30.)

Tab. I.
Fig. 2.

(§. 30 *Arithm.*). Unde lineæ AB & CD commensurabiles sunt, & CE = AB intelligitur pars ipsius CD (§. 9. *Arithm.*). Eodem modo patet casus alter, si recta AB concipitur divisa in tres partes æquales, ut sit AC = CD = DB, & EF in quatuor partes æquales EG, GH, HI & IF, ut sit EG = GH = HI = IF ac præterea EG = AC. Erit enim AC pars aliquota communis (§. 30 *Arithm.*), & eadem AC pars utriusque lineæ AB & EF intelligitur, quia AC + CD + DB & recta AB, itemque EG + GH + HI + IF & recta EF sunt una eademque linea (§. 9. *Arithm.*). Unde lineas AB & EF commensurabiles esse liquet.

§. 7. Ne evidentiæ quid desit, probe observandum est, intellectum lucem foenerari debere a sensu, quatenus huic obvia sunt, quæ ille concipere debet; ut, dum sensus suo munere fungitur, intellectus sua veluti sponte fungatur itidem suo, atque ad cooperandum leniter trahatur; quatenus fieri nequit, ut operationes intellectus cessent, dum sensus facit quod suum est, & attentione in hunc conversa, illarum ne quidem conscius esse videaris, operationibus intellectus cum sensuum actionibus perceptione confusa in unum confusis. Eo ipso obtinetur, ut ad rectum intellectus seu facultatis cognoscendi superioris usum adducaris; dum sensu tantummodo, concurrentibus ceteris sua veluti sponte facultatibus cognoscendi inferioribus, imagina-

tione scilicet atque memoria, tibi uti videris: id quod mirifice conducit tyronibus, ut usui intellectus recto absque ulla molestia adfueant. Tyrones enim non adfueti sunt nisi sensuum, imaginationis atque memoriæ usui, quatenus is hæc indivulsas commites habet. Eum vero, qui requiritur, intellectus usum hæcenus non fecerunt. Quamobrem molestum accidit, si a sensu ad operationes intellectus per saltum adducantur.

§. 8. Quamvis adeo levia ac puerilia videantur, quæ de definitionibus rite expendendis inculcavimus (§. 6), ut eadem penitus intelligantur & notionès adæquatæ ab omni obscuritate liberatæ animo insinuentur; principiorum tamen psychologicorum gnarus, quæ in Psychologia præsertim empirica explicavimus, ex indubia experientia derivata, profunditatem in obviis, non sine voluptate, deprehendet. Et ubi attenta mente perlegerit, quæ de usu facultatum, in parte altera Philosophiæ practicæ universalis, ad recte vivendum requisito demonstravimus, fructum inde sperandum facile prævidebit: quod quod quantivis pretii sit, in dubium minime revocabit. Qui vero Logicam nostram perlustravit & inprimis sibi cognitum atque perspectum reddidit, quod de praxi ejus docetur; is abunde intelliget quam necessarius sit hic intellectus usus, de quo in præsentī nobis sermo est. Quodsi ergo in Philosophia veriori hospites contem-

contemnant, quæ nos maximi facimus, & ambages inutiles pronuncient, per quas incedere volumus animum ad Mathematata discenda appellentes; ii haud ægre ferant contradictionem, cum nos æquo animo, non indignabundo, feramus contentum.

§. 9. Quamobrem non piget exemplo etiam geometrico docere, quomodo in perpendendis definitionibus sit procedendum. Sumamus v. gr. definitionem rhombi, quem definimus (§. 99 *Geom.*), quod sit figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Ut cum idea rhombi notio distincta animo infinuatur, nec quicquam in ea relinquatur obscuri; oculos convertamus necesse est in figuram LMNO. Numerentur latera LM, MN, NO & LO, quæ numero quatuorprehenduntur; unde liquet figuram hanc esse quadrilateram (§. 97 *Geom.*). Circino capiatur intervallum LM, idemque successive transferatur ex M in N, ex N in O atque ex O in L; quo ipso patet, latera omnia esse inter se æqualia; atque hinc colligitur, figuram hanc esse æquilateram (§. 88 *Geom.*). Contemplemur jam angulos L, M, N & O, quos obliquos esse patet (§. 66 *Geom.*); unde infertur, figuram eandem esse obliquangulam (§. 97 *Geom.*). Solâ attentione ad ea, quæ oculis usurpamus, omnem ex idea rhombi arcet obscuritatem, nec quicquam in notione distincta relinquit obscuri, quo minus penitus intelligatur. Quodsi de-

finitiones anteriores, in quas definitio rhombi resolvitur, rite applices; iis suppositis familiaribus, notio evadit adequata.

§. 10. Non ignoro in figuris non requiri veritatem, sed sufficere casum, quæ per definitionem inesse debent, ut definitio intelligatur: neque enim demonstrandum esse, quod, in nostro exemplo, figura LMNO sit rhombus; sed docendum potius, qualis esse debeat, ut rhombus dici possit, ubi non intenditur, nisi ut definitio intelligatur. Ita, in casu nostro, sufficit dicere, si figura esse debeat rhombus, requiri ut latera LM, MN, NO & LO, quibus terminatur, sint numero quatuor; ut sit $LM=MN=NO=LO$, seu ut latera hæc singula sint inter se æqualia; ut denique anguli L, M, N & O sint obliqui. Hoc pacto enim constat, quanam figuræ cuidam datæ inesse debeant, ut rhombi nomen eidem tribui possit: id quod sufficit ad definitionem intelligendam. Et ubi hæc noveris atque memoriæ mandaveris, verendum non est, ne rhombum appelles figuram tibi obviam, quæ hoc nomen non meretur: quo sane sine definitio præmittitur. Immo patet, quanam de rhombo sumenda sint, aut sumere liceat, ubi alia de eodem demonstranda, quando ex definitione rhombi deducere volueris, quæ eidem conveniunt: quem alterum esse definitionum finem, non minus ex Logica, quam Geometrarum

rum & recta methodo philosophantium praxi constat. Ipsa etiam definitionum nominalium natura aliud non requirere videtur, quam ut intelligatur, quænam in ea sumantur de definito; cum nondum quæretur, utrum definitio sit possibilis, nec ne, seu utrum detur istiusmodi ens, cui ea insint, quæ in definitione sumuntur; sed de eo tantum quæstio sit, qualia requiramus, ut insint, siquidem id nominis convenire debeat, seu quidnam hoc nomine insignire velimus. Enimvero cum in Mathesi non proponantur definitiones, nisi quæ veræ sunt; ubi, sensuum ope, operationes intellectus elicere & eorundem beneficio, eidem lucem affundere, atque ad rectam definitionum applicationem tyronem manuducere volueris, nil obstat, quo minus tacite supponas, quod deinceps demonstrandum, definitionibus inesse veritatem, hoc est, dari istiusmodi entia, quibus insunt, quæ in definitione nominali sumuntur. Absit itaque, ut tibi persuadeas, nos eorum, quæ in Logica docemus & in philosophando, non tantummodo in universa Mathesi, sancte observamus, oblitos tradere, quæ iisdem contraria sunt. Ecquis vero adeo vesanus erit, qui reprehendat, quod utilitatis insignis gratia, absque ullo præiudicio veritatis, tacite sumatur quod verum est, immo quod sumi necesse est, ubi in primo gradu cognitionis humanæ pedem sistere, nec

ulterius progredi volueris (§. 1).

§. 11. Et si itaque præcepta verioris Logica, quæ nos tradidisse certifumus, inviolabilia existimemus, & methodi adeo sumus tenaces, ut ab iis recedere nefas reputemus; tanta tamen religio minime obstat, quo minus in favorem ejus faciamus, quod eidem promovendæ conducit. Quamobrem, ut finem tam præclarum ex assè consequamur, quem intendimus (§. 7), & sensus omnes ferant suppetias intellectui, quæ ab eodem expectari possunt; id adhuc monendum esse duximus, in exemplis Arithmeticis non arbitrarium esse, quocunque modo numeri scribantur, quibus definitionem illustrare volueris, sed eos potius ita scribendos esse, ut sensui subjiciantur, quæ intellectus concipere tenetur, ut omnis arceatur obscuritas, & notio evadat tam adæquata, quantum per anteriores definitiones permittitur. Dedimus in superioribus exempla, quibus definitionem commensurabilium illustravimus (§. 6). Duo sunt commensurabilium casus. Aut enim numerus minor est pars aliquota majoris, aut uterque numerus partem aliquotam communem habet (§. 31 *Arithm.*). Exemplum casus primi præbent numeri 3 & 12, quorum prior quater sumtus posteriori sit æqualis. Representandus igitur est ternarius tanquam pars duodenarii, definitioni partis convenienter (§. 9 *Arithm.*); & tanquam pars aliquota ejusdem, defi-

definitioni partis aliquotæ conformiter (§. 30 *Arithm.*). Quamobrem non sufficit, duodenarium, sive 12, resolvere in 3, 3, & 3, sed ipsis etiam oculis quasi spectandum exhiberi debet, quod ternarius sit pars duodenarii, & hic consideretur tanquam pars aliquota ejusdem, quatenus ea oculis usurpare licet, quæ definitiones partis, atque partis aliquotæ, tanquam notas continent. Exhibetur autem 3 tanquam pars ternarii, si scribatur $3 + 3 + 3 + 3 = 12$: etenim signum + ostendit quatuor istos ternarios simul sumtos constituere duodenarium, seu numerum, qui idem est cum duodenario. Unde unus intelligitur pars duodenarii (§. 9 *Arithm.*). Et dum apparet, eundem numerum 3 aliquoties, nimirum quater repetitum, numerum 12 adæquare; illum hujus partem aliquotam esse perspicitur (§. 30 *Arith.*). Nimirum, hoc modo, ipsis oculis exhibetur, quod plura, scilicet 3, 3, 3 & 3 sint idem cum uno, scilicet 12, & pars una 3 aliquoties, scilicet hic quater sumta, adæquet totum; quemadmodum volunt definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ. Sola igitur hac scriptione in conspectum adducuntur, quæ in oculos per se minime incurunt, & definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ, instar rei visibilis exhibentur. Dum vero ternarius, sive 3, etiam solitarie scribitur, juxta duodenarium in partes

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

suas aliquotas resolutum, quemadmodum hic factum esse apparet,

$3 \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 12$,
tum ipsis oculis exhibentur 3 & 12 tanquam duo numeri, qui ad se invicem referuntur, & primus 3 repræsentatur tanquam pars aliquota alterius 12; ut nihil insit in definitione commensurabilium, quoad casum primum, quod non pateat conspectui. Immo, hac ipsa scriptione, non minus manifestum est, quomodo, dato quocunque numero, prodeat alius ipsi commensurabilis; nimirum, si numerus quidam, semel positus, deinceps ponatur aliquoties, quoties nempe visum fuerit, & iterato positi sumantur simul tanquam unum: id quod clarius perspicitur, si duo vel tria exempla sibi invicem subscribantur, quemadmodum hic factum vides.

$$3 \quad 3 + 3 = 6$$

$$3 \quad 3 + 3 + 3 = 9$$

$$3 \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

&c. &c. in infinitum.

Ad illustrandum casum alterum, qui in definitione commensurabilium continetur, adduximus exemplum numerorum 6 & 8, qui partem aliquotam communem 2 habent. Quod si ergo singula ut ante repræsentare volueris, numeri ita scribendi sunt

$$2 + 2 + 2 = 6 \quad 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 \quad 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$$

&c.

&c.

in infinitum in infinitum.

Ita nimirum etiam conspiciatur, quomo-

S

do

do numeri commensurabiles in altero casu procreantur, nimirum, si idem quicunque numerus, veluti hic 2, ponitur toties, quoties libuerit, veluti hic ter, quinquies &c. & deinceps adhuc pluries, veluti hic quater, septies &c. ac iterato positi sumantur simul tanquam unum. Hoc pacto, definitio commensurabilium nominalis reducitur ad geneticam, adeoque realem: id quod multiplicem habet usum. Quodsi numeris subijciantur lineæ in tot partes æquales divisæ, quoties idem numerus, repetitur ad constituendum numerum eundem; in continuo jam magis claret, quænam sit vis signi +, quo indigitatur plura coalescere in unum, ut unum sit idem cum multis, quemadmodum vult definitio partium, atque totius. (§. 9 *Arith.*)

§. 12. Quoniam in definitionibus partis, atque totius, relativis, quarum una absque altera intelligi nequit, diversa utique sunt pluralitas eorum quæ ad totum constituendum concurrunt, plurium concretio qua fit unum seu totum constituitur, & inde resultans identitas plurium cum uno; adeoque ubi definitionem penitus intelligere volueris, notionem distinctionis formaturus, opus habes totidem actibus intellectus, quibus pars & totum concipitur, quot definitioni diversa insunt, tanquam totidem notæ. Siquidem sensus suppetias ferre debet intellectui; singulis intellectus operationibus respondere de-

bent singuli actus externi, qui in sensus incurrunt & illas individuas comites habent: id quod in dato casu obtinetur, si numeri, quibus simul sumtis efficitur totum, primum scribantur juxta se invicem absque ullo signo interposito, deinde autem signum + interponatur, tandemque iisdem, hoc signo inter se connexis, adjiciatur signum æqualitatis =, cum nota numerica, qua indigitatur numerus ex iisdem coalescens, veluti in exemplo primo 12, qui ex 3, 3, 3 & 3 in unum coalescentibus resultat. Hac enim successiva scriptione, eo, quem diximus, ordine facta; actu scriptiois primo, determinatur intellectus ad concipiendam pluralitatem ad totum constituendum concurrentium; actu secundo exhibetur concretio in unum, quam cogitare tenemur; & tertio denique repræsentatur plurium cum uno identitas, in quam aciem mentis intendi necesse est. Hoc pacto efficitur, ut nihil sit in intellectu, quod non etiam sit in sensu, & sensus intellectum blandit trahit ad cooperandum, dum operationes intellectus per actus in sensum incurrentes determinantur, adeoque, cum actibus sensus, una ponuntur; modo animo præsens, sis, attentione allata ad singula quæ fiunt. Quodsi ergo in illustrandis definitionibus eam, quam monstramus, viam ingredi volueris; sensus suppetias omnes ferent intellectui, quas ab eo expectare licet.

§. 13. Simile quid obtinet in exemplis geometricis; si singulas determinationes, quæ definitionem ingrediuntur, ita scribere volueris, ut ad figuram oculis subjectam referantur signa, quibus representatur. Dedimus in superioribus exemplum rhombi, qui per definitionem est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Quamobrem si scribas, quemadmodum hic factum esse vides,

$$LM + MN + NO + LO = 4$$

$$LM = MN = NO = LO$$

$$\left. \begin{array}{c} L \\ M \\ N \\ O \end{array} \right\} \text{angulus obliquus}$$

LMNO rhombus;

ipsi sensui obvium est, quomodo ex determinationibus definitionem ingredientibus, seu notis in eadem contentis, colligatur figuram datam esse rhombum. Etenim $LM + MN + NO + LO = 4$ indigitat, figuram datam LMNO quatuor habere latera; adeoque æquilateram esse: $LM = MN = NO = LO$ significat, latera omnia esse inter se æqualia; consequenter figuram datam LMNO esse æquilateram: denique

$$\left. \begin{array}{c} L \\ M \\ N \\ O \end{array} \right\} \text{angulus obliquus,}$$

indigitat singulos figuræ datæ LMNO angulos esse obliquos; consequenter figuram ipsam obliquangulam. Linea

his subducta signum est quo indigitatur, id quod eidem subscribitur, inde inferri, seu per supra scripta determinari; nimirum quod figura oculis subjecta LMNO sit rhombus. Evidens adeo est, ad quamnam successive promovenda sit attentio, ubi rhombum agnoscere, atque ab aliis figuris distinguere volueris. Hoc pacto sensus distinguit, quæ intellectus distinguere tenetur, dum distincte rhombum concipit.

§. 14. Representatio definitionum symbolica, qua oculis conspicienda exhibentur, quæ ab intellectu concipiuntur, eo quidem ordine, quo operationes intellectus eliciuntur, convenit regulis Artis characteristicæ; cujus theoria, hætenus considerata, partem quandam Artis inveniendi absolvit, propterea quod in inveniendo usum multiplicem habet, quemadmodum suo tempore ostendemus, ubi, philosophia ad umbilicum perducta, Artem inveniendi ad eam formam redigemus, qua Logicam exhibuimus. Major enim est Artis characteristicæ usus, quam vulgo creditur; ut adeo consultum sit, quasi aliud agendo mature eidem adflescere. Non loquimur nisi experta, & quæ ex ipsa animæ humanæ natura a priori demonstrare valemus; etsi a præsentī loco alienum sit ipsas demonstrationes afferri, ex principiis nostris psychologicis haud difficulter contextendas, sed Arti inveniendi reservandas.

§. 15. Unicum est, quod hic monuisse sufficiat, silentio minime prætereundum; scilicet, quod ista definitionum symbolica representatio mirifice conducatur ad facilitandam repetitionem, qua eadem memoriæ, absque ulla molestia & mora, insiguntur, & memoria retinentur. Distincte nimirum oculis exhibentur, quæ intellectus distinguere tenetur in definito sibi representando, & eo ordine, quo acius intellectus sese invicem excipere debent. Cognitio non modo symbolica ad intuitivam reducitur, sed ipsa etiam symbolica intuitivæ assimilatur. Nemo autem est qui nesciat, sensu percepta facilius & tenacius memoria retineri, quam quæ sola vi intellectus concipiuntur. Et convenit omnino omnem facere facultatum usum, qui natura nobis concessus est; ac mature adusue fieri juvat, ut eundem ubivis constanter faciamus. Quamobrem & nos per studium mathematicum plura intendimus, quam ut Mathesis sibi sola discatur; quemadmodum faciunt illi, qui contenti sunt ea, quæ docentur in Mathesi, cognita atque perspecta sibi habere.

§. 16. Erit forsitan acutior, qui reprehendet, quod, in illustrandis definitionibus, in methodi leges injurimus, quod in illustrandis definitionibus anterioribus præsupponamus, quæ demum per sequentes patent. Objiciet v. gr. nos, in symbolica partis aliquotæ representatione (veluti

quod $3+3+3+3=12$), supponere, quod perspectæ sint notæ numericæ, quod notum sit signum additionis, quod ipsam additionis notionem habeamus, cum tamen definitio partis aliquotæ præcedat (§. 30 *Arithm.*), definitio additionis demum sequatur (§. 61 *Arithm.*) & notæ numericæ in sequentibus demum (§. 49 *Arithm.*), cum signo additionis (§. 63 *Arithm.*) explicentur. Immo forsitan arguet ipsam additionem præsupponi, quæ demum docetur multo post (§. 96 *Arithm.*). Enimvero quicquid est hujus difficultatis, id protinus omne evanescit, modo attentionem nostram desiderari non patiamur. Etenim nemo ad studium Matheseos, præsertim ad legenda Arithmetica nostra Elementa Latina, accedit adeo rudis, ut notæ numericæ nondum ipsi sint perspectæ, & numerare nesciat. Neque lex numerandi & notæ numericæ explicantur eo fine, ut numerare discamus & notas numericas cognoscamus; sed ut appareat, cur ea numerandi lex sanciat, & cur notis istis utamur, tum etiam quia hypothesis istis opus habemus, tanquam principiis ad demonstrandum ea, quæ sequuntur. Signum additionis quodnam sit, anticipando doceri potest, ubi ejus usus requiritur. Neque hic opus est, ut notio additionis una explicetur: sufficit enim moneri, hoc signo indigari, numeros simul sumi debere, ut constitutur per eos unus. Multo minus

nus autem præsupponenda est additio, cum nemo numerandi peritus nesciat, quomodo numeros exiguos, sive digitos in unitates, siquidem opus est, resolutos connumerare debeat. Accedit, quod nemo facile ad Matheseos studium, præsertim ad Elementa nostra Latina legenda sese conferat, qui Algorithmum numerorum integrorum, saltem additionem & subtractionem, non didicerit. Abunde igitur patet, non præsupponi quæ nondum cognita sunt, sed ex inferius traditis demum haurienda, in definitionibus illustrandis.

§. 17. Propositiones, sive theoremata fuerint, sive problemata, primum exponuntur, dum in Arithmetica ad numeros, in Geometria ad figuras delineatas applicantur: id quod *ἐκθεσις*, sive expositionem, appellarunt veteres, quam propositionibus subjecerunt. Sit ex. gr. Theorema 21 Arithmeticae (§. 181) exponendum, quod ita sese habet. *Si quantitates quascunque per eandem tertiam divides, quoti sunt inter se ut quantitates, quæ dividuntur.* Theorematis hujus expositio hæc est: Sint duo numeri 24 & 12, qui dividuntur per eundem tertium 3; erunt quoti 8, & 4. Dico esse 8 ad 4, ut 24 ad 12. Continet enim 8 bis 4, & 24 itidem bis 12, adeoque numeri proportionales sunt (§. 155 Arithm.). Similiter sit pars prima theorematis 37, in Geometria (§. 233) exponenda, quæ ita se habet:

Si duas lineas parallelas secet transversa, erunt anguli alterni æquales. Expositio talis est: Sint AB & CD duæ ^{Tab. I.} lineæ rectæ, sitque AB parallela ipsi ^{Fig. 4.} CD; erunt anguli γ & ν alterni (§. 68 Geom.). Dico angulum γ esse æqualem angulo ν . Eodem modo exponuntur problemata. Sit ex gr. problema 20 Geometriae (§. 258) cujus hic est tenor: *Per datum punctum parallelam recta data ducere.* Expositio hæc erit: Sit data linea recta RS; sit ^{Tab. I.} que datum punctum V ubicunque ex ^{Fig. 5.} tra eandem lineam. Ducenda est recta quædam alia, quæ transit per punctum V, sitque rectæ alteri RS parallela.

§. 18. Nos, brevitatis gratia, in Arithmetica theoremata ita enunciamus, ut expositionem una contineant; dum quantitates designavimus literis majoribus, tanquam numeros indeterminatos (§. 13 Arith.), in quorum locum facile surrogantur numeri determinati notis numericis expressi, quales etiam hinc inde exhibemus ad latus demonstrationis. Ita theorema 21, de quo modo diximus (§. 17), hoc modo proponitur (§. 181 Arith.). *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C divides; quoti F & G sunt inter se ut A & B.* Constat ex paragrapho præcedente theorema hoc pure sic enunciari: *Si duas quantitates quascunque per eandem tertiam divides, quoti per divisionem prodeuntes erunt inter se, ut quantitates, quæ dividuntur.* Atque adeo liquet, literas majores

A, B, C, F, G nonnisi expositionis gratia esse adjectas, quæ ita sese habet: *Sint duæ quantitates quæcunque, A & B; dividatur quantitas A per quantitatem C, & prodeat quotus F. Dividatur etiam quantitas B per eandem quantitatem C, & prodeat quotus G. Dico esse quotum F ad quotum G, ut quantitatem A ad quantitatem B.* Quodsi jam pro literis substituuntur numeri; nimirum 24 pro A, 12 pro B, 3 pro C, 8 pro F, & denique 4 pro G; habebis expositionem in numeris, quam ante dedimus (§. 17).

§. 19. Similiter in Geometria propositiones retulimus ad figuras æri incisas, ut expositionem una contineant. Ita theorematum 37 pars prima, quam exempli loco adduximus (§. 17), hoc modo proponitur in Geometria (§. 233). *Si duas parallelas AB & CD secet transversa EF, in G & H, erunt anguli alterni y & u æquales.* Quodsi literas omitas, habebis theorema pure enunciatum. Ubi vero oculos in figuram ipsam subjectam convertens, idem ad eandem applies, adhibitis literis, quibus lineæ & anguli in schemate designantur, quemadmodum paulo ante factum est (§. 17); habebis expositionem. Similiter problema 20 (§. 258 *Geom.*) ita enunciatur: *Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere.* Omissis literis V & RS prodit propositio pure enunciata; quæ ad schema applicata, ut ante fecimus (§. 17), dat expositionem.

Tab. I.
Fig. 1.

§. 20. Veteres Geometræ propositionem ab expositione, tanquam duo diversa, a se invicem distinxerunt; atque adeo illam pure enunciarunt, hanc eidem subjecerunt. Hunc morem secutus est CLAVIUS in Elementis EUCLIDIS. Nos expositionem cum propositione conjunximus, non tam quod in unum confundi velimus, quæ diversa sunt; quam ut, brevitatis gratia, quemadmodum jam monuimus (§. 18, 19), una exhiberemus, quæ a lectore separanda sunt; ne in nimiam molem excresceret opus, ac præter necessitatem evaderet sumtuosius.

§. 21. Necesse autem est propositionem pure enunciari, remotis iis, quæ ad expositionem spectant; cum pure enunciata in usum futurum memoriæ sit mandanda; expositio autem adhibenda, ut claritas affundatur notioni complexæ, quæ propositioni respondet, sine qua intelligi nequit, aut saltem non satis intelligitur; quemadmodum nil videmus absque lumine, aut absque lumine sufficiente non satis clare videmus visibile. Non tamen opus est expositionem una memoriæ mandari, cum in applicatione, ratiocinando facta, ejus nullam habeamus rationem; sed sufficiat propositioni per expositionem satis intellectæ adherere, per naturam animæ, sensum claritatis, quatenus fieri potest, ut expositionem addamus, quando exigitur, vel e re esse videtur; qua actu affunditur claritas, cujus, dum nunc obsci-

obscurè percipitur, antea clarè perceptæ memoriâ habemus.

§. 22. Resolutiones problematum arithmeticæ ad exempla, geometricæ ad figurarum constructiones statim sunt transferendæ. Singula, quæ fieri præcipiuntur, suis numeris distinguimus. Numerantur autem eo ordine singula, quo fieri debent. Quamobrem, cum quælibet resolutio tot contineat regulas, quot sunt numeri; lecta prima statim faciendum, quod eadem præcipitur, & progressus ordine fieri debet ad sequentes. Ita nimirum absque ullo negotio facies, quod fuerat faciendum; & dum hoc facis, regulis affundetur claritas, quæ ad totam resolutionem intelligendam sufficit. Quoniam vero in resolutionibus problematum sequentium præcipiuntur, quæ quomodo fieri debeant, docetur in anterioribus; igitur necesse est, ut eo ordine problematum resolutiones tibi familiares reddas, quo numerantur; ne facturus ea, quæ præcipiuntur, incidas in talia, quæ quomodo fieri debeant nondum nosti, nec unquam antea fecisti. Non est, quod excipias, citari in resolutionibus ea, quæ ex anterioribus præsupponuntur; veluti in resolutione problematis, de linea alteri parallela per datum punctum ducenda prima, quod paulo ante exempli loco adduximus (§. 19), problema 17 (§. 216 *Geom.*); de linea perpendiculari ex dato puncto in eam demittenda, & problema 16 (§. 212 *Geom.*);

de linea perpendiculari ex dato in linea data puncto ad eandem erigenda: ita enim labor multiplicatus difficilis redditur, & molestiam parit; quæ, sublata difficultate, prorsus nulla est, ubi jam noveris, quomodo ex puncto dato ad lineam datam perpendicularis sit demittenda, & ex puncto in eadem dato perpendicularis excitanda, ac utrumque facere valeas.

§. 23. Quoniam vero non sufficit problematum resolutiones intelligere, verum etiam habitus comparandus est ea faciendi, quæ fieri debent; habitus autem omnis, nonnisi exercitio, adeoque idem iterato agendo, comparatur; a problemate uno non progrediendum ad alterum, nisi ubi ea, quæ in resolutione præcipiuntur, promptè facere potueris. Hoc enim pacto, nullam senties in difficilioribus difficultatem; nec verendum est, ne molestia fastidium creet; nec progressus destituetur voluptate individua comite, quæ ardorem continuo progrediendi ulterius accendit, alit, & auget. Merentur ea, quæ hic dicuntur, attentionem; hoc enim modo acquiruntur singulares animi doctes, ad præclara nitenti mirifice profuturæ. Sed de his dicemus nonnulla in sequentibus.

§. 24. Enimvero, si quis omnem usum Matheseos facere velit, quem potest, eumque magis præclarum, quam qui in cognitione veritatum mathematicarum consistit; in iis persistere non debet, quæ hæc-

nus docuimus. Superfunt alia adhuc observanda, de quibus ut dicamus, instituti nostri ratio postulat. Nimirum primum; in symbolica representatione theorematis, sicuti in representatione definitionum (§. 11), non perinde est, quocunque modo id fiat; sed id omnino agendum est, ut sensui tanquam diversa exhibeantur, quæ intellectus a se invicem distinguere tenetur, & ut singula ipsa descriptione a se invicem distinguantur, quæ in notione propositioni respondente distinguenda veniunt. Omne theorema in duas resolvitur partes, hypothesein atque thesin; quarum ista exhibentur, quæ de subiecto sumuntur, hac vero exhibetur prædicatum quod, vi illorum quæ sumuntur, de eodem enunciandum, seu, propter ea quæ sumuntur, ponendum. In symbolica igitur representatione theorematis, hypothesis scribenda est a sinistra, thesis vero a dextra. Quodsi hypothesis plura continet; singula quæ sumuntur, sigillatim scribi, & eo, quo sequuntur, ordine sibi invicem subscribi debent; ita ut ipsa descriptione exprimentur eorum ad se invicem relationes, quæ supponuntur. Et idem observandum est in thesi, siquidem plura continet. Exemplis manifestum reddetur, quod obscurius dictum videri poterat, deficiente idea, a qua claritatem suam haurit notio. Sit exempli loco theorema, ad quod ante provocavimus (§. 18). *Si duæ*

quantitates quæcunque per eandem tertiam dividas; quoti sunt inter se ut quantitates divise. Hypothesis theorematis est, quod duæ dentur quantitates; quod eadem dividantur per eandem tertiam; quo facto prodeunt duo quoti: thesis vero, quod hi ipsi quoti eam inter se habeant rationem, quam habent quantitates divise. Quodsi (quemadmodum supra fecimus) quantitates dividendæ exponantur per A & B, dividens per C, quoti vero per F & G, theorema ita representabitur.

*Hypothesis**Thesis*

A & B quantitates
dividende

F: G=A: B.

C dividens communis.
F & G quoti ex divisione
prodeuntes

Idem observandum est in numeris, per quos theorema exponitur.

24 & 12 Numeri 8:4=24:12
dividendi
3 Divisor commun.
8 & 4 Quoti ex divis.
prodeuntes.

Immo, si ab expressione generali obscuritatem arcere volueris, quæ per naturam suam eidem inhæret, non tollendam nisi claritate, quam affundunt singularia; numeros literis, quibus quantitates, numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), designantur, subscribi oportet, eo, quo hic factum esse vides, modo.

A & B Quantitat. F: G=A: B
24 12 dividendæ. 8: 4=24: 12

C Dividens
3 communis.

F & G Quoti ex
8 4 divisi. prod.

Quodsi meris signis representatio
symbolica theorematis constare de-
beat; hoc modo quod intendis asse-
queris.

A (F 24 (8 F: G=A: B
C 3
B (G 12 (4 8: 4=24: 12
C 3

Idem fiet hoc modo :

$\frac{A}{c} = F, \frac{24}{3} = 8$ F: G=A: B
 $\frac{B}{c} = G, \frac{12}{3} = 4$ 8: 4=24: 12

§. 25. Demus etiam exemplum
unum alterumve geometricum. Theo-
rema 37 (§. 233 Geom.) hoc est : Si
duas parallelas secet transversa , qui
prodeunt 1°. anguli alterni æquales sunt,
2°. angulus externus æquatur interno
opposito , 3°. duo interni oppositi sunt
æquales duobus rectis. Hypothesis hæc
est, quod duæ lineæ sint parallelæ,
& quod eadem secentur linea alia
transversa : Thesis autem, quod an-
guli alterni sint æquales ; quod an-
gulus oppositus externus æquetur in-
terno opposito ; quod denique duo
oppositi interni sint æquales duobus
rectis. Illa adeo duas habet partes,
quæ junctim sumtæ eandem consti-
tuunt ; hæc autem tria membra, quæ

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

singula ex eadem hypothese sequun-
tur ; ita ut propositio sit composita
ex tribus , eandem hypothesin ha-
bentibus, & ad tres hæc categori-
cas revocetur : 1°. Anguli alterni in-
tra lineas parallelas sunt æquales ;
2°. Angulus externus, ex lineis pa-
rallelis per transversam sectis ortus,
æqualis est opposito interno ; 3°. Duo
anguli intra lineas parallelas transver-
sa sectas orti sunt æquales duobus
rectis. Quodsi hoc theorema eo,
quem supra diximus (§. 19), modo
explices ; symbolice distincte ita re-
presentatur :

Hypothesis.	Thesis.	Tab. I. Fig. 4.
AB parall. CD	1. $y = u$	
EF secat AB & CD	2. $x = u$	
in G & H	3. $0 + u = 2 R.$	

Theorema 18 (§. 179) pure ita enun-
ciatur : Si in duobus triangulis fuerit
angulus unus unius æqualis angulo uni
alterius, & duo latera comprehendentia
angulum in uno triangulo fuerint sigil-
latim æqualia duobus lateribus compre-
hendentibus angulum in altero triangu-
lo ; erit etiam latus tertium unius æqua-
le lateri tertio alterius, & duo ad idem
anguli reliqui in uno erunt sigillatim
æquales duobus ad idem angulis reliquis
in altero triangulo, & tota triangula
æqualia & similia erunt. Hypothesis
hæc est, accedente expositione, quod in duobus triangulis A C B &
a c b, angulus unus unius A sit æqua-
lis angulo uni alterius a, quod duo
latera A C & A B comprehendentia
angulum A in uno triangulo, sint
sigil-

figillatim æqualia duobus lateribus ac & ab comprehendentibus angulum a in altero triangulo: theſis vero, quod 1^o. latus tertium BC unius fit æquale lateri tertio bc alterius, 2^o. quod angulus C in uno fit æqualis angulo c in altero, 3^o. quod angulus B in uno fit æqualis angulo b in altero, 4^o. quod triangulum ACB fit æquale & ſimile triangulo $a c b$. Propoſitio adeo denuo compoſita eſt, in qua eidem ſubjecto ſub eadem conditione tribuitur multiplex prædicatum. Quodſi theorema hoc ſymbolice repræſentare volueris, ita diſtincte exhibetur ſcriptum:

<i>Hypotheſis</i>	<i>Theſis</i>
ang. $A = a$	1. $BC = bc$
$AB = ab$	2. ang. $A = c$
$AC = ac$	3. $B = b$
	4. $\triangle ACB = \triangle acb$

Hoc nimirum pacto diſtincte exhibentur ſingula, quæ in hypotheſi ſumuntur, ut ſenſus præſto ſit in formanda notione diſtincta intellectui, quæ eidem reſpondet, nec minus diſtincte in ſenſum incurrunt ſingula, quæ iſtis poſitis una ponuntur: id quod egregium habet uſum, ſive in primo gradu cognitionis ſubſiſtere, ſive ad ſecundum progredi volueris, quemadmodum ex deinceps dicendis plenius conſtabit. Quodſi Ars characteriſtica foret ſatis exculta; ab omnibus vocabulis in ſymbolica repræſentatione theorematum abſtinere poteramus, Quoniam tamen ſignorum

numerus multiplicaretur, quorum uſus tyronibus moleſtiſ; conſultius eſt ut paucis ſinus contenti, & ſubinde vocabulis nonnullis abbreviata ſcriptione locum concedamus.

§. 26. In problematis quædam ^{Tib.} dantur; quædam fieri, vel inveniri ^{Fig.} jubentur. Ita in problemate 20 (§. 258 *Geom.*), ad quod ſupra provocavimus (§. 19), datur recta RS , & punctum extra eam V ; jubemur autem per punctum V ducere lineam rectam, quæ ſit ipſi RS parallela. Quodſi ergo problema diſtincte concipere volueris; quæ dantur, ab eo quod quæritur, hoc eſt, quod vel fieri, vel inveniri jubetur, diſtinguenda, conſequenter ubi problema ſenſui diſtincte repræſentare volueris, verſus ſiniſtram ſcribenda ſunt data, eo modo quo ſingulæ determinationes in hypotheſi theorematibus exprimiuntur; verſus dextram vero quaſitum, quemadmodum hic factum eſſe apparet:

<i>Data</i>	<i>Quæſitum</i>
Recta AB ,	Recta tranſiens
punctum V extra	per V
eam	&
	paral. ipſi AB .

Ita nimirum non modo quaſitum a datis ſeparatur; verum etiam data ſingula diſtincte exhibentur, non minus quam ſingulæ determinationes quaſiti; conſequenter ſi hæc figuræ ſcribantur, idea ſingula a ſe invicem ſeparata exhibet, quæ in notione problemati reſpondente totidem operationibus;

tionibus intellectus discernenda sunt, ut notio evadat distincta.

§. 27. Simile quid imitari licet in ipsa resolutione: id quod inprimis usui est, ubi ad gradum secundum cognitionis progredi, nec in primo acquiescere volueris. Exempli loco sit resolutio prima problematis 20 Geometriæ, cum quo nobis jam negotium est (§. 26). Ea nimirum ita representatur:

VK perpendicularis ad RS.

T punctum pro arbitrio assumtum.

TA perpendicularis ad RS.

TA = VK

MN per V & A transiens.

MN parallela RS.

Notandum vero, in denominandis rectis, præponi literam quæ designat terminum a quo, unde ducenda est recta, quam ducere jubet resolutio; & singula fieri debere eo ordine, quo sibi invicem subscribuntur. Ita VK indigitat, perpendicularem VK ad RS duci ex puncto V, consequenter ad rectam RS ex puncto V demitti; TA vero indicat, perpendicularem TA ad RS ducendam esse ex puncto T tanquam termino a quo: TA=VK significat, perpendicularem TA æqualem fieri debere antea ductæ VK: Denique MN per VA indicat, rectam MN ducendam esse per puncta V & A, quibus datis determinatur situs rectæ MN per superius in Geometria ostensa. Linea recta separat

ea, quæ fieri præcipiuntur, ab iis determinationibus, quas quæsitum habere debet, & quæ infra lineam exhibentur; scilicet quod hic linea MN sit datæ RS parallela. Quod enim transeat per punctum V, per se manifestum est, aut si mavis per ea, quæ vi resolutionis facta sunt, attenta mente considerata. Ubi nimirum ad secundum cognitionis gradum progredi libuerit, ea, quæ ex resolutione problematis per se manifesta sunt quoad quæsitum, probe distinguenda ab iis, quæ esse dicuntur.

§. 28. Non nego, si quis idem facere velit in aliis problematis, quod hic præstitimus in uno eorum, eoque haud difficili, ut facilius intelligeretur; eidem plura notanda esse, quam quæ hic docemus: sed instituti nostri ratio non fert, ut simus prolixiores. Sufficit generalem quandam ideam eorum, quæ facienda sunt, insinuas- se animo lectoris. Quod si enim hæc probe perpenderit, quæ hic inculcantur; plura suo marte assequetur, quæ hinc inde præterea requiruntur. Et sic ubi subinde cespitat; in progressu, ipsemet errores a se admissos, & quæ melius fieri poterant, animadvertet. Quamobrem diutius hisce non immoramur.

§. 29. In resolutionibus numericis problematum, typus calculi ad figuram relatus exhibendus est, qui problema cum resolutione distincte representat, & ideam operatricem animo insinuat, quæ firmior ei-

dem inhæret, quam resolutio memoriarum mandata, ita ut hæc non tam facile te fallat. Immo si hæc eidem nondum fuerit infixa; ubi ad librum recurrendum, quando resolutione ista in praxi opus habes, in typum solum exempli oculos convertere sufficit, quod vi ideæ operatricis, quam repræsentat; totam operationem docet ac dirigit. Quoniam in ipsis Elementis nostris exempla hoc modo exhibuimus, non opus est, nisi ut unum lucis affundendæ gratia huc transcribamus. Sifimus adeo illud, quod ad illustrandum problema 13 Trigonometriæ planæ (§. 36 *Trigon.*) in medium adduximus. Problema hoc est: *Datis duobus angulis una cum latere uni eorum opposito invenire latus alteri oppositum.* Typus vero exempli problema cum resolutione repræsentans talis est:

Tab. I.
Fig. 6.

Data

Quæsitum.

$$C = 48^{\circ} 35'$$

$$A = 57^{\circ} 28'$$

$$AB = 74'$$

BC.

Calculus.

Log. Sin. C	9. 8750142	}
Log. AB	1. 8692317	
Log. Sin. A	9. 9258681	
<hr/>		
Log. AB + Log. Sin. A	11. 7950998	}
Log. BC	1. 9200856	
= Log. AB + Log. Sin. A - Log. Sin. C.		

Quodsi enim oculos in exemplum hoc modo repræsentatum convertas; statim liquet dari duos angulos A & C, una cum latere AB uni eorum C opposito; & quæri latus BC, quod opponitur alteri A. Typus calculi ostendit, ex tabulis excerpandos esse logarithmos sinus anguli C, lateris AB & sinus anguli A. Logarithmos lateris AB & sinus anguli A addendos, & a summa subtrahendum esse logarithmum sinus anguli C, ut relinquatur logarithmus lateris quæsitum BC, in Canone Logarithmorum evolvendus, ut pateat numerus lateri quæsitum respondens.

§. 30. Abunde hætenus docuimus, quomodo ad gradum primum cognitionis perveniatur, ut nihil superfit in notionibus obscuri, sed omnia penitus intelligantur. Agendum itaque! progrediamur ad secundum, cui acquirendo inserviunt demonstrationes. Quoniam ad demonstrationem accedere non licet, nisi propositione rite intellecta; gradus secundus primum supponit; consequenter, quæ in antecedentibus præcepimus, ea ante fieri debent, quam ad demonstrationem distincte percipiendam animus appellas. Quamobrem, qui utrumque gradum una eademque opera acquirere studet; & ea observare tenetur, quæ de primo inculcavimus, & facere ea, quæ de secundo jam addemus.

§. 31. Demonstrationes ex rationiis contextu sunt eo modo inter se concatenatis, quem in Logica (§. 551 & seqq.) satis perspicue explicavimus, & mox uberius dicenda reddent manifestum. Ratiocinatio, tertia mentis seu intellectus operatio, involvit duas priores, primam atque secundam, notionem scilicet atque iudicium, una cum usu facultatum inferiorum, sensus scilicet, imaginationis atque memoriae, & iis animae actibus, per quos fit transitus ab usu facultatum inferiorum ad usum superiorum, attentione nimirum atque reflexione: quæ denuo parumper attentis ad sequentia manifesta evadent, modo facultatum animæ notionem ex Psychologia habuerint perspectas. Quodsi ergo a primo cognitionis gradu ad secundum per saltum ascendere nolueris; demonstrationibus ante utendum est mechanicis, quam ad eas progrediaris, quæ vi intellectus concipiuntur, seu ejus operationibus absolventur.

§. 32. Quid sit demonstratio mechanica, in Lexico Mathematico docuimus. Nimirum, juxta hypothesin theorematis construuntur figuræ; quo facto, ea una determinantur, quæ in thesi continentur, seu vi illorum, quæ in hypothesi sumuntur de subiecto, eidem attribuuntur. Quamobrem, num ea, quæ una determinantur, talia sint, ope instrumentorum examinanda. Sit exempli loco, theo-

rema 18 Geometriae (§. 179 *Geom.*), ad quod supra provocavimus (§. 25), scilicet, *Si angulus unus trianguli unus sit aequalis angulo uni trianguli alterius, & latera comprehendentia angulum istum in uno triangulo sint sigillatim aequalia lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; quod etiam latus tertium unius trianguli sit aequale lateri tertio alterius, quod duo anguli reliqui unius sint sigillatim aequales duobus angulis alterius, quod tota triangula aequalia & denique similia sint.* Construe triangulum ABC, Tab. I. prout visum fuerit; deinde ducatur *Fig. 6.* recta *ab*, & ex *a* in *b* transferatur intervallum AB; in *a* excutetur angulus ipsi A aequalis; & in crus *ac* transferatur intervallum AC. Quodsi jam puncta *c* & *b* connectantur recta *bc*, prodit triangulum alterum *abc*. Jam ubi circino capis intervallum BC, & circini crus unum colles in *b*, crus alterum attinget punctum *c*. Vides itaque latus trianguli *abc* tertium *bc* esse æquale lateri tertio BC alterius trianguli ABC. Ex punctis C, B, *c* & *b*, arbitraria circini aperturâ, sed eadem, describantur arcus, angulorum istorum mensuræ (§. 57 *Geom.*). Quodsi ope circini examines arcus ex centris C & *c*, itemque ex centris B & *b* descriptos; bini singuli deprehenduntur æquales (289 *Geom.*), atque hinc angulorum C & *c*, itemque B & *b* æqualitas colligitur (§. 141 *Geom.*). Excindantur ex charta, in qua delineata sunt,

sunt, triangula ACB & acb ; & triangulum acb ponatur super altero ACB , ea quidem lege, ut punctum a in A , & recta ab super AB cadat; videbis triangulum acb coincidere cum triangulo ACB , seu illud huic congruere (§. 3 *Geom.*). Atque, ex congruentia, triangula ACB & acb æqualia esse intelliguntur (§. 161 *Geom.*), vi notionis etiam communis: communiter enim ex congruentia æqualitatem æstimant omnes. Immo quia non minus laterum b & c & BC , itemque angulorum b & B , c & C congruentia oculis obvia est; vi notionis etiam communis, colligitur eorundem æqualitas, nempe quod fit $bc=BC$, $b=B$ & $c=C$; ita ut examinibus anterioribus ope circini factis non sit opus. Denique ubi ad animum revocas, esse $a=A$, $ab=AB$ & $ac=AC$ per hypothesin, aut $b=B$, $c=C$ & $bc=BC$ per examen, quod instituisti; cum præter angulos & latera nihil reperias in triangulis istis, per quæ a se invicem discerni possint; eadem quoque triangula acb & ACB similia deprehendis (§. 24 *Arithm.*). Similiter ubi theorema 37 (§. 233 *Geom.*) demonstrare volueris: Si duas parallelas secet transversa, erunt anguli alterni æquales, angulus externus æquatur interno opposito & duo interni oppositi sunt æquales duobus rectis; ducenda est 1^o. linea CD ; deinde 2^o. altera AB eidem parallela, ad quamcunque distantiam, cum ea non determi-

netur in hypothesi; & 3^o. pro arbitrio recta EF , quæ oblique secat parallelam utramque in G & H . 4^o. Ex puncto intersectionis G ducatur arcus intra crura ipsius anguli y , & eodem radio ex puncto intersectionis altero arcus intra crura anguli u ; quo facto, ut ante, ex æqualitate mensurarum colligis æqualitatem angulorum. Quod si 5^o. ex centro G eodem radio ducas arcum intra crura anguli x ; ex æqualitate mensurarum anguli x & u colligis æqualitatem horum angulorum. Denique 6^o. duc etiam ex centro G eodem adhuc radio anguli o mensuram; videbisque mensuras angulorum o & u , quarum hæc eadem deprehenditur cum mensura anguli x , semicirculum comple- re: unde colligis eos esse duobus rectis æquales.

§. 33. Absit autem, ut tibi persuadeas, demonstrationes hæc mechanicas in locum ceterarum surrogari possent, quas scientificas appellare libet in oppositione ad mechanicas. Etenim quod per mechanicas patet, nonnisi verum esse intelligitur de figura, quam descripsisti & præmanibus habes; adeoque theorematum veritas perspicitur nonnisi in casu singulari. Enimvero demonstratio, ex hypothesi theorematum ratiocinando, veritatem theorematum manifestat universaliter. Demonstratio tamen mechanica universalitatem loquitur, quatenus patet, ea, quæ ex assumptis inferuntur in theorema-

Tab. I.
Fig. 8.

re, per constructionem semper talia determinari debere. Nolo tamen de his dicere disertius, propterea quod vix conveniunt illorum captui, quibus demonstrationes mechanicae satisfaciunt. Consultum etiam est, ut demonstrationes mechanicae ad formam scientificarum reducantur, quantum datur, ut ad haece quasi manuducant. Sed talia relinquenda sunt circumspeditioni illorum, qui erudiendis aliis praeficiuntur. Ceterum exemplum praebet demonstratio theorematum geometrici mechanicae de congruentia triangulorum, quam modo dedimus (§. 31), ubi ex congruentia laterum $b c$ & BC , angulorum b & B , itemque c & C , atque triangulorum $a c b$ & ACB colligitur eorundem aequalitas, quemadmodum in demonstratione scientifica.

§. 34. Demonstrationes mechanicae aequipollent exemplis numericis, quae veritatem theorematum & problematum in casu singulari perspicendam praebent. Atque adeo facile patet, quid fieri debeat, si simile quid circa theorematum arithmetica tentes. Quod vero etiam hic formae demonstrationis scientificae ratio haberi possit, manifestis speciminibus docuimus in Arithmetica de generis numerorum quadratorum (§. 262 *Arithm.*), de generis numerorum cubicorum (§. 277, 280 *Arithm.*), de numeris aequidifferentibus (§. 327, 329 *Arithm.*). Quoniam vero hisce speciminibus profundiora

insunt, quae ad tertium cognitionis gradum viam sternunt; de iis plura nobis dicenda sunt in sequentibus. Diximus istiusmodi demonstrationes in Arithmetica oculares; quia oculis conspicienda sunt, quae in scientifica intellectus concipere debet. Et loquuntur universalitatem ex eadem ratione, quam modo dedimus de mechanicis theorematum geometricorum demonstrationibus (§. 32). Vix tamen ratio satis manifesta erit iis, qui, in Ontologia nondum versati, non capiunt quomodo, positis determinantibus, ponatur determinatum. Sane memini, Mathematicos primi ordinis haesitasse in talibus, quae principio isti superstruuntur. Nec mirum: ignoratis enim, vel saltem non distincte expensis principiis, a quibus principia pendent, horum veritas non perspicitur.

§. 35. Exempla, quibus veritas propositionis perspicitur in numericis, qualia sunt, quae in Arithmetica subinde adduximus, & quibus propositiones illustrari debere supra praecipimus (§. 17), si coacerventur, pluribus in medium allatis, parere inductionem, quam dicunt Logici (§. 478 *Logarith.*), nemo est qui nesciat. Quoniam figurae in charta delineatae non minus singularia repraesentant, quam notae numericae; quilibet concedere tenetur, si demonstratio mechanica in pluribus figuris instituatur, similiter prodire inductionem. In utroque igitur casu certitudo major non est, quam

quam quæ ab inductione expectari potest. Non est quod excipias, hoc pacto, etiam in demonstrationibus scientificis, a singulari ad universale argumentari, cum eadem ad figuras in charta delineatas referantur. Etenim quod demonstratur, non de figura in charta delineata demonstratur; sed ex assumtis, universaliter ratiocinando, colligitur quod erat demonstrandum: demonstratio autem refertur ad figuram in charta delineatam, ut notionibus affundatur claritas, ne in demonstratione intelligenda hæsitemus. Inde est, quod schematismorum in Geometria non requiratur veritas, quæ in usum demonstrationum delineantur: sufficit enim talia supponi, qualia in hypothesis sumuntur, neque enim ex iis, quæ figuræ delineatæ revera insunt, sed potius ex illis, quæ in hypothesis sumuntur & figuræ inesse supponuntur, procedit ratiocinatio.

§. 36. Demonstrationes istæ mechanicae satisfaciunt iis, qui in primo cognitionis gradu acquiescunt. Faciunt enim ad perspiciendum veritatem in singulari. Eo autem contenti sunt, qui ulterius progredi nolunt; utpote nullum habentes sensum ejus convictionis, qui per demonstrationes genuinas, quas scientificas dicere libuit, demum producit. Non tamen nullius profusus usus sunt ceteris. Quoniam enim veritatem in singulari perspiciendam præbent; ad nexum prædicati cum subjecto, seu ejus,

quod ex assumtis in hypothesis colligendum, cum iisdem, pervidendum conducunt; ut clarius intelligatur, quid demonstrari debeat, seu quomodo thesis ab hypothesis pendeat. Immo cum veritas, quamprimum perspicitur, deleat; voluptate quadam perfunditur animus tyronis, ubi videt, posita hypothesis, poni thesin, seu per assumpta determinari, quæ de subjecto prædicanda sunt. Hac voluptate non modo tollitur tædium, ex prævisa difficultate percipiendæ demonstrationis, sive vera, sive imaginaria oriundum; verum etiam ardor accenditur demonstrationis percipiendæ, & ad eam percipiendam animus redditur attentus. Novi equidem exercitioribus molestum accidere, ubi animum ante ad demonstrationem mechanicam advertere jubentur, quam ad scientificam accedant, & hac molestia effici impatientes, quod per inutiles ambages incedere debeant: id quod in primis accidit iis, qui animum sciendi cupidum possident. Enimvero, quæ initio studii mathematici commendantur, ea in progressu prætermittuntur, quando iisdem non amplius opus habemus. A syllabizatione incipimus, quando legere discimus: ab ea abstinemus, quamprimum eadem non amplius habemus opus. Ecquis vero damnet syllabizationem, quod exercitiores eadem in legendo non habent opus? Quamobrem velim ut de iis, quæ hic inculcantur,

non

non feratur iudicium, nisi singulis rite expensis. Notandum quoque non omnia ingenia esse velocia; sed dari etiam tarda; & tarda effici studii utilissimi desertores, nisi molestiæ, quæ deterrentur, tempestive afferatur medela. Sunt vero subinde tarda ingenia optima, quando nimirum naturali quodam veritatis intime perspicendiæ impetu feruntur, ut alia taceamus.

§. 37. Demonstrationes continua ratiocinatione absolvuntur, & ex assumentis procedunt. Assumta continentur in hypothesi, quæ singula demonstrationem ingredi debent. Ab his igitur exordium; redigendo in propositiones assumta; & ex anterioribus sumendo principia, quæ vel in definitionum, vel axiomatum, & postulatorum, vel propositionum jam demonstratarum numero sunt, terminum communem cum istis habentia, qui ipse principium istud veluti sponte sua in memoriam revocat, ubi anteriora eidem firmiter infixata tenueris. Quæ prodeunt conclusiones sumuntur deinceps eodem modo, quo ea, quæ hypothesis continebat; eodemque modo ratiocinando progrediendum, donec inferantur ea, quæ thesis sistit. Unde facile apparet, apprime opus esse, ut conclusiones per singula ratiocinia elicite probe notentur, & ad tollendam omnem molestiam oculis subiciantur: id quod ope symbolicæ representationis fieri posse dudum

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

docuimus, non minus in Ratione Prælectionum Sect. 1, c. 2, §. 38, 50, quam in Logica tam minori c. §. quam majori (not. §. 551 & seqq.). Consultum vero est, ut hic exemplo uno alteroque illustrentur, quæ modo diximus, cum amplissimum habeant usum, deinceps disertius exponendum. Hic tantum modo observamus, quod neglecta hac demonstrationum resolutione, & symbolica earundem representatione, studium mathematicum reddatur difficile, & plurimis idem deferendi causa detur.

§. 38. Exemplum facillimum præbet theorema sextum Geometriæ (§. 156 Geom.), cujus hic est tenor: *Si recta quadam secet rectam aliam, anguli verticales ad punctum intersectionis æquales sunt.* Theorema symbolice ita representatur:

Hypothesis.
CD recta data,
AB recta eam secans,
E punctum intersectionis, adeoque
 o & x anguli verticales (§. 67 Geom.).

Thesis. Tab. I.
 $o = x$ Fig. 9.

Patet itaque æqualitatem angulorum verticalium o & x demonstrandam esse ex eo, quod oriuntur intersectione rectarum CD & AB ad punctum intersectionis E. Quodsi ergo omnia minutissime persequi volueris, convenienter definitionibus, quæ in Elementis nostris præmissimus, ut in tota demonstratione nihil

V

admit-

admittatur, quod confuse saltem percipitur, ratiocinatio ita instituenda. In hypothesin ad figuram oculis præsentem relatam, qualem exhibet symbolica ejus representatio eidem subjicienda, non minus oculis conjiciens, quam animum advertens, vides CD esse rectam, quam in E fecat recta alia AB, adeoque angulos ϕ & γ habere crus unum AE commune, & crus alterum CE anguli ϕ in directum situm esse cruri alteri ED anguli γ ; adeoque definitio nominalis angulorum deinceps positum, quam ex reali, instar corollarii, deduximus (§. 63 *Geom.*), tibi suggerit hoc principium: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum duo crura reliqua in directum jacent, sunt anguli deinceps positi. Unde inferitur: Angulos ϕ & γ esse deinceps positos. Quodsi primam hanc conclusionem sumas tanquam præmissam syllogismi, & tam subiectum, quam prædicatum perpendis, memoriam subit theorema Geometriæ quintum (§. 147 *Geom.*): Duo anguli deinceps positi sunt æquales duobus rectis; quod præbet majorem novi syllogismi. Ex his præmissis colligis conclusionem: Ergo anguli ϕ & γ sunt æquales duobus rectis, quæ probe notanda in usum sequentem. Quodsi jam porro oculis in hypothesin ad figuram oculis præsentem conjicis, & animum ad eandem advertis; denuo vides, AB esse

rectam, quæ fecat alteram CD, adeoque angulos γ & α habere crus commune ED, & crura reliqua AE & EB in directum sita esse; atque hoc formas judicium intuitivum: Anguli γ & α habent crus commune & eorum crura reliqua in directum jacent. Ad hoc si animum attendis, memoria suggerit denuo definitionem nominalem angulorum deinceps positum, quam, corollarii instar, ex reali deduximus (§. 63 *Geom.*) & hoc supeditat principium, quod ad conclusionem modo elicitam, tanquam præmissam novi syllogismi assumptum, vicem alterius præmissæ tuetur: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum crura reliqua in directum jacent, sunt anguli deinceps positi. Ex his igitur præmissis inferis conclusionem: Anguli γ & α sunt anguli deinceps positi. Quodsi porro hanc conclusionem sumas præmissam syllogismi novi, animum ad eam advertenti succurrit theorema (§. 147 *Geom.*): Anguli deinceps positi sunt æquales duobus rectis. Ex his itaque præmissis inferis conclusionem: Ergo anguli γ & α sunt æquales duobus rectis. Quodsi jam in duas conclusiones, ϕ & γ sunt æquales duobus rectis, α & γ sunt æquales duobus rectis, oculis conjicis, & super iisdem reflectis; attendenti manifestum est: angulos γ & α atque angulos ϕ & γ esse duo æqualia eidem tertio, quod hic sunt duo recti. Quamobrem si judi-

judicium hoc quasi intuitivum sumas, instar præmissæ novi syllogismi; memoria suggerit principium, quod antea didicisti (§. 87 *Arithm.*): Æqualia eidem tertio sunt æqualia inter se. Ex his adeo præmissis infer: Anguli o & y simul sumti sunt æquales angulis y & x simul sumtis. Enimvero thesis, ubi in eam oculos conjicis, attendenti loquitur demonstrandum esse, quod angulus o sit æqualis angulo x . Quamobrem vides angulum y utrinque esse auferendum, ut anguli o & x relinquuntur: quod dum fieri supponitur, patet, quod idem ab æqualibus auferatur. Hoc igitur si sumis, succurrit denuo principium, quod in Arithmetica didicisti (§. 91 *Arithm.*): Si æqualia ab æqualibus auferas, vel idem ab æqualibus, quæ relinquuntur æqualia sunt. Unde porro concludis: Anguli o & x , qui hic relinquuntur, æquales sunt. Atque sic patet, demonstratum esse, quod demonstrandum fuisse thesis insinuat.

§. 39. Distinctissime adeo docuimus, quomodo concipienda sit demonstratio, ut omnem consequatur evidentiam, quam habere potest. Quodsi jam eandem symbolice representare volueris, ut omnem quoque consequatur claritatem, quam habere potest, omnisque in ea concipienda tollatur difficultas; hoc modo ipsum fieri debet:

I.

AE crux commune ang. o & y .
CE in directum situm ipsi ED

o & y anguli deinceps positi

$1. o + y = 2 R.$

II.

ED crux commune ang. y & x
AE in directum situm ipsi EB

y & x anguli deinceps positi

$2. y + x = 2 R.$

III.

$o + y = 2 R. vi num. 1.$

$y + x = 2 R. vi num. 2.$

$y + o = y + x$

$o = x$

Q. E. D.

Notandum hic, lineam a se invicem separare, quæ sumuntur, & quod ex iis concluditur. Illa supra lineam collocantur, hoc infra eandem constituitur. Quod intra duas lineasprehenditur, duplici modo considerari, nimirum 1^o. tanquam conclusionem, quæ ex assumtis colligitur, & 2^o. tanquam assumtum, unde ulterius infertur, quod infra lineam alteram scribitur. Vides autem porro, primo loco *num. 1.*, & *num. 1.*, assumpta ex hypothesi peti, ac inde duplici ratiocinio elici conclusionem *num. 1.*, & alteram *num. 2.* Exhausta

sic hypothesi, *num. III* sumuntur conclusiones *num. 1 & 2* ex hypothesi elicita; ac inde inde porro duplici ratiocinio tandem elicitur, quod in thesi continetur, esse $o=x$, seu angulos verticales esse æquales. Representatio hæc demonstrationis symbolica tantummodo propositionem minorem & conclusionem uniuscujusque syllogismi exhibet, qui demonstrationem ingreditur; adeoque syllogismos ad enthymemata reducit; omisissis principiis, quæ unicuique syllogismo majorem præbent, ac facile suppleantur ex regulis logicis; immo sua veluti sponte memoriam subeunt, ubi ea familiaria experiris; vel per citationem in contextu positam reperiri possunt, ubi memoriæ nondum fuerint infixæ. Atque adeo abunde patet, nihil hic desiderari, quod ad demonstrationem distincte concipiendam requiritur, & non minus ad evidentiam quoad illationem demonstrationi conciliandam, quam ad claritatem omnem eidem affundendam, ne quicquam obscuri supersit; sed ut penitus intelligatur, desideratur.

§. 40. Demus adhuc exemplum aliud. Sit demonstrandum theorema 18 Geometriæ, de quo diximus superius (§. 25). *Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem, & latera eundem comprehendentia sigillatim æqualia; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, duo*

anguli reliqui erunt sigillatim æquales, & tota triangula æqualia atque similia. Quoniam ex hypothesi ratiocinatio nondum procedit, quemadmodum in casu anteriore (§. 38, 39); præterea in usum demonstrationis quædam adhuc alia sumuntur, quæ sumi posse patet. Ubi vero hoc fieri solet, tum quæ ulterius supponuntur, præparationem constituere dicuntur. Est itaque hoc in casu, ubi æqualitatem & similitudinem ex principio congruentiæ demonstraturi sumus, præparatio hæc (§. 3 *Geom.*). Triangulum unum ponatur super altero, ita ut vertex angulorum æqualium unius ponatur super vertice alterius & crus illius unum cadat super crure uno alterius. Quæ in præparatione sumuntur, ea tanquam ad hypothesin spectantia considerantur, nullo inter hypothesin & præparationem, quoad usum assumtorum in demonstrando, facto discrimine. Dicō quoad usum assumtorum in demonstrando: alias enim manifestum est discrimen inter ea, quæ in hypothesi, & ea, quæ in præparatione sumuntur. Etenim per ea sola, quæ in hypothesi sumuntur, determinantur ea, quæ subiecto tribuenda & de eodem adeo demonstranda veniunt: quæ vero in præparatione sumuntur, non alium habent usum, quam ut ex sumtis in hypothesi procedat ratiocinatio. Nimirum quæ in præparatione sumuntur, per ea, quæ sumuntur in hypothesi non determinantur; alias enim ratio-

ratiocinando ex iisdem colligi poterant, nec ulla foret ratio, cur fumerentur. Sumi autem possunt non invito principio contradictionis, quatenus hypothefi non repugnant, sed cum iis, quæ in eadem continentur, una consistunt. Absoluta itaque præparatione demonstratio ordine naturali, qualem requirit usus facultatum animæ, ita procedit.

Tab. I.
Fig. 6.

§. 41. Vertex anguli a cadit in verticem anguli A , & crus illius $a b$ in crus alterius AB , per præparationem, estque angulus a æqualis ipsi A , per hypothefin. Hæc ubi perpendis, succurrit theorema 12 (§. 166 *Geom.*). Si fuerint duo anguli æquales, & vertex unius ponatur super verticem alterius, ac præterea crus unum illius super crure uno hujus; etiam crus alterum illius super crus alterum hujus cadit. Unde inferitur: 1°. crus $a c$ anguli a super crure AC anguli A cadit. Jam porro a cadit in A & $a b$ super AB , per præparationem, & $a b = AB$, per hypothefin. Ad hæc animus advertenti succurrit: Si recta quædam alteri æqualis ita applicetur, ut terminus ejus unus cadat super terminum unum alterius, ac ipsa cadat in alteram; etiam alter ejus terminus in terminum alterum alterius cadit (§. 169 *Geom.*). Unde inferitur 2°. rectæ $a b$ punctum b cadere in punctum B rectæ alterius AB . Similiter punctum a cadit in A , per præparationem, & $a c$ super AC per demonstrata *num.* 1, estque $a c$

$= AC$, per hypothefin. Succurrit igitur denuo principium modo commemoratum, indeque inferitur: 3°. punctum c cadere in C . Atque hæc sunt, quæ ex hypothefi, accedente præparatione, ratiocinando colliguntur. Enimvero quoniam in hisce conclusionibus nondum continentur, quæ demonstranda loquitur thesis; hæc ex illis continuata ratiocinatione colligenda. Ad conclusiones modo elicitas perspicienti manifestum est, quod punctum c in C per demonstrata *num.* 3, & punctum b in B per demonstrata *num.* 2 cadere; unde formatur hoc judicium quasi intuitivum: Rectæ $b c$ & BC intra eosdem terminos continentur (§. 11 *Geom.*). Vi definitionis congruentiæ (§. 3 *Geom.*), memoria suggerit hoc principium. Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt. Hinc inferitur conclusio: Recta $b c$ congruit rectæ BC . Hanc conclusionem si sumas instar præmissæ novi syllogismi; memoria suggerit hoc principium (§. 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea sunt æqualia. Unde inferitur: I. recta $b c$ æqualis est rectæ BC ; quod erat primum, eorum scilicet, quæ vi thesæos demonstranda. Porro b cadit in B , per demonstrata *num.* 2, $b a$ in BA , per præparationem, & $b c$ in BC , per demonstrata *num.* 2 & *n.* 3, atque §. 170. *Geom.* Habemus adeo duos angulos b & B , quorum vertices b & B

atque crura bc & BC ; itemque ba & BA coincidunt. Enimvero si vertex & crura angulorum duorum coincidunt, anguli æquales sunt (§. 167 *Geom.*). Ergo II, angulus b æqualis est ipsi B ; quod erat secundum, eorum scilicet, quæ vi theseos demonstranda. Similiter punctum c in C cadit per demonstrata *num.* 3, & ca in CA per demonstrata *num.* 1, item cb in CB per demonstrata *num.* 2 & *num.* 3, atque §. 170 *Geom.* Habemus igitur denuo duos angulos c & C , quorum vertex & crura coincidunt. Denuo ad hoc animum advertenti succurrit principium: Si duorum angulorum vertex & crura coincidunt, anguli æquales sunt. Unde inferitur conclusio III, anguli c & C æquales sunt; quod erat tertium. Denique a cadit in A , per præparationem, b in B , per demonstrata *num.* 2, & c in C per demonstrata *num.* 3, adeoque patet triangula acb & ACB intra eosdem terminos contineri (§. 11, 170 *Geom.*). Hoc ipsum perpendenti succurrit; Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt (§. 3 *Geom.*). Unde colligitur: Triangula acb & ACB sibi mutuo congruunt. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, memoriam subit principium (§. 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt. Unde inferitur IV, triangula acb & ACB æqualia & similia sunt; quod erat

quartum. Integræ adeo demonstrationem absolvimus, cum vi theseos nihil amplius demonstrandum restet.

§. 42. Quodsi symbolicam demonstrationis hujus representationem desideres, quæ singula veluti oculis conspicienda exhibentur; ea ita sese habet:

<i>Hypothesis</i>	<i>Thesis.</i>	Tab. I Fig. 6.
ang. $a = A$	I. $bc = BC$	
$ab = AB$	II. ang. $b = B$	
$ac = AC$	III. $c = C$	
	IV. $\triangle acb = \triangle ACB$	

Præparatio.

a cadit in A

ab cadit in AB

Demonstratio.

I.

a cadit in A , per præparat.

ab cadit in AB , per eandem.

$a = A$, per hypoth.

1°. ac cadit in AC

II.

$ab = AB$, per hypoth.

a cadit in A , per præparat.

ab cadit in AB , per eandem.

2°. b cadit in B

III.

a cadit in A , per præparat.

ac cadit in AC , per demonstr. *num.* 1.

$ac = AC$, per hypoth.

3°. c cadit in C

IV.

c cadit in C , per demonstr. *num.* 3.

b cadit in B , per demonstr. *num.* 2.

adeo

adeoque

bc & *BC* intra eosdem terminos continentur.

Recta *bc* congruit ipsi *BC*

I. $bc = BC$

V.

b cadit in *B*, per demonstr. num. 2.

ba cadit in *BA*, per preparat.

bc cadit in *BC*, per demonstr. num. 2.

& num. 3 & §. 170 Geom.

II. angulus $b = B$

VI.

c cadit in *C*, per demonstr. num. 3.

ca cadit in *CA*, per demonstr. num. 1.

cb cadit in *CB*, per demonstr. num. 2.

& num. 3, & §. 170 Geom.

III. angulus $c = C$

VII.

a cadit in *A*, per preparat.

b cadit in *B*, per demonstr. num. 2.

c cadit in *C*, per demonstr. num. 3.

adeoque

$\triangle \triangle acb$ & $\triangle ACB$ intra eosdem terminos continentur (§. 11, 170

Geom.)

$\triangle acb$ congruit $\triangle ACB$

IV. $\triangle acb \cong \triangle ACB$

§. 43. Atque ita totam demonstrationem in sua prima principia resolvimus, ex quibus facultatum nostrarum usu deducitur, non admissis notionibus confusis, quæ ob-

scuritatem quandam relinquere poterant, & ratiociniis distincte atque naturali ordine expressis, ac inter se concatenatis, ut nihil desit evidentiae (§. 41). Singula hæc ipsis oculis spectanda exhibet repræsentatio demonstrationis resolutæ symbolica (§. 42). Etenim conspicitur, quomodo demonstratio ex hypothesi & præparatione, tanquam ex assumtis procedat; quemnam utriusque usum faciamus in demonstrando; & cur præparatione opus sit; nec non quomodo sese habeant ea, quæ præparatio superaddit, ad ea quæ in hypothesi continentur. Videmus porro, quomodo omnes determinationes in hypothesi contentæ invehantur in demonstrationem; ut tandem, ex omnibus simul sumtis, concludatur unumquodque eorum, quod in thesi continetur, tanquam determinatum ex determinantibus. Videmus quoque, quomodo ratiocinia concatenentur, introductis conclusionibus præcedentium in sequentia. Videmus denique, quomodo ratiocinia ultima terminentur in iis, quæ demonstranda loquitur thesis, ut manifestum sit demonstrationem esse absolutam.

§. 44. Habet autem repræsentatio demonstrationis symbolica hunc usum, ut eandem facilius & omnem difficultatem arceat. Oritur difficultas ex ratiociniorum continuandorum longa serie, & conclusiones, quæ in præcedentibus ratiociniis fuerant elicite, memoria retinendæ, ut eas

intro-

introducere liceat in sequentes per modum præmissarum, ubi non statim, quando illatæ fuerunt, in locum præmissæ assumuntur in syllogismo proxime sequente, quemadmodum in exemplo primo factum esse apparet *num.* I, & II, (§. 39) & in præfenti *num.* IV, & VII. Enimvero, si demonstratio symbolice repræsentetur, gradum sistere licet in singulis, quæ sigillatim expressa exhibentur, & quacunque mora interposita redeunti progredi datur, ac si nulla interposita fuisset. Quantacunque igitur fuerit ratiociniorum eo usque continuandorum series, donec perveniatur ad ea, quæ demonstranda fuerant; non tamen defatigabitur animus ratiocinationi in longa serie continuandæ minus adsuetus. Nec distrahitur animus, quocunque, durante illa quam interponere visum est mora, cogitationes tuas convertas. Non interruptitur eadem attentio, quæ ad demonstrationem afferenda, ne desit sensus evidentiae ad convictionem plenariam requisitus. Immo dum omnia, ad quæ animus advertendus, oculis spectanda subjicit, attentionem mirifice juvat, sive ea excitanda, sive conservanda fuerit. Neque defatigatur imaginatio, atque memoria; quatenus conclusiones syllogismorum anteriorum retinendæ, ut earum prompte meminerimus, dum in syllogismos sequentes introducendæ; cum oculis in ea, quæ distincte scripta cernuntur, conversis,

sua sese sponte sistant, quamprimum earundem meminisse debemus. Neque etiam hæsitatio in eo, quomodo progrediendum sit in demonstratione, donec absolvatur. Etenim clarissime vides, primum formari propositiones ex iis, quæ in hypothesi &, ubi ea non sufficit sola, in præparatione sumuntur, ut, adscitis principiis, ex anterioribus inferantur conclusiones, donec hypothesis & præparatio fuerit exhausta. In locum hypotheseos & præparationis, deinde succedunt conclusiones hoc pacto elicite, & quomodo introducendæ sint in novos syllogismos, tum thesis, quæ demonstranda oculis objicit, tum memoria principiorum, quæ conspectus conclusionum & in thesi contentorum offert, ostendit. Quodsi adeo principia anteriora familiaria experiris, in distincte concipienda demonstratione nihil prorsus difficultatis percipitur. Redduntur autem familiaria, si eo, quem præscripsimus, modo expendantur, & symbolice repræsentationes, quas explicavimus, aliquoties animo recolantur.

§. 45. Qui principia, quibus opus habet, nondum adeo familiaria experitur, ut sponte sua memoriam subeant, quoties iisdem opus est; ei inserviunt citationes demonstrationibus in contextu insertæ. Hæ enim ostendunt paragraphum, in quo principium continetur, quod ad propositionem, vel ex hypothesi ac præparatione formatam, vel ex conclusio-

nibus

nibus jam elicitis assumptam aut derivatam, applicatum conclusioni elicendiæ inservit. Patebit hoc, demonstrationis symbolicam repræsentationem cum contextu conferenti, ut adeo opus non sit plura in hanc rem afferri.

§. 46. Notandum nimirum, in contextu demonstrationem concisus proponi; quantum sufficit, ut singula suggerantur, quæ animum subire debent, ubi illam distincte concipere volueris. Quodsi tamen contextum cum resolutione, qualem hic præcepimus, & repræsentatione symbolica, qualem exhibuimus, conferre volueris; facile observabis, demonstrationem in contextu positam esse utriusque directorium, ne hæsites in eo, quid fieri debeat. Facile adeo animadvertes, demonstrationes ita a nobis fuisse expressas, ut huic instituto maxime convenient. Disces etiam, resolvendo demonstrationes eo, quem præcepimus, modo, & symbolice repræsentando, eandem minime effici prolixiores: cum supplendo ea, quæ conspectus schematismi suggerit & quæ citationes insinuant, eodem prorsus ordine prodeant singula ratiocinia, quo eadem posuimus. Immo, si sufficiente attentione uti volueris, in te ipso experieris, deesse adhuc aliquid sensui evidentiae, quamdiu singula ratiocinia non formaveris; præsertim ubi uno vel altero exemplo eundem acquisiveris, ut ne ignores differentiam, quæ inter distinct-

tam & confusam perceptionem intercedit. Absit itaque ut tibi persuadeas, hic a nobis præcipi, quæ a contextu abhorrent, ac per inutiles ambages ad scopum tendi.

§. 47. Enimvero non inconsultum esse videtur, ut exemplum quoque demonstrationis theorematis arithmetici in medium afferamus. Sumamus itaque theorema 21 (§. 181 *Arithm.*), quo superius usi sumus (§. 24) & quod ita habet: *Si duas quasque quantitates per eandem tertiam divides; quoti sunt inter se ut quantitates divide.* Theorema hoc symbolice ita repræsentatur:

<i>Hypothesis.</i>	<i>Thesis.</i>
A & B quantitates	F: G = A: B.
dividende,	
C divident communis,	
F & G quoti ex divisione	
prodeuntes	

Patet itaque demonstrandum esse; quotos F & G esse quantitativis A & B proportionales, ex eo, quod prodeant ex divisione quantitatum A & B per eandem tertiam C. Quodsi ergo ex hypothesi sumis: Quotus F prodit ex divisione quantitatis A per quantitatem C; ex anterioribus (§. 174 *Arithm.*) succurrit principium: In divisione unitas est ad divisorem, ut quotus ad dividendum. Unde inferitur: 1, five unitas, est ad C ut F ad A. Quodsi porro ex hypothesi sumis: Quotus G prodit ex divisione quantitatis B per quantitatem

ritatem C; vi ejusdem principii infertur: unitas, sive 1, est ad C ut G ad B. Exhausta hypothesi, ut inde nihil amplius concludi possit, ubi conclusiones modo elicitas inter se confers, patebit rationes F ad A, & G ad B, esse duas rationes eidem tertiæ 1 ad C æquales. Succurrit itaque theorema (§. 167 *Arithm.*): Rationes æquales eidem tertiæ sunt æquales inter se. Atque hinc infertur: Rationes F ad A & G ad B esse æquales, seu esse $F:A=G:B$. Enimvero thesis ostendit, quæri quomodo sese habeat A ad B. Huc si animum advertas, succurrit theorema 18 (§. 173 *Arithm.*): Quantitates proportionales etiam alternando proportionales sunt. Atque adeo tandem infertur, esse $F:G=A:B$, quod erat demonstrandum.

§. 48. Symbolica demonstrationis hujus representatio hæc est:

<i>Hypothesis.</i>	<i>Thesis.</i>
$\frac{A}{C} = F$	$F:G=A:B$
$\frac{B}{C} = G$	

Demonstratio.

I.

$$\frac{A}{C} = F, \text{ per hypothesin.}$$

1°. 1: C = F: A

II.

$$\frac{B}{C} = G, \text{ per hypothesin.}$$

2°. 1: C = G: B

III.

1: C = F: A, per demonstratam 1.

1: C = G: B, per demonstratam 2.

F: A = G: B

F: G = A: B Q. E. D.

Nulla hic opus est præparatione, cum sola hypothesis ea contineat, unde vi principiorum anteriorum tandem infertur conclusio, quæ vi thesios inde elicienda. Quodsi majoris perspicuitatis gratia in numeris demonstrationem repræsentare volueris, non alia re opus est, quam ut literis substituantur numeri; eo modo, quo hic factum esse vides:

<i>Hypothesis.</i>	<i>Thesis.</i>
$\frac{24}{3} = 8$	$8:4=24:12$
$\frac{12}{3} = 4$	

Demonstratio.

I.

$$\frac{24}{3} = 8, \text{ per hypothesin.}$$

1°. 1: 3 = 8: 24

II.

$$\frac{12}{3} = 4, \text{ per hypothesin.}$$

3

$$2^o. 1:3=4:12$$

III.

$$1:3=8:24, \text{ per demonstrata n. 1.}$$

$$1:3=4:12, \text{ per demonstrata n. 2.}$$

$$8:24=4:12$$

$$8:4=24:12 \quad Q. E. D.$$

Possunt etiam numeri quantitibus per literas designatis subscribi, vel ad latus adjici, prout supra factum esse apparet (§. 24), ut claritate sua dispellant obscuritatem, quæ signis istis universalibus adhaerere videtur, quamdiu iisdem nondum satis fueris aduetus. Ceterum si demonstrationem in numeris exhibere volueris, eadem demonstratione ad plura exempla applicata, absque ulla molestia fit repetitio, quod idem agendo semper aliud agere tibi videris, quatenus numerorum diversitas varietatem quandam inducit.

§. 49. Cum representatio demonstrationis in numeris non sit nisi ipsa demonstratio scientifica, seu generalis, ad exemplum aliquod, majoris perspicuitatis gratia, applicata, quemadmodum in Geometria demonstratio applicatur ad figuram in charta delineatam, quæ singulare exemplum præbet; ideo in eadem acquiescere

licet, nec opus est, ut iisdem signa universalia substituas; modo tibi caveas, ne in ratiocinia tacite invehas determinationes nonnullas, quæ insunt numeris assumtis, non vero hypothesi. Etenim tum demonstratio non succedit, nisi in eo casu, ubi istæ determinationes adsunt; consequenter tantummodo casum quendam particularem attingit, nec universaliter demonstratur, quod erat demonstrandum. Atque adeo contingere potest, ut, dum conclusio in casu particulari elicitæ habetur pro universalis, in errorem incidas. Enimvero error hic præcavetur, modo probe consideres, num quod assumis, conclusionis inferendæ gratia, totum in hypothesi contineatur, aut per præparationem superaccedat, si præterea aliud quid sumitur, nulla habita ratione eorum, quæ numeris quæ talibus insunt. Ita enim certum est, in omni exemplo alio ratiocinationem eodem modo procedere, nec argumentationem fieri ab eo, quod huic exemplo inest singulare, sed ab eo, quod cum omnibus aliis sub hypothesi contentis commune habet. Ex. gr. in exemplo nostro (§. 48), quoti 8 & 4, *num. I & II*, sunt numeri integri rationales. Ast principium, quo mediante hinc inferimus conclusiones, scilicet quod in omni divisione sit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad dividendum, satis ostendit, conclusionem inferri ex eo, quod 8 & 4 sint quoti

per divisionem duorum numerorum 24 & 12, per eundem tertium 3 prodeuntes, nec supponi quorum esse numerum integrum rationalem; consequenter nihil hypothesi superaddi, dum demonstratio ad exemplum aliquod singulare applicatur. Ceterum, quæ hic dicuntur probe notanda sunt, cum usum habeant etiam extra Mathesin, atque in partibus Matheoseos mixtis, & in cognitione Naturæ mathematica, ubi majore circumspeditione opus est, quam in Arithmetica: præsertim si theoria accurata nondum proficit, unde haurienda sunt principia demonstrandi; nec distinctis ratiociniis in demonstrando fueris adfectus; qualia requirit nostra demonstrationum resolutio, earundemque symbolica representatio, secundum leges animæ, naturali ordine ex hypothesi &, quæ subinde eidem superaccedere debet, præparatione, tanquam ex fonte suo, profluentia, quemadmodum ex principiis Psychologiæ empiricæ demonstrari potest nullo negotio, modo ea habueris perspecta.

§. 50. Quoniam demonstrationis universalitati nil quicquam decedit, dum ad exemplum aliquod applicatur (§. 49); ab ejus representatione in numeris facile abstrahitur demonstratio, qualem libro inferi convenit; si quæ assumuntur, & conclusiones quæ hinc inferuntur, verbis enuncientur, & conclusionibus adjiciantur citationes principiorum, quo-

rum vi hæ inferuntur. Ita in casu dato (§. 48) talis prodit demonstratio: Quoniam quoti ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultant, per hypothesin; quilibet eorum est ad quantitatem divisam ut unitas ad tertiam, quæ utramque dividit (§. 174 *Arithm.*); consequenter quoti ad quantitates divisas eandem habent rationem (§. 167 *Arithm.*). Sunt igitur inter se ut quantitates divisæ (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

§. 51. Quodsi problema aliquod demonstrandum est; notandum idem converti in theorema, sumta resolutione cum datis tanquam hypothesi, & eo, quod fieri debet, tanquam thesi. Ex. gr. Problema de ducenda linea alteri parallela, per punctum extra ipsam datum, adhibita resolutione prima, quam superius exempli loco produximus (§. 27), in hoc theorema convertitur: Si ex puncto, extra lineam dato, demittatur ad lineam datam perpendicularis; & ex puncto alio intra eandem pro arbitrio assumto, erigatur perpendicularis altera eidem æqualis: recta per punctum datum & extremum perpendicularis alterius transiens est lineæ datæ parallela.

§. 52. Ubi problema in theorema fuerit conversum, resolutio demonstrationis eodem modo absolvitur, quo in demonstrationibus theorematum resolvendis usi sumus (§. 38, 41 & 47). Sit ex. gr. resolvenda demonstratio problematis, quod modo ad theorema

revoca-

revocavimus (§. 51); demonstratio ita procedit. Recta VK, ex puncto V extra lineam RS dato, ducta est ad eandem perpendicularis; recta TA, ex puncto T intra rectam RS pro arbitrio assumpta, est itidem ad eandem perpendicularis, alterique perpendiculari VK æqualis, per constructionem seu resolutionem; adeoque perpendiculara, inter rectam datam RS & rectam per punctum V & A ductam intercepta, VK & TA æqualia sunt. Enimvero si perpendiculara inter duas lineas intercepta æqualia sunt, lineæ istæ sunt parallelæ (§. 226 Geom.). Linea igitur, ducta per punctum datum V & extremum A alterius perpendicularis TA, est parallela lineæ datæ RS. *Q. e. d.* Videmus adeo ex iis, quæ constructio, juxta resolutionem problematis facta, suggerit, unico syllogismo inferri, quod demonstrandum erat: quæ ratio est, cur nullam in contextu demonstrationem adjecerimus, sed tantummodo citationem principii, vi cujus ex constructione infertur, quod erat demonstrandum, nempe parallelismus linearum RS & MN.

§. 53. Symbolica demonstrationis hujus repræsentatio nihil prorsus difficultatis habet. Etenim non alia re opus est, quam ut repræsentationi symbolicæ resolutionis supra datæ (§. 27) adscribas data ex repræsentatione problematis symbolica, & ad summum adjicias propositionem ex iisdem formatam; prouti hic factum esse vides:

Hypothesis.

Recta RS data,
Punctum V extra eam datum,
VK perpendicularis ad RS,
T punctum pro arbitrio assumtum,
TA=VK,
MN transiens per V & A.
Demonstratio.
VK & TA perpendiculara inter MN & RS,
atque VK=TA.

Thesis.

MN paral. RS.

MN parallela ipsi RS. *Q. e. d.*

§. 54. Quoniam demonstratio problematis, quod exempli loco in medium protulimus (§. 51 & seqq.), perbrevis est, utpote quæ nonnisi unico syllogismo constat; non inconsultum videtur addere exemplum adhuc aliud. Sumamus itaque problema 33 Geometriæ de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Sunt itaque data rectæ duæ AB & BE; Tab. I. Fig. 10. quæsitum est recta BD media proportionalis inter AB & BE. Resolutio jubet rectas AB & BE jungi in directum, ut prodeat recta AE; super AE describi semicirculum ADE: & ex B erigi perpendicularem BD semicirculo in D occurrentem; quæ esse dicitur media proportionalis inter AB & BE. Quodsi ergo problema demonstrare volueris, resolutione in hypothesin versa & propositione prothesi sumta; sequens prodit theorema. Si super recta AE describatur

X 3

semi-

semicirculus, & ex puncto quocunque diametri B erigatur perpendicularis BD semicirculo in D occurrens; erit ea inter segmenta diametri AB & BE media proportionalis.

§. 55. Quodsi jam hoc theorema demonstrare volueris, præparatio accedere debet. Ducantur itaque rectæ AD & DE, chordæ arcus semicirculi cognomines subtendentes, ut prodeant trianguula ADB, BDE & ADE. Quo factò demonstratio ita resolvitur. Sumimus ex constructione: Recta BD perpendicularis est ad AE. Hoc ubi perpendis, definitio perpendicularis lineæ suggerit hoc principium (§. 78 *Geom.*): Si linea recta fuerit ad alteram perpendicularis, anguli, quos cum ea efficit, recti sunt & æquales (§. 79 *Geom.*). Unde infertur angulos m & n esse rectos & æquales. Porro rectæ AD & DE semicirculum subtendunt, vi præparationis & AE diameter circuli est, per constructionem. Unde patet, quod ADE sit angulus in semicirculo. Huc si animum advertis succurrit theorema (§. 317 *Geom.*): Angulus in semicirculo rectus est. Unde infertur: angulus ADE seu $o + x$ rectus est. Est vero etiam angulus m rectus, per demonstrata. Quamobrem, si angulum m ad angulum $o + x$ referas, succurrit principium (§. 145 *Geom.*): omnes anguli recti inter se æquales sunt. Unde infertur: angulus m trianguli ADB est æqualis angulo $o + x$

trianguli ADE. Enimvero angulus y utrique triangulo ADB & ADE communis est, atque adeo duo in hisce triangulis anguli æquales sunt. Memoria suggerit, siquidem anteriora eidem mandaveris, quemadmodum fieri debet, adeoque hic supponitur: Si duo anguli unius trianguli æquantur duobus alterius, etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 246 *Geom.*). Hinc itaque colligitur angulum o in triangulo ADB esse æqualem angulo z in triangulo ADE. Quodsi jam angulos in triangulis ADB & DBE inter se confers, tum patet duos angulos m & o trianguli ADB esse sigillatim æquales duobus angulis n & z alterius trianguli DBE. Succurrit itaque, ex anterioribus memoriæ probe infixis, principium: si duo anguli unius trianguli fuerint sigillatim æquales duobus angulis alterius, trianguula latera æqualibus angulis opposita proportionalia habent (§. 267 *Geom.*). Hinc infertur, latera AB & BD in triangulo ABD esse proportionalia lateribus BD & BE in triangulo DBE, quorum scilicet illa opponuntur angulis o & y , hi vero angulis z & x , angulo o existente æquali angulo z & angulo y æquali angulo x , per demonstrata. Habemus adeo $AB:BD=BD:BE$. *Q. e. d.* Ita demonstrationem resolvimus, ut singula distincte enuncientur, quæ in notionibus continentur, quæ eandem absolvunt, & præsentis animo

ejus esse debent, qui eadem convincitur.

Tab. I. §. 56. Demonstratio problematis
Fig. 2. hujus symbolice ita representatur.

Hypothesis.

Thesis.

AB recta data	BD recta quaesita.
BE recta data	AB:BD=BD:BE
AE diameter	
femicirculi	
ADE semicirculus	
AB }	
BE }	Segmenta diametri

Preparatio.

AD. & DE chordæ semicirculum subtendentes.

Demonstratio.

I.

BD perpendicularis ad AE, per constr.

1°. m & n anguli recti
& $m = n$.

II.

AD & DE semicirc. subtendunt,
per preparat.
AE diameter circuli, per construct.
adeoque
ADE angulus in semicirculo.

2°. angulus $o+x$ rectus.

III.

ang. $o+x$ rectus, per demonstr. num. 2.
 m rectus, per demonstr. num. 1.

3°. $o+x=m$

IV.

in $\triangle\triangle ADE$ & ABD

$o+x=m$, per demonstr. num. 3.
 $y=y$

4. $z=o$.

V.

in $\triangle\triangle ADB$ & DBE

$m=n$, per demonstrat. num. 1.
 $o=z$, per demonstrat. num. 4.

5°. $y=x$ &
AB:BD=BD:BE. Q. e. d.

§. 57. Atque adeo patet, inter demonstrationem theorematis & problematis nullam intercedere differentiam, modo problema in theorema convertatur, quemadmodum id fieri debere præcepimus (§. 51, 54). Et hoc pacto docuimus omnia, quæ observanda sunt ei, qui ad secundum cognitionis humanæ gradum adspirat. Unicum adhuc moneri consultum ducimus; scilicet quod ex resolutione demonstrationum pateat, cur propositiones pure enunciare debeamus, quas brevitatis gratia in contextu statim ad figuras retulimus, expositione cum propositione in unum confusa. Etenim ubi distincte ratiocinari volueris, quemadmodum exigit resolutio demonstrationis; necesse est ut propositiones singulæ pure enuncientur. Quamobrem etiam pure enuntiatae memoriæ mandandæ; cum alias applicatio, in casu dato, ob literarum figuris adscripta.

scriptarum diversitatem, confundat, ut difficilis ac molesta evadat. In ad-discenda igitur Mathesi morem veterum sequi tenemur, ut primum propositionem unamquamque pure enunciemus, ac deinde eandem exponamus, separata expositione a propositione, quando eidem immixta.

§. 58. Quodsi objiciās, nos nihil dixisse de corollariis, quorum tamen bene multa in Elementis nostris occurrunt: facilis est responsio. Corollaria enim sunt propositiones, quarum veritas perspicitur per definitionem, vel propositionem, cui subji-ciuntur. Quoniam pleraque eorum demonstratione indigent, quam per modum principii ingreditur definitio, vel propositio, cui subji-ciuntur; quæ de resolutione & symbolica representatione propositionum diximus, ea quoque de corollariis tenenda. Nimirum propositio pure enuncianda, deinde exponenda, exposita in hypothesin & thesin resolvenda, quarum utraque consueto more symbolice representata. Demonstratio deinde, eodem modo resolvenda, quo eandem in anterioribus resolvimus, eodem etiam modo symbolice representanda, quo eandem in anterioribus representavimus. Nullis igitur peculiaribus præceptis hic opus.

§. 59. Ne quicquam in dictis superfit obscuri, exemplum aliquod

superaddere lubet. Sumamus itaque corollarium quartum theorematis 34 (§. 228 *Geom.*), quod revera est corollarium præcedentis tertii; cum non theorema ipsum, sed ejus corollarium tertium ingreditur demonstrationem tanquam principium. Propositio in eodem contenta hæc est: *Si in triangulo rectangulo cathetus unus sumatur pro basi, erit alter altitudo.* Hæc propositio ita exponitur. Sit MKL triangulum, MK & KL catheti ejus. Dico si KL sumatur pro basi, fore MK altitudinem ejus. Hypothesis adeo est quod triangulum MKL sit rectangulum, MK & KL sint catheti, & KL sumatur pro basi; thesis autem, quod cathetus MK sit altitudo trianguli. Demonstratio ita resolvitur, si nihil perceptioni confusæ tribuere, sed singula ad notionem distinctam reducere volueris. Figura MKL triangulum rectangulum est, per hypothesin. Succurrit definitio 52 (§. 91 *Geom.*): In triangulo rectangulo angulus unus rectus est. Unde concluditur: In figura MKL angulus unus rectus est: Porro latera MK & KL sunt catheti, per hypothesin. Succurrit definitio 57 (§. 96 *Geom.*). Catheti trianguli rectanguli angulum rectum intercipiunt. Unde inferitur. Angulus K rectus est. Studio utrorum syllogismo cryptico, quem a cryptis facile liberabit in Logica versatus, tum quia syllogismi cryptici frequentissime sua veluti sponte sese offerunt in demonstrationibus, manifesti autem

tem studio quærendi; tum ut crypticos in ratiocinando idea animo sese insinuet profutura in Logica, ubi theoria syllogismorum crypticorum traditur. Ceterum hanc conclusionem, quam modo intulimus, unica etiam ratiocinatione colligere licet hoc modo: Angulum K in triangulo rectangulo MKL catheti intercipiunt, per hypothesin. Angulus in triangulo rectangulo, quem catheti intercipiunt, rectus est. Ergo angulus K rectus est. Ex eo, quod angulus K rectus sit, per immediatam consequentiam infertur: Cathetum MK cum altero KL efficere rectum. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, vi definitionis lineæ perpendicularis (§. 78 *Geom.*) succurrit principium: Linea recta cum altera efficiens angulum rectum ad eandem perpendicularis est. Unde colligitur: Cathetus MK ad alterum KL perpendicularis est. Quodsi perpendas ex puncto M ad rectam KL ductam esse perpendiculararem MK, succurrit vi definitionis 47 (§. 85 *Geom.*) principium: punctum, ex quo perpendicularis ad rectam duci potest, eidem rectæ opponitur; quod scilicet ex definitione, animo obversante per consequentiam immediatam elicitur. Unde infertur: Punctum M catheto trianguli KL opponitur. Jam rectæ KM & LM in puncto M concurrunt ad formandum angulum KML, ut adeo M sit vertex hujus anguli, *Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.*

quod per definitionem 26 (§. 54 *Geom.*) patet, nec demum per ratiocinia distincta elicere lubet. Hoc ubi perpendis, ac præterea ex hypothesi sumis quod KL sit basis trianguli, succurrit definitio 74 (§. 114 *Geom.*): Vertex figuræ est vertex anguli basi oppositus. Unde infertur: Punctum M est vertex figuræ seu trianguli MKL. Recordatus quod MK sit ad KL perpendicularis, per demonstrationem, hoc formas iudicium: Cathetus MK est perpendicularum ex vertice trianguli M in basin KL demissum. Quodsi denique huc animum advertis, succurrit principium (§. 227 *Geom.*): Perpendicularum ex vertice figuræ in basin ejus demissum est altitudo figuræ. Atque hinc tandem concludis: Cathetum MK esse altitudinem trianguli rectanguli MKL.

§. 60. Quodsi hanc demonstrationem symbolice representare volueris, hoc modo id fieri debere, ex anterioribus abunde liquet.

<i>Hypothesis.</i>	<i>Thesis.</i>
MKL \triangle rectangulum,	MK altitudo;
MK & KL catheti,	
KL basis,	

Demonstratio.

I.

MKL \triangle rectangulum, per hypothesin.

1°. In \triangle MKL angulus unus rectus

Y

II.

II.

MK & KL catheti Δ rectanguli
MKL, *per hypoth.*

2. Angulus K rectus.

III.

MK cum KL efficit rectum, *per
demonstr. num. 2.*

3. MK ad KL perpendicularis.

IV.

MK ad KL perpendicularis, *per
demonstr. num. 3.*

4. M opponitur ipsi KL.

V.

M vertex anguli KML, *quod
patet intuitive.*

5. M vertex Δ MKL

VI.

M vertex Δ MKL, *per de-
monstr. num. 5.*

MK perpendicularis ad KL, *per
demonstr. num. 3.*

KL basis, *per hypotesin.*
adeoque

MK perpendicularum ex vertice
M in basin KL demissum.

MK altitudo Δ rectang. MKL.

§. 61. Insunt resolutioni demon-
strationis præcedentis, quæ attento-
nem merentur. Nimirum quando
per notiones confusas clare perspi-
cimus, quæ distincte cognoscenda

ratiociniis inferenda, saltum in ratio-
cinando committimus: qui quando
admitti possit citra lapsus periculum,
ex resolutione confuse perceptorum
in ratiocinia patet. Quodsi integram
Arithmeticam & Geometriam eo mo-
do pertractare libuerit, quem præ-
scripsimus & exemplis illustravimus,
vix quicquam in theoria Logica oc-
curret, cui non lux affundatur. Ipsa
quoque resolutio demonstrationis co-
rollarii, quam modo in medium at-
tulimus, clarissime docet, cur in de-
finiendo fuerimus prolixiores, quam
vulgo fieri solet, & cur multa demon-
straverimus principia, quorum nul-
lus in Elementis Geometriæ locus esse
solet. Etenim, omisis istis defini-
tionibus atque principiis, in demon-
strationibus saltus in demonstrando
committuntur, nec distinctam hujus
notionem consequi datur, ubi nun-
quam, quæ per notiones confusas
clara putantur, distinctis ratiociniis
inferuntur. Equidem non nego ty-
ronibus initio studii mathematici mo-
lestum esse hunc rigorem, immo su-
perfluum videri, propterea quod de-
monstratione non indigere existimant
ea, quæ absque demonstratione vera
intelliguntur; non tamen hinc sequi-
tur, rigorem istum sua carere utilita-
te. Quamvis adeo, initio studii ma-
thematici, in gratiam tyronum, ab
eo tantisper sit recedendum, in pro-
gressu tamen non negligendus. Ea de
causa in Elementis Germanicis multa
non definivimus, quæ in Latinis defi-
niuntur.

niuntur; multa sine demonstratione sumimus in illis, quæ in hisce demonstrantur. Nec hoc fecimus sine prægnantibus rationibus, quæ manifestæ evadent per ea, quæ capite sequente dicentur. Non desuere, qui tantum definitionum & principiorum demonstratorum apparatus improbarunt; immo autores nobis fuere, ut in nova editione refecaremus, quæ ipsis superflua videbantur, propterea quod evidentes sint demonstrationes, absque illis definitionibus & absque principiorum istorum demonstrationibus. Enimvero si nostram demonstrationum resolutionem viderint & ex sequentibus consilium intellexerint, quo id fecimus; non dubitamus fore, ut aliud sit ipsorum judicium.

§. 62. Probe autem notandum est, tum demum demonstrationes esse naturales, seu ordinatas, & completas, adeoque consummatas, quales in Logica requirimus (§. 799, 854, 855 *Log.*), si eo modo resolvantur, quem præscripsimus, ut plenaria oriatur convictio, nec quicquam quoad evidentiam desiderari possit. Et qui in Psychologia empirica satis fuerit versatus, ex principiis ibidem traditis, demonstrabit, tum demum facultatum animæ in cognoscendo rectum fieri usum, ubi demonstrationes eo modo expenduntur, quo easdem resolvere docuimus. Nec minus patebit, in demonstrando tum eum fieri facultatum cognoscendi

usum, quem in communi cogitationum sese mutuo excipientium serie observamus.

§. 63. Nos in Elementis nostris demonstrationes eo ordine digessimus, ut in ratiocinia ex hypotefi & superaccedente præparatione, si quando opus est, deducta & inter se concatenata facile resolvi possint. Etenim conclusiones eo ordine sese invicem excipiunt, quæ in repræsentatione symbolica exhibentur, & iis adjiciuntur citationes, quibus insinuantur principia, quæ in resolutione commemorantur. Sumuntur etiam, ex hypothesi &, in demonstrationibus problematum, ex constructione unde inferitur conclusio, immo etiam ex demonstratis, conclusiones; nisi immediate ingrediantur ratiocinium proxime sequens, ut eandem bis poni inconsultum foret. Saltus si quos admittimus, quemadmodum in corollario, quod exempli loco modo adduximus, tales sunt, ut, nisi acutior fueris in demonstrando, eos non animadvertas, quod oculis in schema conversis per se clara videntur; veluti quod M sit vertex trianguli, quod MK & KL interceptiant rectum K. Nullum vero in demonstrationibus nostris deprehendes hiatus, ut omitterentur quædam, quæ ad formanda ratiocinia sunt necessaria, & sine quibus singula, quæ ad demonstrationem requiruntur, formari nequeunt: qui ipse hiatus demonstrationem reddit incompletam

pletam (§. 854 *Log.*). Enimvero exactam hanc formam logicam naturæ animæ convenientem, quemadmodum ex Psychologia constat, demonstrationibus vulgo non tribuunt autores: unde eadem facilitate non resolvuntur in ratiocinia, ex quibus constant, nec symbolice eo modo absque difficultate repræsentantur, quo nos easdem exhibere docuimus. Quamobrem, ex nostris quoque Elementis, Mathesis minore studio atque minore temporis intervallo addisci potest, quam ex aliorum scriptis; & si qua sphalmata, vel typographi incuria, vel festinante scribentis calamo, irrepsere, ea attentione adhibita haud difficulter corriguntur.

§. 64. Vulgo demonstrationes non eo modo expenduntur, quo nos eas resolvere docuimus. Immo ipse, cum Mathesi addiscendæ operam daret, aliam viam ingressus sum, donec tandem studium philosophicum cum mathematico conjungens & in rationem evidentiæ anxius inquirens, in veram inciderem. Nimirum vulgo animum primo convertimus in conclusionem quam contextus suggerit, & deinde inquiritur in rationem, cur ea tanquam vera sit admitenda, quæ vel ex hypothesi, vel ex definitione, aut propositione quadam anteriore petita, & cum schemate oculis subiecto collata, attento vim consequentiæ confuse percipiendam exhibet, nullo ratiocinio distincte

formato. Ex.gr. Si quis demonstrationem theorematis 6 (§. 156 *Geom.*) expendere voluerit, is conclusiones $x+y$ & $y+o=180$ confert cum figura, ut intelligat, quid affirmetur. ^{Tab. I. Fig. 3.} Quærit deinde, cur hæc propositio sit vera; & §. 148, qui citatur, evolvens, ubi legit angulos deinceps positos junctim sumtos conficere 180 grad., recurrit ad figuram, ex qua ubi confuse percipit, angulos y & x , itemque o & y esse deinceps positos, duas istas conclusiones admittit tanquam veras. Deinde recordatur, quod demonstrandum sit, angulos o & x esse æquales, hanc conclusionem cum illis confert, oculis in figuram confectis. Et ubi videt, eos relinquere, si angulus communis y auferatur, theorematis veritatem admittit; cur hoc faciat quæsitus, respondens, quia ab æqualibus idem aufertur, seu particulariter, quia angulus communis y aufertur; axioma istud, quod eodem ab æqualibus ablato æqualia relinquuntur, nonnisi confuse sibi repræsentans. Unde audias alios respondentes, hoc per se patere. Solenne enim est hominibus, ut per se liquere dicant id, quod per confusas perceptiones verum apparet, cur vero verum sit rationem reddere nequeunt. Admittuntur hinc saltus & hiatus in demonstrando, quæ, initio studii mathematici, subinde haud parum obstant evidentiæ ad plenariam convictionem requisitæ, antequam con-

fusis istis ratiocinationibus adfueſcas, ut familiaritas ſuppleat defectum evidentiæ.

§. 65. Quid interſit discriminis inter noſtram demonſtrationum reſolutionem, & communem eas expendendi morem; in ſeipſo experietur, qui initio ſtudiï mathematici utramque viam ingreditur. Magis autem idem animadvertet, ubi in philoſophia noſtra verſatus, utrumque modum expendendi demonſtrationes inter ſe confert. Quam diverſi autem ſint fructus, quos hinc percipere datur, ex capite ſequenti eluceſcet. Diſta igitur de ſecundo cognitionis gradu acquirendo ſufficiant.

§. 66. Reſtat ut dicamus de tertio cognitionis gradu, quomodo ad eum perveniatur, quantum hic datur. Tertius cognitionis gradus in eo conſiſtit, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio Marte eruere valeamus (§. 1). Si quis demonſtrationes noſtra methodo reſolvit; is modum colligendi ex aſſumptis quæſitum, continuo ratiociniorum nexu, inde perſpicit (§. 38, 41, 47, 52, 54, 59). Quodſi ergo habitum reſolvendi demonſtrationes præſcripto modo ſibi comparaverit; habitu ratiocinandi pollet, quo in veritatibus ſibi adhuc incognitis eruendis opus habet. Quamobrem iſta demonſtrationum reſolutio maximopere quoque commendanda eſt, in uſum tertii cogni-

tionis gradus; ita ut ad tertium appropinquemus, dum ſecundo acquirendo ſtudemus. Et qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat, is multus eſſe debet in demonſtrationibus reſolvendis; cum omnis habitus non modo acquiratur, verum etiam perficiatur, augeatur, & conſervetur continuo exercitio (§. 430, 431 *Pſych. empir.*). Quamobrem cui tertius cognitionis gradus curæ cordique eſt, is acquieſcere non debet in Elementis Arithmeticæ & Geometriæ, ſed ad alias quoque Matheſeos partes progredi tenetur.

§. 67. Si ex aſſumptis ratiocinando, colligendum eſt quod in theſi continetur; ipſa reſolutio demonſtrationis, præſcripto modo facta, loquitur, non opus eſſe ut hoc tanquam cognitum præſupponatur. Quamobrem, ſub generali tantummodo determinatione ſupponi poteſt tanquam quærendum. Unde theoremata convertere licet in problemata, quæ, ſub data in hypotheſi conditione, inveſtigari jubent, quod theſis continet. Ita theorema de æqualitate angulorum verticalium (§. 38) in hoc convertitur problema: Invenire rationem angulorum verticalium ex interſeptione duarum linearum rectarum prodeuntium. Similiter theorema de congruentia triangulorum angulum æqualem cruribus æqualibus comprehenſum habentium (§. 40) in ſequens abit problema: Invenire rationem triangulo-

rum angulum unum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentium; & rationem, quam habent anguli duo reliqui unius ad duos reliquos alterius sigillatim; necnon latus tertium unius ad latus tertium alterius. Theorema arithmeticum, de quotis, ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultantibus, quantitatis divisæ proportionalibus (§. 47) in hoc problema transmutatur: Invenire rationem quotorum, qui prodeunt, si duæ quantitates per eandem tertiam dividuntur. Denique corollarium, quod, catheto uno trianguli rectanguli sumto pro basi, cathetus alter sit altitudo (§. 59) ad problema redigitur hoc modo: sumto catheto uno trianguli rectanguli pro basi; invenire, aut determinare altitudinem ipsius. Discere hinc licet, quomodo quod jam inventum est spectetur ut adhuc inveniendum, & instar problematis proponatur ad exercendam artem inveniendi. Sane omnia theoremata, non modo in Arithmetica atque Geometria, verum etiam in omni Mathesi reliqua, hoc modo ad problemata rediguntur, quæ tanquam inveniendum proponunt, quod jam cognitum est, dum exercitii gratia tanquam adhuc incognitum supponitur.

§. 68. Quodsi theoremata ad formam problematum fuerint reducta, quibus aliquid inveniendum proponitur; data a quæsitis sunt distinguenda. Quoniam in hac conver-

sione aut, si mavis, reductione; quæ in hypothese continentur, sumuntur tanquam data; quod vero in thesi continetur, sub determinatione quædam generali, exhibet quæsitum; data & quæsitæ eodem prorsus modo a se invicem distinguuntur, quo superius thesin ab hypothese separavimus. Ita, in exemplo primo angulorum verticalium, dari supponimus duas lineas sese mutuo intersecantes, ex quarum intersectione necessario oriuntur anguli verticales; quæritur autem, quænam sit horum angulorum ratio ad se invicem. In thesi theorematis, determinatur ratio, quæ inter eos intercedit, nimirum quod sit ratio æqualitatis. Ast hic qualis ea sit, ignotum supponitur & investigari jubetur. In exemplo secundo de congruentia triangulorum, datur in duobus triangulis ratio, quam habet angulus unus unius a ad Tab. I. unum alterius A , ratio crurum $a b$ ad Fig. 6. AB & $a c$ ad AC , nempe quod ubivis sit ratio æqualitatis, seu $a=A$, $ab=AB$ & $ac=AC$: quæritur autem ratio lateris tertii ab ad AB , anguli b ad B , anguli c ad C & totius trianguli $ac b$ ad totum ACB . Immo quæri etiam potest, utrum triangulum $ac b$ sit simile, an dissimile triangulo ACB . In thesi theorematis, denuo determinatur ratio horum omnium ad se invicem, qualis sit; scilicet quod sit ratio æqualitatis, seu $b c = BC$, $b=B$, $c=C$ & $\triangle ac b = \triangle ACB$. Hic vero

vero eadem tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. In exemplo tertio, quod arithmeticum est, dantur duæ quantitates, datur quantitas tertia, per quam istæ dividendæ, ut duo prodeant quoti; quaritur ratio, quam habent quoti hi ad se invicem. In thesi theorematidis eadem determinatur, nimirum quod eadem sit cum ratione quantitatum divisarum; sed hic tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. Denique in exemplo quarto, datur species trianguli MKL, nimirum quod sit rectangulum, datur etiam basis, scilicet quod ea sit cathetus KL; determinari jubetur altitudo. In theoremate seu corollario, quod in problema conversum fuit, altitudo determinatur, nimirum quod ea sit cathetus alter MK: hic vero decum quaritur. Videmus adeo, quomodo data a quæsitis distinguantur.

§. 69. Enimvero non sine ratione data a quæsitis discernuntur. Cum enim id, quod quaritur, per ea quæ dantur, determinetur; ex datis ratiocinando colligendum est quæsitum. Facimus hoc, dum demonstrationem nostro more resolvimus; neque enim in omni ratiocinatione supponitur tanquam cognitum, quod inde tandem colligitur, quando ratiocinatio finitur. Quamobrem patet, ad inveniendum quod quaritur, non aliud requiri, quam ut modo præscripto ratiocinemur. Nostræ igitur reso-

lutiones demonstrationum totæ analyticae sunt; ostendentes modum, quo ex datis colligitur quæsitum, seu ratiocinando pervenitur ad id, quod investigandum erat. Eadem adeo non minus ad tertium cognitionis gradum ducunt, quam ad secundum: id quod non obtinet, ubi communi more demonstrationes expendantur (§. 64). Insigne hic patet discrimen, quod inter nostras demonstrationum resolutiones, & communem eas expendendi modum intercedit; tanti æstimandum, quanto præstantior est gradus cognitionis tertius, quam secundus. Velim huc animum advertant illi, quibus nostræ demonstrationum resolutiones superfluae, aut prorsus pueriles videntur. Quod si exemplum Mathematicorum præclarorum obvertere voveris, qui ad artem eximia inveniendi pervenerunt absque ista demonstrationum resolutione; hoc parum nos movebit. Objectionem enim esse nullam capite sequente ostendemus. Absit itaque ut hoc exemplo ab ista, quam commendavimus, demonstrationum resolutione te deterri patiari.

§. 70. Ex iis, quæ diximus & per anteriora satis manifesta sunt, liquet, quantum fallantur, qui sibi aliisque persuadere conantur, quod demonstrationes syntheticae, quales sunt EUCLIDIS, atque Geometricarum veterum, non simul sint analyticae; consequenter veritates eodem modo

modo ab ipsis reperiri non poterint, quo demonstrantur. Etenim, si ex assumptis legitime ratiocineris, quemadmodum fieri debere ex principiis Psychologiae empiricae demonstrari potest; eodem prorsus modo colligitur quod ignotum est, & ad investigandum proponitur, quo, quod jam notum est, demonstratur. Deditur fidem oculatam, quae in suspicionem adduci minime potest. Memini me olim, cum in Academia Lipsiensi Matheseos atque Philosophiam docerem, antequam ad Professionem Mathematicam in Academia Halensi vocarer, Artem inveniendo juxta regulas Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* explicatam, per exempla exerciturus, Geometriam elementarem ea methodo pertractasse, ut theoremata ad problemata revocarem, & quomodo ex assumptis in hypothesis, tanquam datis, eruatur quod in thesi continetur, tanquam quaesitum, ostenderem, ipsaque problemata tanquam nondum soluta, sed adhuc solvenda proponerem, idemque imitarer in Arithmetica. Unde contigit in Elementis Germanicis Arithmeticae practicae a me pertractari methodo vere analytica; ut ex unica notione numeri rationalis, qui juxta definitionem EUCLIDIS, sistitur tanquam unitatum multitudo, nimirum, juxta methodum geneticam, tanquam ortus ex continua unitatis additione, integram Arithmeticae practicae

deduxerim, tyronum captui accommodato modo: quod tantisper attentis facile animadvertent; iis autem satis superque perspectum est, qui me eandem explicantem audiverunt. Deditur etiam hinc inde specimina quaedam in his ipsis Elementis Latinis, veluti ubi de extractione radicis, & numeris aequae-differentibus agitur.

§. 71. Ex resolutione demonstrationum praescripto modo facta, praeterea videre est, singula ratiocinia, quibus colligitur quod demonstrandum erat, aut, ubi theorema in problema mutatur, quod investigandum fuerat, supponere aliquam definitionem, vel propositionem jam cognitam, quae, vel ope ejus quod assumitur, seu datur, vel auxilio conclusionum jam elicitarum, in memoriam revocatur. Patet etiam ne unicum quidem ratiocinium abesse posse, siquidem ex assumptis inferendum, quod demonstrandum, vel ex datis deducendum, quod investigandum erat. Etsi enim non omnes ratiocinia distincte expendant; in confusis tamen ipsorum notionibus, quae animo obversantur, actu continentur. Quaelibet adeo veritas latens, ubi in apicum producenda, certas veritates cognitatas supponit, quarum si vel una ignoratur, ut quaesitam invenias fieri nequit. Quo plures igitur veritates, hoc est, definitiones & propositiones, tibi perspectae fuerint, eo plures quoque invenire poteris; cum
abun;

abundes principiis, quibus ad ratiocinandum indiges, ex datis inventurus quæsitum. Quamobrem dum secundo cognitionis gradui acquirendo studes, ad tertium quoque acquirendum te præparas, immo aptum reddis. Qui inoffenso pede, in detegenda veritate latente ex iis quæ dantur, progredi voluerit; ei principia, quibus ad ratiocinandum opus habet, familiaria esse debent; ut ea, veluti sponte sua memoriam subcant, quoties eorum usus requiritur. Definitiones itaque, & propositiones, in quarum etiam numerum referuntur resolutiones problematum, cum eo quod fieri jubetur in theorema conversæ, memoriæ firmiter insigendæ sunt ei, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat; ut multus esse debeas in acquirendo gradu primo, antequam ad tertium properes; nisi quod expediat ea, quæ demonstrationum vi tanquam vera affectus es, tanquam inveniendi tibi proponi (§. 67): ita enim tanto facilius & absque ulla molestia, immo potius cum insigni voluptate, memoria mandabis, quæ eidem firmiter inhærere debent, ac una cum gradu secundo tertium acquires.

§. 72. Demonstrationes etiam mechanicae ad tertium cognitionis gradum ducunt; quatenus tentando manifestant incognitum (§. 32): quibus cum æquipolleant exempla in numeris (§. 35), horum etiam usus est in tertio cognitionis gradu

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

comparando. Quoniam tamen demonstrationes mechanicae, perinde ac exempla (§. cit.), veritatem conspiciendam non præbent, nisi in casu singulari, aut ad summum in particulari (§. 33); in iis non acquiescendum, ne cum periculo errandi a singulari ad universale argumenteris. Quamobrem propositio in casu singulari, vel particulari, detecta sumi debet tanquam universalis, & in problemam convertenda; ac deinde inquirendum, num, ex datis legitime ratiocinando, universaliter erui possit, quod in casu singulari, vel particulari, verum cognovisti. Ita constat olim PYTHAGORAM animadvertisse, si quadratum numeri 3, quod est 9, addatur quadrato numeri 4, quod est 16; summam 25 exhibere quadratum numeri 5. Quamobrem cum perpenderet, si latus unum trianguli rectanguli fiat trium, alterum vero quatuor partium, hypothensam esse partium quinque; consequenter quadratum hypothensæ æquale esse quadratis reliquorum laterum; suspicio ipsi enata est, num hæc sit proprietas trianguli rectanguli, ut quadratum hypothensæ sit æquale quadratis laterum simul sumtis. Non diffiteor levem admodum hanc esse suspensionem, si secundum regulas probabilitatis æstimeretur; sed levis etiam suspicio ad investigandum verum invitat. Quamobrem ubi super trianguli rectanguli lateribus fuerit constructa quadrata, superac-

Z

ceden-

cedente præparatione ad comparationem quadrati hypotenusæ cum quadratis reliquorum laterum requisita, eo modo detegi poterat veritas, quo theorema istud demonstravimus (§. 417 *Geom.*). Dico veritatem theorematum hoc modo detegi potuisse: cum enim constet, ipsum non uno modo demonstrari posse, & demonstrationem unamquamque, nostro more resolutam, monstrare modum ad veritatem liquidam perveniendi (§. 70), non una patebat ad eandem viam. Demonstrationes itaque mechanicæ, si tanquam artificium heuristicum adhibeantur, haud raro faciunt, ut de problemate quodam cogites, cujus cogitatio alias animum non subiret.

Tab. I.
Fig. 9.

§. 73. Exempla, quæ in superioribus dedimus, dicta confirmant. Ita si ducas lineas AB & CD se mutuo secantes in E, ut prodeant anguli verticales α & x ; ac, vi demonstrationis mechanicæ, eorum æqualitatem deprehendas (§. 32); ubi porro sumis æqualitatem angulorum verticalium tanquam universaliter veram, & hoc theorema in problema convertis (§. 67), eodem modo eruetur veritas in omni casu, quo theorema hoc demonstrandum esse ostendimus (§. 38, 70). Similiter si construas triangulum quodcunque ACB, & deinde alterum acb , ea conditione, ut fiat $ab = AB$, angulus $a = A$, & $ac = AC$; atque triangulo acb exciso ex charta, in qua

Tab. I.
Fig. 6.

delineatum fuerat, ita ponas super altero ACB, ut punctum a in A, & latus ab in AB cadat; atque videas, triangulum acb esse alteri ACB æquale, & esse præterea $bc = BC$, $c = C$, atque $b = B$; ubi hoc sumis tanquam universaliter verum, & theorema in problema convertis (§. 67), eodem prorsus modo ratiocinando assequeris, quod quæritur, quo theorema demonstrandum esse supra præcepimus (§. 41, 70). Me tacente patebit, quomodo eadem valeant de exemplo, quod in numeris exhibet theorema, de quotis, ex divisione duorum numerorum per eundem tertium resultantibus, numeris divisis proportionalibus; ut plura eam in rem dici non sit opus. Obiter observo, demonstrationem mechanicam de congruentia triangulorum, ubi ad notionem congruentiæ animum advertis, simul insinuare principia, quibus opus est ad ratiocinandum, sive in demonstratione synthetica, sive in investigatione ejus, quod quæritur; ut adeo idea confusa, quæ oculis observatur, integram demonstrationem contineat, ab ea abstrahendam, si ad notionem distinctam revocetur. Immo notionem theoremati respondentem esse universalem agnoscimus, si in rationem coincidentiam eorum, quæ in triangulis discernuntur, inquirimus; quatenus patet eandem rationem redire in quolibet casu. Coincidit hic demonstratio mechanica cum exemplis, quibus univer-

saliter

saliter repræsentavimus numerorum quadratorum & cubicorum genesin (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*). Ex. gr. in exemplo numerico, 16 quadratum numeri 4, quæ est pars secunda radices, prodit, quia 4 ducitur in seipsum (§. 246 *Arithm.*). Idem vero cum fiat in quocunque exemplo alio, eadem quoque semper adest ratio, cur quadratum partis secundæ prodire debeat. Similiter in exemplo geometrico, punctum *b* cadit in *B*, quia *a* ponitur super *A*, & *ab* super *AB*, estque $ab = AB$. Singula vero cum eodem modo sese habeant in exemplo quocunque alio, eadem semper adest ratio, cur punctum *b* in *B* cadere debeat. Principium nimirum ontologicum est, quod posita ratione sufficiente ponatur etiam id, quod propter eam potius est quam non est (§. 118 *Ontol.*): quod principium in Arte inveniendi multum habet usum.

§. 74. Constat ex superioribus (§. 40), hypothesein solam non semper sufficere, ut inde colligatur, quod erat demonstrandum; sed præterea accedere debere præparationem, qua superadduntur iis, quæ in hypothesi sumuntur, adhuc alia, eadem non invita sumenda, ut ex sumtis colligi possit, quod thesis continet. Quoniam theorematis in problemata conversis, quibus investigandum proponitur, quod thesis insinuat (§. 67); ratiocinatio, ex assumtis tanquam datis, eodem modo

cedit ad colligendum quæsitum, quo, in resolutione demonstrationis præscripto modo facta, colligitur quod demonstrandum erat (§. 70); facile intelligitur, præparatione eadem non minus opus esse in veritate investiganda, quam in jam inventa demonstranda. Quando præparatione opus sit, quivis animadvertit; nimirum, quando animum advertens ad assumpta, deprehendit deesse principia, quorum vi ex iis elicitur conclusio una, vel plures eliciuntur, prout casus tulerit. Hic itaque dispiciendum num, præter ea quæ hypothesis continet tanquam determinantia id quod thesi continetur, sumi adhuc possint alia istis minime repugnantia; quibus accedentibus, hypothesis apta efficitur ad conclusiones, vi principiorum anteriorum, inde inferendas. In demonstrationibus præparatio ista non demum quærenda; sed Autor, qui theorema demonstrat, eam supplet. Ast ubi theorema per modum problematis proponitur; præparatio non tanquam cognita spectari potest, sed adhuc incognita supponitur; non tanquam jam inventa considerata venit, sed tanquam quærenda spectatur. Ad tertium igitur cognitionis gradum adspirans inquirere tenetur, quomodo præparatio innotescere potuerit. In exemplo de triangulis, angulum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentibus, constat, datis cruribus cum angulo intercepto, construi posse

triangulum; consequenter per crura data & angulum interceptum datum triangulum, non minus integrum, quam latus ejus tertium, eidemque adjacentes duos angulos reliquos determinari; adeoque in hypothesi nihil eorum deficere, quæ assumenda sunt, ut inde colligi queant, quæ per ea determinantur. Quoniam vero quaritur triangulorum ratio, ratio lateris tertii unius ad tertium alterius, & ratio angulorum ad idem adjacentium in uno ad angulos eisdem adjacentes in altero sigillatim; ratio vero omnis vel æqualitatis vel inæqualitatis est (§. 130 *Aritih.*); per modum hypotheseos tantisper sumitur, rationem æqualitatis hic obtineri. Hæc hypothesi cum examinanda sit, utrum veritati consentanea sit, nec ne; quaritur quomodo æqualitas innotescat. Quamobrem, cum, juxta notionem communem, æqualitas æstimetur ex congruentia, notio congruentiæ insinuat triangulum unum super altero poni debere. Atque adeo in præparationem incidimus. Vides adeo, quomodo notiones communes insinuare queant præparationem: id quod tamen non semper procedit, cum non omnia ex notionibus communibus immediate deduci possint.

§. 75. Quoniam tamen, per naturam animæ impossibile est, ut quicquam nobis in mentum veniat, nisi quatenus antea cognita, beneficio eorum quæ nunc cogitamus, vel in

memoriam revocantur, vel ratiocinationem ingrediuntur; quæ ex notionibus communibus immediate deduci nequeunt, ex aliis utique notionibus derivanda. Quamobrem ut hoc appareat, sumamus exemplum alterum, quod usi sumus in superioribus (§. 54) in demonstratione problematis, de inveniendis media proportionali inter duas rectas datas, in hoc theorema conversi: Si ex quocunque puncto diametri excitetur perpendicularis peripheriæ circuli occurrens, erit ea inter segmenta diametri perpendicularis. Patet hic demonstrandam esse proportionem linearum AB, BD & BE ex eo, quod BD sit ad AE perpendicularis & ADE semicirculus. Quamobrem cum constet, triangula similia habere latera æqualibus angulis opposita proportionalia; consequenter linearum proportionem ex triangulorum similitudine colligi posse; ideo liquet, dispiciendum esse, annon lineis quibusdam ductis, ut prodeant triangula, obtineri possint triangula similia. Ducuntur itaque subtensa arcuum AD & DE; quia sic prodeunt triangula ADB, ADE & DBE, quæ, per modum hypotheseos, sumuntur tanquam similia, ab eo qui veritatem demum investigat; & deinde experimur, num eorum similitudo demonstrari possit; consequenter num hæc bene sumta fuerit. Quodsi modum, quo in hanc præparationem incidis, distincte pendis; evidens est, id quod demon-

Tab. II
Fig. 10.

stran-

strandum est ad animum revocare similitudinem triangulorum, cujus notionem antea tibi acquisivisti ; & ex hypothesi theorematis patet , ductis rectis AD & DE, obtineri triangu-
la, quæ utrum similia sint, nec ne, an-
gulos eorum inter se conferenti in-
notescit ; cum ex anterioribus con-
stet, triangulorum similitudinem ab
æqualitate angulorum pendere ; con-
sequenter per eandem probari. Ni-
mirum in inveniendi conjecturis lo-
cus est ; ubi ex iis, quæ dantur, vi
principiorum tibi perspectorum, ra-
tiocinando colligi nequit quod quæ-
ritur ; quemadmodum in demonstnan-
da æqualitate angulorum verticalium
succedit (§. 38). Cum vero con-
jectando, nonnisi casu, prima statim
vice incidamus in veritatem ; ideo
haud raro variis modis tentanda est
præparatio , antequam in eam inci-
das, quæ recta est : id quod satis
experiuntur, qui veritati proprio mar-
te eriuendæ operam navant. Enimve-
ro de iis hic dicere disertius, quæ
ad Artem inveniendi spectant, nostri
non est instituti, ubi tantummodi do-
cemus, quomodo ad præparationem
pervenire potuerint, qui bene posi-
tam retinuerunt. Bene autem posi-
tas esse eas, quæ in demonstrationi-
bus adhibentur, ipse successus in de-
monstrando probat. Non tamen
existimandum est , quasi earundem
inventores prima statim vice in eas
inciderint, quemadmodum exemplum
modo datum insinuare videtur ; sed

potius tenendum, tentatis haud raro
pluribus sine successu, eam retentam
fuisse, quam successus approbat.
Sed talia, suo tempore, demonstraturi
sumus a priori, ex ipsa animæ natura,
in Arte inveniendi ; si quidem Deo vi-
sum fuerit corporis animique vires eo
usque conservare, donec ad hanc te-
lam pertexendam ordo nos deducet.

§. 76. Hic non aliud agendum est,
quam ut ostendamus, quomodo inqui-
ramus in modum, quo ad præparatio-
nes in Elementis nostris occurrentes
perveniri licuerit ; reddendo ratio-
nem, cur hoc modo fiat, tum ex
conditione propositionis demonstnan-
dæ, tum ex anterioribus, quæ tan-
quam cognita & nobis familiaria sup-
ponuntur. Quodsi ergo, ad imita-
tionem eorum quæ, exempli loco,
in medium attulimus (§. 74, 75),
præparationes omnes in Elementis
nostris expendere libuerit ; nulli du-
bitamus lucem affulsuram sufficientem
iis, qui ad tertium cognitionis gra-
dum adspirant. Quibus vero in se-
cundo acquiescere visum est, illi hac
disquisitione non habent opus, huic-
que labori superfedere possunt ac de-
bent. Sufficit enim iis præparatione,
prouti præscribitur, ad hypothesin ac-
cedente, demonstrationem legitime
procedere, qua animus convincitur
verum esse, quod erat demonstnan-
dum.

§. 77. Illud adhuc superest, ut
doceamus, quomodo procedendum
sit, si resolutionem problematis suppo-

nis tanquam incognitam, adeoque eandem consideras tanquam inveniendam. Ex hac enim hypothefi, perinde ac in theorematis, vi anteriorum ratiocinando, colligendum, quid fieri debeat, ut facias, quod erat faciendum. Sumamus exempli loco problema de linea recta per datum punctum alteri rectæ parallela ducenda. Supponamus factum, quod petebatur; nimirum rectam MN, quæ per datum punctum V transit, alteri RS, quæ data supponitur, esse parallelam. Quodsi hoc sumis; ex anterioribus succurrit: perpendiculara inter duas parallelas intercepta æqualia esse (§. 226 *Geom.*). Unde infertur: duo quæcunque perpendiculara inter rectas MN & RS æqualia sunt. Porro constat, quod V sit punctum extra lineam RS datum. Huc animum advertenti succurrit (§. 216 *Geom.*), a dato puncto extra lineam datam perpendicularem demitti posse. Unde infertur, posse quoque ex puncto V ad rectam RS demitti perpendicularem, nempe VK. Succurrit porro, ubi perpendis duas requiri lineas perpendiculares inter rectas MN & RS, ut per earum æqualitatem pateat parallelismus ipsarum, per demonstrata, ex quovis puncto intra rectam datam assumpto erigi posse perpendicularem (§. 212 *Geom.*). Unde denuo infertur; ex puncto quocunque lineæ RS, veluti T, erigi posse perpendicularem TA. Jam, quia MN supponitur ipsi RS

parallela, & VK atque TA sunt perpendiculara inter hæc parallelas intercepta, adeoque æqualia, per demonstrata; resolutio, quæ quærebat, jam patet. Nimirum 1^o. ex puncto dato V demittenda est perpendicularis VK ad rectam RS: 2^o. ex puncto quolibet T erigenda est perpendicularis TA priori æqualis: 3^o. per duo puncta A & V ducenda est recta MN. Hæc ipsa est resolutio, quæ in Elementis nostris legitur (§. 258 *Geom.*).

§. 78. Patet autem, si hoc modo in resolutionem problematis inquiris; hinc simul modum problema in theoremata conversum demonstrandi manifestum esse. In ea enim investiganda uteris principiis, quibus in demonstrando habes opus: id quod ex collatione eorum, quæ modo dicta sunt, cum resolutione demonstrationis superius facta (§. 52) patet. Demonstrationes nimirum, una cum resolutione, una eademque opera deteguntur; ut adeo non opus sit, nisi ut, ubi synthetice proponere volueris quæ invenisti, ea, quæ faciunt ad resolutionem, separes a ceteris, quæ ad demonstrationem spectant. Subinde tamen etiam in Elementis nostris resolutionem & demonstrationem una exhibuimus; quemadmodum in hoc ipso casu factum, quem exempli loco produximus; & in aliis, ubi prolixior est demonstratio, veluti in problematis de extrahenda radice quadrata & cubica (§. 269, 282. *Arithm.*).

§. 79. Demus adhuc exemplum aliud. Supponatur itaque resolutio problematis 16 (§. 212 *Geom.*) de linea perpendiculari, ex dato in recta data puncto, excitanda. Data sit recta ML, & in eo detur punctum G; ex hoc puncto G ducenda est linea, quæ sit ad rectam ML perpendicularis. Ponatur factum, quod petebatur, nempe ducta perpendicularis GI. Succurrit ex anterioribus: Si linea recta ducenda, duo dari debent puncta, ex quorum uno ad alterum ducitur recta (§. 121 *Geom.*). Unde infertur: Præter punctum G, quod datur, determinandum esse adhuc punctum aliud I, ut recta GI duci possit. Liquet igitur, totum negotium in eo versari, ut punctum I determinetur. Ponamus denuo hoc esse factum. Sumitur itaque: Recta ex puncto I ad punctum G ducta perpendicularis est. Succurrit principium: Si recta quædam fuerit ad alteram perpendicularis, anguli deinceps positi æquales sunt (§. 79 *Geom.*). Unde infertur: Anguli MGI & IGL æquales sunt. Sumatur IG pro crure triangulorum contiguum communi. Patet triangula ista habere angulum unum æqualem &, crus unum ejus esse æquale, nempe idem. Succurrit ex anterioribus principium (§. 179 *Geom.*): Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem duobus cruribus sigillatim æqualibus comprehensum, etiam latus tertium unius æquale erit lateri tertio alterius, At-

que hinc infertur: Si præterea fiat $GK=GH$, erit etiam $KI=HI$. Atque adeo liquet, si fiat $GK=GH$, hoc est, si ex puncto H capiatur utrinque æquale intervallum, ex punctis K & H eodem intervallo quocunque alio (cum hic longitudinis GI nulla habenda sit ratio, sed tantummodo situs ad rectam ML) per intersectionem determinari posse punctum I, quod quærebat, ut recta IG duci possit. Denuo manifestum est, resolutionem problematis analyticam simul continere & ejus demonstrationem. Quodsi unam ab altera separe, utraque prodibit, qualis in Elementis nostris extat. Obiter moneo, inter principia heuristica in Geometria referendum esse, ut dispiciamus, num triangula congruentia & similia determinari possint, quorum ope procedat ratiocinatio ad investigandum quod quæritur, vel demonstrandum quod asseritur requisita. Quomodo in hoc principium inciderint Geometræ, nostrum jam non est disquirere. Erit alibi de eo dicendi locus.

§. 80. Subinde resolutiones problematum innotescunt sola attentione ad theoremata inventa, ad quas nulla patet via, si hæc tanquam incognita supponuntur. Istiusmodi est problema de inveniendâ linea media proportionali inter duas datas. Etenim si supponimus lineam BD esse inventam, quæ inter duas datas AB & BE media proportionalis est, succurrit

Tab. I.
Fig. 10.

currit tantummodo vi definitionis (§. 155, *Aritlm.*): Si fuerint tres lineæ continue proportionales, erit prima ad secundam, ut secunda ad tertiam. Atque hinc infertur: Recta data AB est ad inveniendam BD ut, hæc ipsa BD ad alteram datam BE. Etsi hic ad similitudinem triangulorum tanquam principium heuristicum confugas, & sumas BD esse eus commune duorum triangulorum similium ABD & BDE, videasque, si BD fuerit ad AE perpendicularis, angulum x angulo y æqualem construi debere, quod etiam fieri posse constet (§. 208 *Geom.*); quoniam tamen BD determinatæ magnitudinis est, non constet, quantus fieri debeat angulus x , ut recta AD attingat punctum D, quod queritur, atque ita determinandum, ut crus anguli x secet AE in puncto E. Nihil itaque conficies, nisi supponas theorema tanquam cognitum: Si ex puncto quocunque B diametri AE erigatur perpendicularis peripheriæ in puncto D occurrens; erit ea inter segmenta diametri AB & EB media proportionalis. Ubi verò hoc theorema tanquam notum sumitur, resolutio problematis, de inveniendâ rectâ inter duas alias datas mediâ proportionali, sua quasi sponte sese offert. Etenim non multa attentione opus est, ut animadvertas rectas datas AB & BE in eandem rectam transferri, & super eadem semicirculum describi posse; infertur vi corollarii theoremat

primi (§. 136 *Geom.*). Neque ullum est dubium, quin inventori resolutionis hujus problematis ante innotuerit theorema istud, quàm de resolutione cogitaret. Non est quod excipias, nos theorema istud non præmississe in Elementis nostris problemati huic. Etenim si ita visum fuisset, præmitti poterat: sed in synthesi non necessarium erat. Dum enim demonstranda est resolutio, problema in istud theorema convertitur, atque demonstratio ejus adjicitur, quemadmodum ex superioribus constat (§. 54, 55). Non nego fieri quoque potuisse, ut resolutio eadem deduceretur ex aliqua proprietate trianguli rectanguli, scilicet ex hoc theoremate: Si ex angulo recto D trianguli rectanguli ADE demittatur ad hypotenusam AE perpendicularis DB; erit hæc ipsa DB mediâ proportionalis inter hypotenusæ AE segmenta AB & BE. Quod si enim supponas tanquam notum, quomodo super data hypotenusâ construi possit triangulum rectangulum: resolutio problematis nostri non minus in aprico est. Plures haud raro patent viæ ad eandem veritatem, & prouti vel hæc, vel alia principia, tanquam cognita supponuntur, unus hanc, alius aliam calcât viam. Mihi tamen probabilius est, ex proprietate circuli potius, quam trianguli rectanguli, resolutionem de qua nobis sermo est fuisse deductam. Enimverò non opus est, ut ea

de re contentionis ferram cum aliis reciprocemus. Ubi enim veritates tanquam quærendæ proponuntur, quæ jam inventæ sunt, sufficit ingredi viam, qua recto facultatum cognoscendi usu ad eas pervenire datur.

§. 81. Dantur integræ disciplinæ mathematicæ, quas inter Algebra eminet, aut, si mavis, Analysis mathematica, quibus docetur, quomodo veritates mathematicæ sint inveniendæ. Nemo non intelligit, ad tertium gradum cognitionis mathematicæ adspiranti inprimis opus esse, ut in iis addiscendis assiduus sit. Enimvero ea de re nobis demum dicendum erit, ubi ad specialia descendemus. Hic enim nonnisi generalia tradimus, quæ in qualibet Matheseos parte observanda sunt; etsi tantummodo exempla ex Arithmetica & Geometria dederimus.

§. 82. Restat denique ut adhuc dicamus, quomodo definitiones expendere debeat, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat. Facile apparet, inquirendum hic quoque esse, quomodo definitiones fuerint detectæ, aut inveniri saltem potuerint. Quamobrem id nobis agendum est, ut ostendamus, quomodo hæc inquisitio sit instituenda. Definitiones esse duplices, nominales, & reales, in Commentatione de methodo mathematica monuimus (§. 17, 18); ubi etiam docuimus, quomodo tum ad

nominales (§. 19 & seqq.), tum ad reales perveniatur (§. 25 & seqq.). Juxta regulas igitur ibidem traditas definitiones ad examen revocandæ: quod quomodo fiat, uno alteroque exemplo docendum.

§. 83. *Congruentia* definitur, quod sit coincidentia terminorum, & *congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Definitio hæc explicat, unde congruentiam agnoscere possis in duabus magnitudinibus, veluti in duabus lineis, vel superficiebus. Quamobrem cum definitio nominalis sit, cujus beneficio res agnoscitur, & ab aliis distinguitur (§. 17 *Comment. de Meth.*); definitionem hanc nominalem esse hinc colligitur. Primus modus perveniendi ad definitiones nominales consistit in eo, ut ad rem præsentem quam percipimus animum attendamus, & cum cura distinguamus quæ distingui possunt; eaque fini singula primum sigillatim consideremus, mox vero eadem inter se conferamus. Quodsi inquiramus, utrum hoc modo definitio congruentiæ inveniri poterit, nec ne; hoc modo eam detectam esse deprehendes. Sumantur, ex. gr. duo fila ejusdem longitudinis coextensa, dicuntur ea sibi mutuo congruere. Quodsi quæsieris, cur sibi mutuo congruere dicantur; non aliam reddere potes rationem, quam quod ab eodem termino incipiant, & in eodem desinant;

seu quod extrema eorum coincident, ipsa quoque etiam coincident quoad longitudinem. Atque adeo patet, ex lege ratiocinandi (§. 349 *Log.*), coincidentiam terminorum hic dici congruentiam. Similiter notio lineæ rectæ abstrahitur a filo extenso, cujus crassities, cum diminui posse concipiatur in infinitum, donec tandem evanescat, a notione confusa ejus abstrahitur notio lineæ in genere, quod sit longitudo latitudinis expers: quæ est definitio *Lineæ* in genere, quam dedit EUCLIDES. Quod si jam notionem rectæ confusam ad distinctam revocare volueris, distinguenda in ea sunt, quæ distinguere possunt; eaque fini singula primum sigillatim considerari, & mox inter se conferri debent (§. 19 *Metb.*). Cum in lineæ non incipiant nisi puncta, quæ a se invicem distinguere possunt, & situs eorundem, quem ad se invicem habent; recta a curva differre nequit, nisi situ punctorum quæ in ea assumuntur. Advertit hoc EUCLIDES: unde *Rectam* definit, quod sit linea ex æquo interjacens inter sua extrema. Enimvero cum huic punctorum situi nulla respondeat notio, nisi confusa, quam verbis ex æquo interjacere inter sua extrema indigitat, eadem nempe cum notione confusa lineæ rectæ; nihil explicuit, nec definitione sua uti potuit. Nos igitur assumentes partem quamcunque rectæ AC, eamque conferentes cum tota AB, inquisivimus, num

quid in situ punctorum, quæ in parte assumuntur, deprehendi possit, quod diversum sit a situ punctorum in toto assumtorum. Ubi nullam diversitatem reperiri posse deprehendimus; memores definitionis similitudinis (§. 24 *Arith.*), *Rectam* definivimus per lineam, cujus pars quæcunque toti similis. Nimirum, vi illius definitionis, in parte ad totam collata, præter magnitudinem nihil observare datur, quo ea a tota distinguere possit. Quamobrem cum Linea curva sit, quæ recta non est; eademque, supposita definitione rectæ, hoc modo definiri poterat (*not.* §. 85 *Ont.*); nos in definitionem nostram *Lineæ curvæ* incidimus, quod nimirum sit linea, cujus partes toti dissimiles (§. 22 *Geom.*). Ita si assumamus duos peripheriæ arcus quoscunque AC & AB, ducasque chordas cognomines; situm puncti C ad A & B ad A distinguere licet per diversam rationem subtensarum ad diametrum; neque enim arcuum subtensæ omnes eandem ad diametrum rationem habent, ut adeo pars arcus ab arcu integro, hoc modo, distinguere possit. Tacemus modos alios distinguendi situm punctorum in parte; consequenter partem ipsam, a tota. Geometriæ sublimioris gnari non ignorant hoc principio distinguere curvas a se invicem. Sed cum seniores Geometriæ in recta a curva distinguenda hæsitaverint, definitiones utriusque daturi; non opus est ut tyrones, in modo

modo quo eadem detecta fuerunt inquirendo, industriam suam fatigent. Tum enim idem manifestus erit, ubi in Geometria curvarum fuerint versati.

§. 84. Similiter videre licet ubi vis, lineam rectam cum altera in eodem puncto concurrentem, diversimode ad se invicem inclinari posse. Unde, non attenta inclinationis diversitate, enata est definitio *Anguli* in genere (§. 54 *Geom.*), quod scilicet sit duarum linearum in puncto uno concurrentium mutua inclinatio. Quodsi ergo recordatus, a puncto quovis ad punctum quodvis lineam rectam duci posse (§. 20 *Geom.*), crura anguli CAB recta CB jungi concipias; reflectendo super iis, quæ in figura, quæ sic prodit, distinguuntur; reperitur (§. 19 *Meth.*) definitio trianguli in genere, rectilinei scilicet; quoniam, in Geometria elementari, cum aliis nullum nobis est negotium, quod sit figura tribus lineis rectis terminata (§. 87 *Geom.*). Quodsi perpendis, in hac definitione non determinatam esse rationem laterum AB, BC & AC; & recordaris rationem omnem vel esse æqualitatis, vel inæqualitatis (§. 130 *Arith.*); addendo determinationem rationis laterum ad se invicem, nascuntur triangulorum species (§. 22 *Meth.*). Nimirum, si tria latera habeant ad se invicem rationem æqualitatis, seu omnia inter se æqualia sint; definitio præsto est *Trianguli æquilateri* (§. 88. *Geom.*).

Si fumis eadem habere ad se invicem rationem inæqualitatis, hoc est, singula inæqualia esse; definitionem habes *Trianguli scaleni* (§. 90. *Geom.*). Denique si fumis latus unum habere ad unum reliquorum rationem æqualitatis, ad alterum vero rationem inæqualitatis, seu duo nonnisi latera æqualia esse; in definitionem *Trianguli æquicruri* incidis.

§. 85. A definitione trianguli æquilateri, quod tria latera æqualia habet, abstrahitur definitio *Figura æquilatera* in genere, omiſſa determinatione numeri laterum (20 *Meth.*); quod scilicet sit figura, cujus latera singula inter se æqualia sunt (§. 88 *Geom.*). Atque adeo satis patet, quomodo, ope regularum in Commentatione de Methodo mathematica explicatarum, detecta fuerint, aut saltem detegi possint, definitiones nominales Geometriæ, immo in qualibet Matheſeos parte. Idem enim quoque succedere in definitionibus aliis experietur, qui tentare voluerit.

§. 86. Sufficiant igitur hæc dixisse de definitionibus nominalibus: restat ut nonnulla addamus de realibus. Ex. gr. lineam quandam rectam LM, juxta ductum alterius rectæ LO, motu sibi semper parallelo, hoc est, ut in quolibet situ semper parallela sit, deorsum moveri posse constat. Quamobrem, si hoc fieri fumis; prodit definitio *parallelogrammi* in genere. Similiter rectam quandam AC, circa punctum fixum C, in gyrum

Tab. I.
Fig. 15. rum agi posse, donec redeat ad terminum A, unde digressa fuerat, per se liquet, & per notiones communes confirmatur. Quodsi ergo hoc sumis; prodit definitio *Circuli* realis (§. 25 *Meth.*).

Tab. I.
Fig. 3. §. 87. Eadem definitiones reperiri quoque potuerunt, præsuppositis definitionibus nominalibus. Parallelogrammi definitio nominalis est, quod sit figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela (§. 102 *Geom.*). Quodsi concipias rectam LM juxta ductum alterius rectæ moveri deorsum; patet figuram describi quadrilateram. Quodsi linea ponatur sibi semper manere parallela; liquet latus ON opposito LM esse parallelum, & rectas quascunque parallelas inter latera OL & MN interceptas esse æquales. Enimvero si lineæ parallele æquales intra easdem lineas comprehendantur, erunt quoque hæ inter se parallele (§. 257 *Geom.*). Unde inferitur, Latus quoque MN esse opposito LO parallelum. Evidens adeo est, figuram, quæ describitur, motu lineæ rectæ LM, juxta ductum alterius rectæ LO, sibi semper parallelo, esse quadrilateram & habere latera opposita parallela. Atque sic liquet, figuram hoc modo descriptam esse; vi definitionis nominalis, parallelogrammum. Nimirum, si definitio nominalis parallelogrammi sumitur; parallelogrammum dici nequit nisi figura, quæ & quadrilatera est, & latera oppo-

sita æqualia habet. Quamobrem ubi definitionem realem, hac supposita, dare volueris; ita omnino concipienda, ut nominali non repugnet ista genesis, sed ex genesis figuræ potius demonstrari possit, nominalem definitionem eidem convenire. Quodsi excipias, supponi hic, quæ demonstranda ante sunt, quam definitionem realem ex nominali deducere valeas, nimirum quod lineæ parallele inter duas lineas interceptæ æquales esse debeant, ut hæ quoque inter se sint parallele; objectio nulla est. Ecquis enim dixerit, salva veritate, definitiones reales ex nominalibus deducendas esse, nulla theoria præsupposita, quæ demonstranda ante venit. Quin potius ipsum exemplum, quod modo dedimus, contrarium loquitur. Definitiones nominales sumere licet, antequam theoremata demonstrantur. Sumere quoque licet reales, antequam demonstrantur propositiones, modo genesis intelligatur possibilis absque demonstratione; scilicet ut nihil fieri jubeatur, quod absque demonstratione fieri posse non constet. Sed figuram, quæ per genesis prodit, esse eandem, cujus definitio nominalis datur, utique demonstrandum. Quodsi ergo demonstratio supponit principia, quæ absque demonstratione vera esse non perspicitur; illa utique ante demonstranda sunt, quam figuram genitam cum ea, cujus definitio nominalis datur, eandem esse ostendi potest.

Tab. L.
Fig. 15.

§. 88. Facilius ex definitione nominali detegitur realis *circuli*, non suppositis aliis, quæ de circulo demum demonstranda. Nominalis circuli definitio est, quod sit figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C ductæ rectæ sunt inter se æquales. Quodsi sumis, quod in hac definitione continetur, circulum terminari linea curva in se redeunte; atque succurrit, vi intentionis inveniendi genesin curvæ, seu detegendi motum, quo describitur, describi lineam, si punctum ab uno termino ad alterum moveatur (§. 10 *Geom.*); facile animadvertis, lineam, qua terminatur circulus, describi, si punctum describens continuo motu redeat ad terminum A, unde digressum fuerat. Quodsi porro sumis, vi definitionis nominalis, rectas ex singulis lineæ istius punctis ad centrum C ductas esse æquales; consequenter punctum describens A esse alterum extremum lineæ rectæ, cujus alterum extremum fixum hæret in centro C; patet, si punctum A a termino suo dimoveri debet, ut tamen alterum rectæ AC extremum in puncto C sit fixum; rectam AC circa punctum fixum C moveri debere. Vides itaque circulum describi, si recta quædam AC circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ ipsa

est circuli definitio realis deducta ex nominali, nulla præsupposita theoria circuli, sed tantummodo assumtis, quæ in definitione nominali continentur.

§. 89. Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* definitiones reales mirifice deprædicat, iisque omne tribuit pretium, nominalibus nullo relicto. Enimvero, quemadmodum vidimus, definitiones reales ex nominalibus deduci posse; ita vicissim nominales deducuntur ex realibus: id quod in circulo levi attentione animadvertitur. Exempla alia dedimus in solidis (§. 456 & *seqq. Geom.*). Et si autem non negemus, ex definitionibus realibus haud raro facilius deduci, quæ ex nominalibus operosius demonstrantur, adeoque ad inveniendum eas esse admodum utiles; nominales tamen realibus præstant in rebus ad sua genera suasque species reducendis: id quod in demonstrationibus & in applicatione theoriæ ad casus obvios maxime usui est. Quamobrem definitiones nominales non sunt contemnendæ, immo certo sine realibus præferendæ; quæ ad res obvias agnoscendas & ab aliis distinguendas non adeo commodæ sunt, quam nominales; id quod ipsa circuli atque parallelogrammi definitione reali docetur.

CAPUT II.

De Modo instituendi studium Matheſeos intellectus perficiendi cauſa.

§. 90. **N**on omnes in addiſcenda Matheſi eundem ſibi ſcopum præſigunt. Poſtquam igitur in genere docuimus, quomodo Matheſis ſit tractanda, ut eam conſequaris cognitionem, quam intendis; nunc porro diſpiciendum eſt, quinam per Matheſeos ſtudium intendi poſſint fines, & quænam obſervanda ſint ei, qui finem intentum conſequi voluerit. Eminent inter hoſce fines perfectio intellectus, quæ conſiſtit in habitu rectum faciendi facultatum cognoscendi uſum in veritate cognoscenda. Hunc finem intendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoscibilem adſpirant, ſive philoſophari voluerint, ſive Theologiæ, Jurisprudentiæ, ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de cauſa, veteres neminem ad Philoſophiam addiſcendam admittere voluerunt, niſi Geometriæ peritum; cum olim Geometria ſola accurata methodo tradetur. Optandumque erat, ut idem mos in ſcholas noſtras introduceretur. Rationes perſpiciuntur ex iis, quæ mox tradituri ſumus, & per tranſcennam proſpiciuntur vi eorum quæ modo diximus. In veritate

enim cognoscenda, rectum facere tenetur facultatum uſum, qui a veritatis tramite deſlectere noluerit.

§. 91. Tres ſunt intellectus operationes, notio, judicium, atque diſcurſus, ſive ratiocinium; & hiſce ſuppetitas ferunt facultates cognoscendi inferiores, ſenſus, imaginatio, atque memoria, una cum facultatibus intermediis, attentione ac reflexione, per quas ab inferioribus ad ſuperiorem fit tranſitus. Quæ omnia ſatis manifeſta ſunt ei, qui Psychologiam empiricam cognitam atque perfectam habet. Qui adeo intellectum perficere voluerit, is rectum operationum intellectus uſum facere tenetur; ac in iis eliciendis uti debet facultatibus inferioribus atque intermediis. Quamobrem ſtudio Matheſeos perficitur intellectus; ſi eodem habitu operationibus intellectus recte utendi, & in iis eliciendis rectum facultatum cognoscendi inferiorum ac intermediarum uſum faciendi acquiritur.

§. 92. Non igitur nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, ſed accuratæ methodo, qua traduntur mathemata, fruſtus hic debetur. Ejus adeo participes non ſunt, qui methodum accuratam

curatam insuper habent. Quamobrem cum Mathesis, perficiendi intellectus causa, potissimum in scholas sit introducenda; parum adolescentibus & juvenibus consulunt, qui ut desidiis placeant, methodi nullam rationem habent, sibi magis, quam ipsis prospicientes.

§. 93. Qui in primo cognitionis gradu acquiescit, non alium finem sibi propositum habet, quam ut veritatem ab aliis propositam intelligat (§. 1); consequenter non aliud intendit, præterquam veritatum mathematicarum nudam cognitionem. Quoniam igitur nuda veritatum mathematicarum cognitione non perficitur intellectus (§. 92); nec fructus hujus particeps fieri potest, qui primum cognitionis gradum unice curæ cordique habet. Quod si ergo eum praxes quædam mathematicæ non juvant, veluti si agrimensorem, aut architectum militarem agere decreverit, vel si principiorum mathematicorum usum non experitur in addiscendis aliis, ex. gr. in percipiendis dogmatis nonnullis physicis; Mathesin plerumque in spem futuræ oblivionis addiscit; ut studii hujus, quod multiplici ratione sese commendat cultoribus suis, nullum prorsus percipiat fructum. Unde facile intelligitur, quinam in addiscenda Mathesi oleum atque operam perdant; ut ab hoc studio potius sint arcendi, quam ad idem invitandi vanis pollicitationibus. Convenit ingenuitati docen-

tis, ne aliquid lucelli facturus, juvenes ab addiscendis iis, quæ magis profutura sunt, ad ea avocet, quæ in spem futuræ oblivionis addiscunt.

§. 94. Qui primo cognitionis gradui acquirendo eam operam navat, quam requisivimus; is attentionem ad ea, quæ discit, afferre ac tamdiu conservare aduæscit, donec illa rite intellexerit (§. 5). Quænam ad hoc requirantur, ut definitiones intelligat (§. 6 & seqq.), nec in propositionibus quicquam supersit obscuri (§. 17 & seqq.), perspicit. Definitionum accuratarum, & in disciplinis rite ordinandarum (§. 6), ac theorematum (§. 24, 25), & problematum, & resolutionis eorundem (§. 26 & seqq.) genuinæ formæ ideam exemplarem animo concipit. Differentiam inter notiones distinctas & confusas, adæquatas & inadæquatas penitus perspicit (§. 6, 9 & seqq. §. 24 & seqq.). Quomodo recto sensuum usu faciliatur operatio intellectus addiscit (§. 7). Quo pacto repetitio facilior minusque molesta reddatur, qua memoriæ insiguntur firmiter eadem retinenda, cognoscit (§. 15). Nemo non agnoscit, ad perfectionem intellectus pertinere, ut formet notiones distinctas & adæquatas cognoscibilem; ut judicia formet determinata; ut resolutiones problematum distincte concipiat; ut attentionem, prout usus requisiverit, determinet; ut usum sensuum in operationibus intellectus decernat; ut

memoriæ infigendorum eademque retinendorum curam gerat. Quamobrem cum hæc perfectio intellectus acquiratur, si primo cognitionis gradui acquirendo præscripto modo studeamus; quin Matheseos studium, si nostro more tractetur, faciat ad intellectum perficiendum dubitandum non est.

§. 95. Non est quod mireris modum, a nobis præscriptum, ad primum cognitionis gradum adspirantibus, facere ad perficiendum intellectum; cum tamen a methodo, non a dogmatis expectanda sit perfectio intellectus (§. 92). Etenim cum secundus cognitionis gradus supponat primum; nos in acquirendo cognitionis gradu primo jam ea præcepimus, quæ vi methodi observanda sunt iis, quibus secundus curæ cordique est (§. 30); cum vulgo methodi nulla habeatur ratio, & plerumque nonnisi confusæ notiones memoriæ imprimantur, vi imaginationis reproducendæ, quando iisdem opus est. Sane in Geometria, lecta vel audita definitione, oculos in schema delineatum statim conjicientes ideam definiti memoriæ infigunt, non distincte expensis, quæ in definitione continentur; eodemque modo idea schematis, quæ theorema & resolutionem problematis exhibet, eidem mandatur, quæ vi imaginationis præsens sistitur, quoties de ea re cogitamus. Parum adeo, vel nihil, tribuitur intellectui, facultatum vero

cognoscendi inferiorum usus prædominatur. Immo ne attentionis quidem is fit usus, quem facultas cognoscendi superior exigit.

§. 96. Qui definitiones, propositiones, & resolutiones problematum eo modo exponit, quem nos præscripsimus (§. 9, 17 & *segg.*); eas ad figuras in charta delineatas & exempla exhibita applicat, qualis applicatio requiritur, dum ratiocinamur. Ratiocinatio tertia intellectus operatio est; eodemque prorsus modo ratiocinandum, dum propositiones demonstramus, vel a priori, ex cognitis, alia adhuc nobis incognita colligimus. Quamobrem patet, si in acquirendo cognitionis gradu primo morem nostrum sequaris, hoc ipso perfici debere intellectum. Nulla adeo intellectus operatio est, cui rite elicendæ non inserviat modus acquirendi primum cognitionis gradum a nobis præscriptus (§. 94 & *præf.*).

§. 97. In primo igitur cognitionis gradu acquirendo, omnem illum facis facultatum cognoscendi usum, qui in secundo acquirendo requiritur, immo in tertio familiaris supponitur. Est adeo modus acquirendi cognitionis gradum primum, quem nos præscribimus, preparatio ad secundum: qua facta, nihil prorsus difficultatis in secundo percipitur, cum cum usum facultatum jam facere possis, quem is requirit. Me vero tacente liquet, quod, ubi primus cognitionis gradus acquiritur, antequam

quam ad secundum accedas, una in parato habeas principia, quibus in ratiocinando opus est, dum ad secundum animum appellis. Equidem id modus a nobis præscriptus commune habere videtur cum vulgari; non tamen utroque idem prorsus efficitur. Etenim, nostro more, definitiones ac propositiones pure enunciationis memoriæ insiguntur, quales adhibendæ sunt in ratiociniis distinctis; &, dum præscripto modo expenduntur, simul familiares evadunt, quales esse debent, ut statim memoriam subeant, quando iisdem indigemus. Quodsi vero nostro more non expenduntur; nec eadem facilitate definitiones ac propositiones memoriæ mandantur, sed multa demum repetitione consequimur, quod multo temporis compendio obtineri poterat.

§. 98. Plurimum autem refert, ut definitiones, & propositiones antecedentes familiares experiaris, antequam ad sequentes accedas. Etenim, definitiones sequentes non intelliguntur nisi per anteriores, ubi eas ingrediuntur termini per anteriores explicati. Quamobrem ubi hæc nondum familiares experiaris; sequentes tibi non possunt non videri obscuræ, nec fieri potest, ut eas penitus intelligas. Similiter demonstratio non convincit, nisi principia, quæ ex antecedentibus sumuntur, sensum evidentiae secum ferant. Necessè igitur denuo est, ut tibi antecedentes definitiones ac propositiones fuerint fami-

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

liares, ubi sine hæsitacione in demonstratione progredi volueris. Quid, quod nec propositiones satis intelligantur, quamdiu definitiones, quibus explicantur termini in iisdem occurrentes, non fuerint familiares? Ea de causa observare licet, quod studium mathematicum difficile videatur iis, qui nulla terminorum notitia instructi ad idem accedunt; nec in repetendis iis, quæ explicata fuerunt, seduli ac frequentes sunt; cum in casu opposito nulla percipiat difficultas. Danda vero omnino est opera, ut difficultas hæc tollatur, ne studii utilissimè efficiat desertores.

§. 99. Qui Mathesi addiscendæ operam navant, ut intellectum perficiant; iis inprimis convenit, ut in secundo cognitionis gradu acquirendo industriam suam exercent. Methodo enim debetur hic fructus, non dogmatis, quæ in Mathesi proponuntur. Hujus autem potissima pars sunt demonstrationes, quibus veritatis eorum, quæ docentur, convincimur, ut nihil nobis dubii supersit. Secundo gradui cognitionis acquirendo inserviunt demonstrationes (§. 30). Quamobrem si studium Matheseos intellectum perficere debet, necessè est ut in demonstrando sis assiduus.

§. 100. Intelliguntur vero hic demonstrationes syntheticae, quales sunt EUCLIDIS & Geometrarum veterum. Neque alia de causa, quam harum demonstrationum gratia,

B b

Vetc.

Veteres voluerunt, ne quis ad philosophiam accedat, nisi Geometriæ peritus. Quamvis enim demonstrationes recentiorum analyticæ, quæ calculis algebraicis absolvuntur, suum etiam habere possint usum in intellectu perficiendo; ab ijs tamen eundem expectare minime licet, quem spondent syntheticæ: id quod satis manifestum evadet per ea, quæ mox disertius dicentur. Inde nimirum est, ut in Mathesi licet versatissimi & inter summos Mathematicos eminentes, ubi extra Mathesin methodo mathematica uti voluerunt, minime dare potuerint, quæ satisfaciunt. Exemplo nobis est CARTESIUS, Vir summus, cujus memoriam egregia in Mathesi inventa posteritati commendabunt, quamdiu scientiæ honos erit. Cum enim MERSENNI desiderio satisfactorus, suum de existentia Dei argumentum ad formam demonstrationis geometricæ reducere vellet; quam parum ipsi leges methodi mathematicæ & genuina demonstrationis forma fuerit perspecta, abunde prodidit in Responsionibus ad objectiones contra Meditationes suas metaphysicas. Taceo exempla alia, quæ commemorari poterant; & quibus tandem effectum est, ut extra Mathesin nullam dari certam cognitionem acutiores inde colligerent: in qua opinione ipsum scepticismum consistere, nemo est qui non agnoscat. Quodsi ergo ad certam cognitionem extra Mathesin pervenire vo-

lueris; necesse est ut methodi mathematicæ interiorem rationem perspicias, & leges ejus distincte cognoscas: id quod fieri non poterit, nisi demonstrationum syntheticarum resolutione naturæ animæ convenienter facta, quam in superioribus satis declaravimus, ut nihil in ea desiderari possit. Atque, ea de causa, demonstrationes nostras syntheticas eo ordine digessimus, ut facillime præscripto modo resolvi possint. Nihil enim magis intendimus, quam ut studio mathematico intellectus perficiatur, quo certæ extra Mathesin cognitioni acquirendæ sufficiat.

§. 101. Doluit ideo ipse Vir summus ISAACUS NEWTONUS, quod, cum se studio mathematico totum daret, ad CARTESII Geometriam, aliosque scriptores algebraicos, statim progressus fuisset, antequam Elementa EUCLIDIS ea attentione expendisset, quam merentur; nec probavit, quod hodie Geometriæ methodum syntheticam Veterum prorsus negligant, & in solis calculis algebraicis acquiescant; quemadmodum ex ore ipsius hausta refert HENRICUS PEMBERTON in præfatione ad Conspectum Philosophiæ NEWTONI, quem patrio sermone edidit. Nullum mihi dubium est, quin, quantum sibi hoc ipso defuerit, abunde expertus fuerit, cum in divino opere Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, inventa præclara methodo veterum Geometrarum propo-

nere

nere decrevisset. Quodsi enim quis, more a nobis præscripto, demonstrationes syntheticas resolvere didicerit, & genuinam earum formam animo comprehenderit; is facile animadvertet, quod eam non perviderit NEWTONUS; neque adeo distincte agnoverit, unde pendeat evidentia veritatis extra Mathesin; quemadmodum & CARTESIO accidisse modo monuimus (§. 100). Idem videre licet in eximio opere Phoronomiæ JAC. HERMANNI; qui, cum omnem ætatem in calculis algebraicis consumisset, methodo Veterum recentiora in Mechanica & Hydraulica, agnatisque disciplinis inventa demonstrare volebat. Quam parum enim sibi & lectoribus suis consuluerit; quod methodo, cujus vim ac potestatem minime comprehendebat, ea proponere voluerit, quæ per calculos algebraicos affectus fuerat, & cum laude ad utilitatem discipulorum proponere poterat, acutiores vident.

§. 102. Firmum itaque ratumque manet; qui intellectus perficiendi gratia ad Mathesin accedit, ei demonstrationes *Euclideas* omni cura ac sollicitudine expendendas esse: quæ qualis esse debeat, nostra demonstrationum analysis & earundem symbolica repræsentatio clarissime docet (§. 38 & seqq.). In his igitur industriam suam ingenii que vires exercet, qui extra Mathesin evidentiam in veritatis cognitione consequi

voluerit. Proprio experimento edocti sumus, non dari aliam ad evidentiam in Philosophia & Facultatibus, quæ dicuntur, superioribus viam: quam si calcare nolueris, tanto pronior erit in Scepticismum prolapsus, quanto fueris acutior; & facillimum erit nubem pro Junone amplecti, nec abortus imaginationis a genuinis intellectus fecibus distinguere dabitur. Quodsi, præscripto a nobis more, in Mathesi versari volueris, cessabunt querelæ de imbecillitate intellectus humani, quales movit HUETIUS, non profuturæ, nisi ut sternant ad Scepticismum viam, non sine detrimento religionis tam revelatæ, quam naturalis. Scepticismum hodie ubi vis terrarum invalescentem everfuri methodo ista philosophari cœpimus, qua EUCLIDES in suis Elementis olim usus. Cumque, in Philosophia, notionibus confusæ resolvendæ sint in distinctas, quas sine detrimento veritatis fert Mathesis; ipsas etiam demonstrationes geometricas ad eam formam reduximus, quam extra eandem habere debent, ne quid desit evidentiae; ut adeo superflua existimanda non sint, quæ finis tam præclari gratia sunt. Nec puérilia censenda sunt, quorum neglectus se vindicat in Viris summis. Absit itaque, ut eorum autoritate ad eundem defendendum abutaris.

§. 103. Modus, quo definitiones ac propositiones expendere docuimus, omnem facultatum usum legiti-

num in veritate cognoscenda pollicetur, ipso opere consequendum. Quodsi vero ad repræsentationem symbolicam animum advertere, & regulas generales inde abstrahere volueris; verioris Logicæ præcepta consequeris, quæ in Logica nostra demonstravimus. Atque adeo re ipsa experieris, Logicam artificialem tum demum esse genuinam, ubi praxi veterum Geometrarum conformis; quemadmodum in Prolegomenis Logicæ ostendimus (§. 26 *Log.*). Qui sic præparatus ad Logicæ studium accedit, non modo omnia, quæ hic docemus, penitus intelliget; verum etiam regulas ibidem traditas, absque ulla hæsitazione, dextre applicabit; ut nec in iis applicandis sibi met ipsi imponat; quemadmodum haud raro contingit, nec de difficultate applicandi queratur. Ubi studium Matheseos præscripto a nobis more instituerit; in studio Logicæ, quod spinosum alias ac tædii plenum videtur, non sine voluptate versabitur, nec Logicam soli scholæ addiscit in seipso experietur. Etenim ideas, quæ regulis logicis lucem affundunt, tot exemplis confirmatas, recta Mathematicarum tractatione, adeo familiares possidet; ut, quoties iisdem opus est, sua veluti sponte sese sistant animo præsentibus; ipsaque Mathematicarum tractatio in continua regularum istarum applicatione cum consistat, quin continuo, hoc exercitio, eas applicandi habitum sit consecutus, dubitari

nequit. Voluptate perfunditur animus, dum veritatis plenarie convincitur. Quamobrem cum veritatis eorum, quæ in Logica docentur, convincatur qui, Matheseos studio nostro more præparatus, ad studium Logicæ accedit; quin continua in eodem fruatur voluptate dubitandum non est. Docet Logica usum facultatum cognoscendi in veritate cognoscenda & applicanda. Quoniam itaque usum facere potest, qui nostro more in Mathesi fuit versatus; usus autem idem requiritur, in singulis omnino actionibus recte determinandis, prouti abunde constabit, si quis attenta mente Tomum posteriorem Philosophiæ practicæ universalis perlustrare voluerit; utilitatem Logicæ per omnem vitam experietur; qui regulas ejus penitus intelligit, & dextre applicare didicit.

§. 104. Quoniam ea demum Logica censetur genuina, quæ praxi veterum Geometrarum conformis (§. 26 *Log.*); utrum vero huic conformis sit, nec ne, judicare valet, qui in Mathesi præscripto a nobis modo fuit versatus (§. 103); nostra Matheseos quoque tractatio hunc pollicetur fructum, ut Logicam genuinam a spuris discernamus; quales nostra ætate eduntur haud paucæ, & quæ naturali facultatum animæ usui e diametro adversantur; ita ut studium Logicæ non amplius faciat ad dirigendum facultatem cognoscitivam in cognoscenda veritate, sed

intel-

intellectum potius corrumpat, ut a solida cognitione veritatis proscribaris. Neque verendum est, ne autoritas Mathematici, Logica non unius scriptoris, ipsi imponat: satis enim intelligit, vulgari Mathematata discendi more (§. 64) non patefieri regulas logicas, quas nostra resolutio & analytica expressio in apicem producit. Non igitur sufficit Logicam scribi ab eo, qui Mathematicus audit, vel Geometriæ quædam Elementa methodo minus accurata compilavit; sed necesse est, ut, qui Logicam scribit, in expendendis definitionibus ac propositionibus earumque demonstrationibus, cum faciat facultatum usum, quem regulæ logicæ urgent, & ut hæc ipsas regulas praxi huic conformes tradat. Vidimus paulo ante (§. 101) deficere hic acumen Mathematicorum summorum: ut adeo mirum videri non debeat, si acumen illorum denderetur, qui in illorum numerum referri nequeunt.

§. 105. Quoniam ad studium logicum accedere non debet, nisi qui in studio Matheseos secundum morem nostrum versatus est; ideo in Logica exempla mathematica dedimus, quippe quæ satis cognita atque perspecta supponimus, nisi ubi exempla vulgaria satisfaciunt. Accedit, quod nonnulla in Logica tradantur, quæ aliis, quam mathematicis exemplis, non eadem perspicuitate illustantur. Bene sibi consulunt, qui

saltem Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa præscripto a nobis modo perlustrant, antequam ad Logicam animum appellunt. Reipsa experientur, quod ex studio logico omnia percepturi sint fructum, qui ab eo sperari potest. Quodsi vero, neglecta Mathesi, ad Logicam properant, multa in iis non penitus intelligent, etsi omnia rite percepisse videantur; nec absoluto studio logico in potestate sua positum deprehendent, ut regulis Logicæ satisfaciant, hoc est, cum faciant facultatum usum, quem Logica præscribit.

§. 106. Maxima intellectus perfectio est Ars inveniendi; quæ ex iis, quæ cognovimus, alia nobis incognita ratiocinando colligimus. Quicquid usque in perficiendo intellectu progredi voluerit; illi tenenda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. 66 & seqq.) Quodsi enim vel sola Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ eo modo pertractaveris, qui ibidem præscribitur; non modo constabit, quomodo in veritate invenienda sit procedendum; verum etiam habitum quendam tibi comparabis ex cognitis alia incognita colligendi; consequenter aliquid saltem hujus Artis acquires. Quemadmodum vero intellectus continuo magis magisque perficitur; quoad promptum usum in veritate cognoscenda; si simili modo Philosophiam nostram pertractare volueris, quo in acquirendo gradu secundo

cognitionis mathematicæ utendum esse docuimus; ita quoque, quoad Artem inveniendi, eundem ulterius perficies, si in Philosophia facias, quæ tertii cognitionis gradus acquirendi gratia fieri debere præcepimus. Quodsi cui hoc nimis molestum videtur; is sciat velim, quæ ardua sunt, ea non facili opera acquiri. Qui vult finem, media velit necesse est, quæ ad eundem ducunt.

§. 107. Satis itaque docuimus, quomodo instituendum sit studium Matheſeos, ut intellectus, quantum datur, perficiatur. Unicum adhuc superest, de quo nonnulla mihi dicenda sunt, antequam ad alia progrediar. Sunt qui sibi aliisque persuadere conantur, quasi methodus mathematica Philosophiæ minus conveniat; multo autem adhuc minus in Theologia, Jurisprudencia, & Medicina eidem locus sit. Equidem hoc dubium jam sustulimus in Discursu præliminari, quem Logicæ præmisi-mus, de Philosophia in genere, ubi (§. 139) identitatem methodi philosophicæ ac mathematicæ demonstravimus; & in Horis nostris subsecivis ostendimus, quod & quomodo methodus mathematica adhiberi possit in Jurisprudencia, & Scriptura sacra interpretanda: ex nostra tamen definitionum & demonstrationum propositionum analysi, singulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifestum est, omnem methodum mathematicam, qua usus est EUCLIDES,

huc tandem redire, ut operationum intellectus legitimum faciamus usum in veritate cognoscenda, qui ad evidentiam acquiritur, qua veritas indubitato agnoscitur. Hinc manifestum est, non alias homini esse facultates, quibus in cognoscendis mathematicis utitur, quam quibus opus habet ad cognoscendam veritatem quamcunque aliam; nec alium esse facultatum earundem usum in Matheſi addiscenda; vel etiam in veritatibus mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuscunque alterius, sive ab aliis inventa fuerit, sive demum nostra opera detegenda. Matheſis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoscendi usus fieri debeat, si ad liquidam veritatis cognitionem pervenire decreveris: id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abstrahi possunt (§. 103), ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas sit lapis Lydius genuinæ Logicæ (§. 26 *Log.*). Quotquot igitur in ea sunt opinione, quasi Matheſis propriam sibi habeat methodum, quæ extra eam nullius sit usus; aut methodi mathematicæ vim ac potestatem, aut genuinum facultatum cognoscendi ad certam veritatis cognitionem consequendam usum, aut utrumque, ignorant. Hinc etiam videas, objectionem moveri ab iis, qui vel sunt in omni Matheſi hospites ac peregrini, vel legitimi usus

facul-

facultatum cognoscendi prorsus ignari.

§. 108. Denique nostra Mathematicum tractatio manifesto loquitur, eum, qui in Mathesi addiscenda præscriptum a nobis morem observat, sequi modum cogitandi maxime naturalem. Primus hoc animadverti, cum ad demonstrationum analysin, præscripto a nobis modo factam, animum attenderem, & publice hoc montui in Lexico mathematico, idemque postea uberius docui in Psychologia. Naturalis cogitandi modus est, qui leges animæ exacte sequitur. Quis igitur adeo vesanus est, ut sibi persuadeat, usum facultatum aliis legibus accommodandum esse in Philosophia, Theologia, Jurisprudencia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

§. 109. Etsi autem Mathesis universa faciat ad intellectum perficiendum, si eo, quem præscripsimus, modo tractetur; ut adeo optime sibi consulat, qui Elementa nostra omnia eodem studio perlustrat: quoniam tamen non omnibus tantum suppetit temporis spatium, quantum huic labori sufficit; unusquisque eo usque progredi poterit, quantum conceditur. Arithmeticae autem & Geometriae pertractatio prorsus indispensabilis est; quæ ideo præmittenda, antequam ad Logicam animum appellis, & hinc ad reliquam Philosophiam te conferas. Immo, si cui volupe fuerit integra Mathe-

seos nostræ Elementa perlustrare; ei tamen non suascriam, ut de Philosophia omnem cogitationem abjiciat, donec studium Matheos omne fuerit absolutum: sed potius auctor sum, ut, Arithmetica & Geometria absoluta, statim Logica operam suam addicet, & in Mathesi juxta Philosophiam pergat. Ita enim futurum certus sum, ut studium Matheos ac Philosophiæ sibi mutuo lucem affundant.

§. 110. Supponimus autem Philosophiam eadem methodo esse conscriptam, qua in Elementis Matheos utimur. Quamobrem cum id ante nos fecerit nemo; nec alia ipsi scripta philosophica commendare valemus, nisi Opera nostra philosophica, Latino imprimis idiomate conscripta. Quodsi prolixitatem obtendas, nulla sane ratio est, cur ea te deterreat. Etenim si non ante ulterius progredi volueris, quam singula rite intellexeris, ac veritatis eorum convictus fueris; multo minore temporis spatio scripta nostra utiliter perlegere potueris, quam breve quoddam compendium, communi more conscriptum; modo in pertractanda Arithmetica & Geometria industriam tuam desiderari passus non fueris. Immo valde vereor, ne si præscripto a nobis more in Arithmetica & Geometria fueris versatus, lectio aliorum scriptorum philosophicorum quam nostrorum, te efficiat studii philosophici desertorem, aut in Scepticismum dedu-

deducat. Absit, ut quis existimet hæc arroganter a nobis dicta esse, nimia in nos fiducia, in contemptum aliorum! Veritati enim unice litamus, non loquentes nisi experta, quæ ratio defendit. Ab aliorum contemptu procul remoti, aliena merita suspicimus & extollimus; neminem in scriptis nostris nominatim perstringimus; iis etiam parcimus, qui in laceffenda fama nostra quidvis sibi licere arbitrantur; probe memores eam non dependere a laudibus aliorum, sed a factis propriis; omni animi contentione omnique industria

ac diligentia in id ententes, ut ealumnias factis contrariis refellamus. Alienum a nobis esse existimamus, ut doctrinis, quas profitemur, facta sint contraria. Nemo igitur nobis vitio vertet, si aliorum utilitati velificaturi ea dicimus, quæ veritas imperat, citra injuriam alterius. Minus toleranda potius ambitio est, si quis non sine detrimento aliorum veritatem reticere vult, ut videatur qui non est. Ceterum, si quis consilio nostro aurem benignam dare voluerit; re ipsa experietur vera omnino esse, quæ dicimus.

C A P U T III.

De Studio Arithmetica, Geometria, & Trigonometria plane in specie.

§. 111. **A** Rithmetica, Geometria, & Trigonometria planæ nostra Elementa ita conscripsimus, ut satisfaciant omnibus, quocunque fine ad Arithmetica & Geometriam addiscendam appellunt. Ea enim digessimus, ut nullo negotio prætermittantur, quæ salvo fine, quem quis sibi præfixum habet, ignorare potest; & ea iisdem inseruimus, quæ nisi eo excidere voluerit, ignorare nequit.

§. 112. Qui Arithmetica addiscit, vel soli praxi studet, theoriam non curat, vel hujus etiam rationem habet. Qui soli praxi operam na-

vat, is vel solum ejus usum in vita communi, vel usum etiam in Geometria practica, aliisque Matheseos mixtæ partibus, intendit. Idem præterea, vel in nuda praxi acquiescere vult, vel veritatem quoque præceos perspicere avet. Cui theoria curæ cordique est, is eandem, vel propter usum in ceteris Matheseos partibus, vel propter usum in perficiendo intellectu, appetit. Videamus igitur, quomodo Elementa nostra Arithmetica pro multiplici hoc discentium scopo satisfaciant.

§. 113. Qui soli praxi operam navant,

vant, & quidem in usum vitæ communis; iis satisfaciunt problemata de Algorithmis in numeris integris, & fractis, quæ capite secundo & quarto continentur; una cum problemate 33, quod capite sexto legitur, de numero tertio, vel quarto, proportionali inveniendi, una cum scholiis, in quibus idem problema ad varios casus in vita communi obvios applicatur. Qui vero usum etiam in Geometria practica, aliisque Matheseos mixtæ partibus intendunt; illi superaddere debent problemata de extractione quadratæ ac cubicæ radicis, quæ capite quinto leguntur, problemata de logarithmis, fractionibus decimalibus & fractionibus sexagesimalibus, quæ capite octavo, nono & decimo extant. Fractiones sexagesimales omittere possunt, qui calculi Astronomici nullam habent rationem. Immo eodem carere possunt, qui ultra ea non progrediuntur, quæ in nostris Astronomiæ, & Chronologiæ Elementis traduntur.

§. 114. Problemata a definitionibus & theorematibus satis aperte distinguuntur, suoque nomine insignita numerantur, ut adeo nullo labore opus sit ad ea evolvenda, & agnoscenda. Ut adeo usus quidam hinc elucescat, cur in Mathesi veritates singulæ suis nominibus compellentur, ac numerentur; etiam si in citationibus ad paragraphum provocemus, in quo principium istud continetur, quo in demonstrando utimur.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

§. 115. Quoniam in propositione, itemque in resolutione, occurrere solent termini, quibus nondum intellectis, nec propositio, nec resolutio intelligi potest; igitur necesse est, ut istorum terminorum definitiones ante expendat, quam ad problema accedat, quæ praxin in eodem traditam discere studeat. Ita ex. gr. problema secundum (§. 96 *Arithm.*) docet numeros quotcunque datos addere. Supponitur adeo definitio additionis, quæ traditur in anterioribus (§. 61 *Arithm.*). Quia vero nec definitiones intelliguntur, nisi intellectis terminis, qui eas ingrediuntur; si qui termini per notiones claras, sed confusas communes non satis perspicui sunt; ad definitiones eorum, quas in antecedentibus damus, recurrendum. Ita, in definitione additionis mentio fit numerorum homogeneorum. Quoniam numeri sint homogenei, ex communi sermone notum non est. Quamobrem necesse est, ut ad definitionem numerorum inter se homogeneorum recurras, quam in anterioribus exhibemus (§. 35 *Arithm.*). Quomodo autem hæc definitiones sint expendendæ, patet ex iis, quæ de primo cognitionis gradu acquirendo, quoad definitiones, præcepimus.

§. 116. Problematum resolutiones statim applicandæ sunt ad exempla, quemadmodum in ipso textu a nobis factum. Nimirum regulæ, quibus præcipiuntur, quæ fieri debent,

C c

suis

suis numeris distinguuntur, ut singulis statim satisfieri possit. Collocantur eo ordine; quo singula fieri debent; ut, lecta regula una, statim fiat quod eadem præcipitur. Nihil adeo applicatio ad exempla habet difficultatis; ita ut totam Arithmeticam practicam proprio Marte addiscere possis, nisi fueris valde impatientis; aut si, duce alterius, unam operationem arithmeticam didicisti, ceteras deinde, absque ullo duce, tibi familiares reddere queas.

§. 117. Si quis veritatem resolutionis problematum perspicere voluerit, necesse est demonstrationes addat. Citationes in iisdem adductæ ostendunt principia, quibus opus habet. Neque opus est, ut theorematæ, quæ capite primo proponuntur, demonstraret; sed sufficit ea sumi, tanquam per notiones communes nota, absque demonstrationibus. Similiter sufficit, ut ex capite 3 nonnisi definitionem rationis, nominis rationis, rationum identitatis & proportionis in genere, ejusque specierum, proportionis continuæ atque discretæ (§. 126, 136, 149, 155, 156) sibi cognitam ac perspectam reddat, una cum theoremate 20 & 21, quorum demonstrationes omittere potest, in illustratione per exempla facta acquiescens. Problema 36, de modo inveniendi logarithmum, prætermittere potest; immo totam de Logarithmis doctrinam tamdiu differre; donec, absoluta Geome-

tria, ad Trigonometriam accedere voluerit.

§. 118. Quodsi vero theoriam expetit, sive propter usum in ceteris Matheseos partibus, sive intellectus perficiendi gratia, tota omnino Elementa pertractanda sunt, eo modo, quem in capite primo pro acquirendo gradu cognitionis secundo præscripsimus, ut adeo nihil superfit, quod hic veniat addendum.

§. 119. Quamvis ostenderimus, quid faciendum sit, si quis nudæ praxi operam navat, nulla prorsus habita ratione theoriæ; hujus tamen neglectum nemini suademus; quin potius consultum ducimus, ut Arithmetica, etiam practica, in usum vitæ communis, non sine demonstrationibus addiscatur. Ut enim alios taceam usus; non modo tota Arithmetica practica facilius addiscitur; verum etiam memoriæ multo firmitus insigitur, non sine temporis compendio; & ubi quorundam oblitus est, absque multa difficultate in memoriam revocatur: id quod inprimis usui est, ubi arithmetice operationibus non quotidie habueris opus.

§. 120. Ceterum hinc liquet, quod, absque ullo negotio, ex Elementis nostris Arithmetice exscribi possit Compendium Arithmetice practice; in usum illorum qui solam Arithmeticam practicam, propter usum in vitâ communi, expetunt; levi sumtu ab iis comparandum, qui eodem

eodem opus habent. Quodsi plura desiderentur exempla, ea cumulare difficile non est. Etenim non alia re opus est, quam ut in locum numerorum, quos exemplum sistit, substituantur quicumque alii. Quodsi demonstrationes non negligantur, quemadmodum ne id fiat modo suavisimus (§. 119); paucis exemplis obtinetur, quod non sine multis consequi datur, ubi theoriam omnem abjicere volueris.

§. 121. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ii memores esse debent ejus, quod in scholio definitionis primæ (§. 2 *Arithm.*) monuimus; scilicet quod ab Arithmetica practica, tanquam methodo inveniendi speciali, regulæ inveniendi generales abstrahere liceat. Cumque in scholio generali ad Algorithmum numerorum integrorum (§. 125 *Arithm.*), istiusmodi regulas abstraxerimus, ut exemplo quodam præiremus; & in genesi numerorum quadratorum & cubicorum (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*), nec non in theoria numerorum æquidifferentium (§. 327, 329 *Arithm.*) artificia quædam analytica docuerimus; ad hæc imprimis animum advertere debent, qui non modo in Arithmetica, Artem inveniendi, sed eam etiam generalem, curæ cordique habent. Si prolixioribus esse liceret; addi poterant multa specialia, de quibus alibi commodius dicitur; ubi nimirum Artem inveniendi ea methodo tra-

dituri sumus, qua huc usque Logicam & Metaphysicam universam, una cum Philosophia practica universali, tradidimus. Ita ex. gr. quæ (§. 142 & seqq. *Arithm.*) de generibus & speciebus rationum rationalium docentur, insinuant modum ex dato genere inveniendi genera inferiora eorundemque species: quo etiam Dignitatum divisio facit (§. 252 *Arithm.*). Huc etiam pertinent fictiones, quarum exemplum habemus in fractionibus spuris (§. 221, 222 *Arithm.*)

§. 122. Qui Geometriæ studio sese dedunt; similiter aut soli praxi student, theoriæ nullam proflus rationem habentes, veluti agrimensores & architecti militares; aut in praxi nuda acquiescere nolunt, sed ejus demonstrationes expetunt. Qui vero theoriæ addiscendæ sese dedunt, aut usum in ceteris Matheseos partibus intendunt, aut hoc faciunt intellectus perficiendi causa.

§. 123. Quibus in nuda praxi acquiescere visum est; iis satisfaciunt definitiones & problemata, omissis demonstrationibus. Nullum est problema, quod usui esse non possit, adeoque prætermittendum sit: sed definitiones quædam omitti possunt, veluti figuræ in genere, lateris, tangentis, secantis, &c. Sufficit enim didicisse definitiones angulorum & figurarum, atque linearum perpendicularis, & linearum parallelarum. Ceterorum notiones confusæ, ipso usu

terminorum, in casu dato insinuantur, quæ praxi soli intentis satisfaciunt.

§. 124. Quænam observanda sint circa definitiones, & problemata, eorundemque resolutiones, ex iis intelliguntur, quæ de acquirendo gradu primo cognitionis in anterioribus præcepimus (§. 5 & seqq.); nisi quod definitiones sequentes non opus sit resolvi in antecedentes, quia sufficit eas referri ad schemata oculis subiecta; cum non requiratur adæquata entium geometricorum notio, sed vel in confusa eorundem notione acquiescere possit.

§. 125. Præxis duplex est: alia, quæ exercetur in charta; alia, quæ in campo. Qui praxi unice se dat, eam exercere intendit. Non igitur sufficit resolutiones problematum intelligere; verum etiam requiritur, ut facias; quæ fieri jubentur. Ad præxin igitur in charta exercendam, ad manus esse debet circinus, regula, instrumentum transportatorium, norma, & parallelismus, una cum triangulo ex ligno ebenino, & scala modica; ad eandem vero in campo exercendam, baculi, cum catena, vel fune cannabino in pedes & decempedas illorumque digitos legitime diviso, una cum instrumentis ceteris, quorum usus explicatur.

§. 126. Juxta resolutionem problematis uniuscujusque instituenda est operatio, sive in charta, sive in campo; ut videas, num ea facere

possis, quæ jubentur. Quorum vero problematum resolutiones arithmeticae sunt, adeoque calculo absoluntur; ea tentandæ sunt in exemplis non modo iis, quæ ipsimet in medium attulimus, verum etiam aliis; qualia comminisci haud difficile, ubi in locum numerorum datorum surrogantur alii pro arbitrio nostro. Quemadmodum enim consultum est, ut una eademque operatio, sive in charta, sive in campo, aliquoties repetatur, donec exacte facere possis quod jubetur; ita etiam exempla cumulanda. Hoc nimirum non tantummodo facit, ut resolutionem problematis uniuscujusque rite intelligas, eandemque memoriæ firmitus insigas; sed & ut habitum exacte faciendi, quod faciendum erat, acquiras. Qui enim præxin exercere vult, non modo intelligere debet, quid fieri debeat, sed & ut omni exactitudine id facere possit requiritur. Habitus docendo communicari nequit, sed crebro exercitio, seu idem sæpius faciendo acquiritur. Qui adeo docet, officio suo satisfacit, si ea tradit, quæ, ut recte facias quod faciendum, nosse debes.

§. 127. Quoniam multa dantur problemata geometrica, quorum resolutiones per calculum expediuntur; Geometria practica Arithmeticam practicam supponit. Illam igitur si addiscere volueris, hanc ante addiscas necesse est.

§. 128. Ex nostris adeo Elementis

tis Geometriæ, absque ullo negotio, Geometria practica extrahi poterat, ne verbo quidem immutato: cui quod utiliter addatur compendium Arithmeticæ practicæ, ex Elementis Arithmeticæ exscribendum (§. 120), nemo est, qui non videt (§. 127).

§. 129. Enimvero, etsi praxis absque theoria commode addisci possit, & Elementa nostra ita conscripta sint, ut brevissima ad eandem via ducant absque ulla theoria; meo tamen, si quid valet, consilio, omnes agrimensores & architecti militares, & si qui alii praxin geometricam exercere voluerint, tantum theoriæ sibi acquirere deberent, quantum ad praxin demonstrandam sufficit. Quemadmodum enim theoria accurata praxin accuratam parit; ita etiam probe intellecta exercitium praxeos reddit exactum. Immo succurrunt subinde in praxi casus nonnulli, in quibus hæret ac facile aberrat, qui theoria instructus non est. Non opus esse videtur, ut hoc multis rationibus adstruatur; qui enim consilio nostro aurem benignam præbere voluerit, veritatem dicti reipsa experietur. Nemo non novit, si plures agrimensores aream ejusdem campi investigent, hæud raro magnum esse dissensum in quantitate ejus definienda; certo indicio, quod non eadem accuratatione singuli fuerint usi, etsi omnem diligentiam adhibuisse sibi videantur. Diligentia oculata esse debet, quæ ab accuratatione nulla in

re deficit. Ut hæc oculata sit, theoriæ debetur.

§. 130. Equidem non diffitemur, theoriæ adeo exactam non requiri in iis, qui Geometriam practicam exercent, qualem nos intellectus perficiendi gratia condidimus; unde & in Elementis nostris Germanicis ab ea abstinuimus eandemque in compendium contraximus. Quodsi tamen visum fuerit omnem retinere theoriæ, quam dedimus; ea multiplici utilitate sese commendabit etiam praxin exercentibus. Per eam enim obtinebis, ut nulla in re patiaris desiderari attentionem tuam, & vel in minimis te præbeas circumspectum. Taceo, quod omnibus usui sit, si facultatum cognoscendi legitimum usum facere queant; & ipsa obligatione naturali, nemo negligere teneatur occasione, qua eundem in potestatem suam redigere valet.

§. 131. Neque est quod excipias, agrimensores, & architectis militariis, aliisque praxin geometricam exercentibus non convenire theoriæ, sed eam captum ipsorum transcendere, immo ipsos eandem naturali quadam aversione fastidire: hoc enim quam sit a veritate alienum, & experientia me docuit, & ratio convicit. Si qui theoriæ contemnunt, non alia de causa hoc faciunt, quam quod eam non didicerint, nec ignoti ulla sit cupido, & quod eadem in praxi sua carere posse sibi videantur. Aliter vero sentirent, ubi mature theoria

corundem animis instillaretur. Quod vero cam capere nequeant, si rite eandem doceantur, adeo verum non est, ut experimento contrario refellatur. Ne difficultatem præter necessitatem facessas, doce ipsos primum praxin solam, sed ea methodo, ut distincte concipiant singula, quæ fieri debent; quemadmodum nos urgemus: ita enim futurum, ut notionibus distinctis aduerti, quid inter has atque confusas intersit facile inter noscant. Adde demonstrationes, quas diximus, mechanicas; ut veritatem eorum, quæ docentur, expectantur: quam ubi percepisse sibi videntur, eisdem mone experimenta hæc loqui nonnisi veritatem in casu singulari, nec reiterata eandem procedere in universali. Neque difficile est convincere quemvis a posteriori, quod a particulari ad universale non valeat argumentatio, cum ubivis prostent exempla, quibus idem doceri potest. Cum hoc modo excitaveris cupidinem sciendi, quod scire delectet; commodum jam erit ad theoriam progredi. Et ubi quis in cognitionis gradu primo acquirendo nostro more versatus fuerit, ad secundum consequendum præparatus accedit; in quo si denuo morem a nobis præscriptum sequaris, absque ulla molestia in theoria addiscenda progredi dabitur.

§. 132. Qui theoriæ operam navant, propter usum in disciplinis ceteris mathematicis; illi non modo

omnes propositiones sibi familiares reddere, verum etiam habitum demonstrandi comparare tenentur. Quamobrem universa Elementa Geometriæ eo modo pertractare debent quem, acquirendi secundi & tertii cognitionis gradus causa, capite primo præscripsimus; & definitiones, ac propositiones pure enunciatas memoriæ firmiter insigere tenentur: quo plurimum confert accurata demonstrationum analysis, in quibus definitiones & propositiones pure enunciatæ tanquam principia adhibentur. Hoc enim pacto demonstrationum sequentium evolutio repetitionis vicem sustinet, quia definitiones ac propositiones pure enunciatæ memoriæ mandantur, & discenti familiares evadunt; quales supponuntur ad ceteras Matheseos partes absque difficultate pertractandas.

§. 133. Quod problemata attinet, quæ praxin continent; norandum est, praxin in charta exercendam usui esse in ceteris Matheseos partibus; quæ vero exercetur in campo, ea nullum habere in reliquis usum, nisi in Architectura militari, & in Astronomia, atque Geographia, nonnulla ex iis cognita atque perspecta supponi. Praxis accurata in charta magis ornat Mathematicum, quam necessaria est, si in sola theoria acquiescere voluerit. Neque is multo instrumentorum apparatu indiget; sed sufficit regula, cum circino, & graphio, cujus tamen vicem supplet pen-

na ex corvorum alis evulsa (§. 123 *Geom.*). Problemata, quæ praxin in campo docent, non tamen prorsus negligenda. Eorum enim theoretica cognitio discipulum præparat ad ceteras Matheseos partes facilius addiscendas. Necesse igitur est, ut resolutionem distincte concipiat; & demonstrationem nostro more resolvat, ac analytice exprimat; omni cura ac sollicitudine animi observans, quæ de iis, secundi cognitionis gradus acquirendi gratia, præcepimus, qui theoreticam Matheseos universæ cognitionem curæ cordique habet.

§. 134. Eadem tenenda sunt, si quis, intellectus perficiendi gratia, Geometriæ studet; sive tantummodo ad secundum cognitionis gradum, sive simul ad tertium extra Matheseos adspiret. Utilitatem percipiet qui, in Philosophia morali & civili, accurata diligentia versari, eandemque ad usum vitæ transferre, & theoriam physicam ad Artes perficiendas applicare voluerit.

§. 135. Qui a Geometria & Trigonometria ad Algebra præcedi voluerit, is cognitionis gradum tertium in Mathesi intendit. Quamobrem ea ipsi observanda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus capite primo. In primis autem animum attendere debet ad præparationem, quæ demonstrationi præmittitur; cum ea opus quoque habeat in resolutione problematum geometricorum in Algebra,

& in solutionibus, præsertim algebraicis, problematum in ceteris Matheseos partibus.

§. 136. Elementa Arithmeticæ & Geometriæ, per Matheseos universam, & in omni cognitione mathematica, quam philosophicæ contrā distinguimus (§. 14 *Disc. prælim.*), apprime necessaria sunt, ita ut eorum notitia nemo carere possit, qui in ceteris Matheseos partibus ad cognitionis gradum secundum atque tertium adspirat. Quo majore igitur studio ac industria in illis fuerit versatus, eo felicius in reliqua Mathesi progredietur. Id etiam obtinebit, quod hodie in plerisque Mathematicis, & in seipso desideravit Vir summus NEWTONUS (§. 101), ut methodum Geometrarum veterum cum algebra recentiorum jungat, & utriusque compos reddatur: cujus insignem experietur usum, si ad summa quævis in Mathesi contendat, & exemplo NEWTONI naturam mathematicæ tractare voluerit; in primis si quando volupe fuerit mathematicarum rerum naturalium cognitionem in systema redigere, quantum fert ætas nostra, præsertim ubi ante officio suo satisfecerint Philosophi.

§. 137. Trigonometria plana, non minus quam Sphærica, primum in usum Astronomiæ fuit inventa. Quamobrem indispensabilis usus est in Astronomia, adeoque eam negligere nequit, qui nobilissimæ huic scientiæ operam dare decrevit. Postea quoque

quoque ad praxin geometricam in campo fuit applicata; quemadmodum capite ultimo Trigonometria planæ ostendimus. Quamobrem eadem quoque studere tenentur, qui praxin geometricam in campo exercere voluerint. Applicata eadem fuit ad varia problemata in Geographia, Hydrographia, Gnomonica, Mechanica, Architectura militari, & Opticis disciplinis: ut adeo commendanda veniat ad hæc quoque Matheseos partes animum appellentibus. Multo igitur illustrior est ejus usus, quam qui olim fuerat.

§. 138. Qui in sola praxi acquiescunt, iis satisfaciunt perpauca ista problemata, quæ capite secundo continentur; addituri ea, quæ continentur tertio, ubi Geometriam practicam curæ cordique habent. Hoc unicum notandum est, quod usum Canonis sinuum & tangentium, una cum Canone logarithmorum tam sinuum atque tangentium, sibi familiarem reddere teneantur, qui in usum praxeos Trigonometriam planam addiscunt; additis problematis, quibus in Arithmetica usus logarithmorum docetur (§. 349 & *segg. Arithm.*), una cum definitione logarithmorum, & theorematibus eorum naturam explicantibus (§. 334 & *segg. Arithm.*); sed absque demonstratione.

§. 139. Exempla, quibus calculum trigonometricum illustravimus, adeo distincte repræsentavimus, ut

ideam exemplarem resolutionis problematum animo insinuent, & resolutionis vicem tueri possint. Quamobrem ii, quos sola praxis juvat, eandem sibi familiarem reddere tenentur: id quod uno alteroque exemplo facile obtinetur. Exempla autem complura facile comminiscitur, qui numeris in exemplo proposito datis substituit pro arbitrio alios. Inprimis etiam suademus omnibus, quotquot praxin geometricam in campo exercere voluerint, ut exempla proprio Marte addant problematis, quæ hunc in usum traduntur capite tertio. Reperiuntur autem ad imitationem eorum, quæ dedimus capite secundo. Nimirum non alia re opus est, quam ut data numeris exprimantur: id quod nihil difficultatis habet; præsertim cum in expendendis problematis data a quasitis semper veniant distinguenda (§. 26). Quodsi hoc feceris, calculus erit idem, qui in problematis citatis: quæ etiam ratio est, cur eundem in textu non appofuerimus, ne præter necessitatem essemus prolixiores.

§. 140. Qui praxin oculatam desiderant, vel theoriæ tantummodo rationem habent; illos demonstrationes superaddere & in Trigonometria eodem modo versari debere, quem pro secundo & primo cognitionis gradu acquirendo supra præscripsimus, me vel tacente, intelligitur. Nihil adeo prætermittere tenentur, quæ in Elementis nostris continentur. Et
quam-

quamvis Canon sinuum atque tangentium, cum naturalis, tum artificialis, jam fuerit constructus, ut nullus amplius problematum, quæ in capite primo in hunc finem traduntur, videatur usus; ea tamen negligenda non sunt, ut appareat, quomodo Canones isti constructui potuerint, & quomodo ex theoria praxis, ad quam tendit, deducatur.

§. 141. Inprimis hoc proderit iis, qui ad cognitionis gradum tertium adspirant. Ex hisce enim perspiciunt, quomodo ex cognitis alia incognita ratiocinando colligantur, & quomodo haud raro praxes prius inexpectate eademque longe utilissimæ ex theoriis deriventur, quarum tantam prævidere non licebat utilitatem. Sane non alia de causa, postquam Canon sinuum & tangentium jam fuit constructus, Mathematici tamen recentiores alios eosdem construendi excogitarunt modos, quam quibus usi sunt illorum conditores. Non alia de causa, postquam docuimus Canonis sinuum atque tangentium constructionem, adjecimus scholion (§. 27 *Trigon.*), in quo monemus, eundem adhuc multis aliis modis constru

posse; laudavimusque URSINUM, qui nonnulla præclara dedit, & in Algebra, ubi de serierum doctrina agitur, ostendimus, quomodo pro sinibus & tangentibus, nec non pro logarithmis reperiantur series infinitæ, ex quibus per approximationem deducuntur numeri, qui satisfaciunt.

§. 142. Trigonometria non modo pars quædam Artis inveniendi specialis est, cujus usus in aliis Matheseos partibus elucet (§. 137); sed tota etiam ita digesta, ut appareat, quomodo singula fuerint inventa, modo observare volueris, quæ de acquirendo cognitionis gradu tertio præcepimus capite primo. Ab ea igitur regulas generales Artis inveniendi non modo abstrahere licet; verum si præscripto a nobis modo, ad quem hic provocamus, pertractetur, ad ipsam quoque Artem inveniendi acquirendam aliquid conferet. Quamobrem studium trigonometricum rite instituendum tam iis, qui ad tertium cognitionis gradum in Mathesi adspirant, quam illis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, commendandum.

CAPUT IV.

De Studio Algebra, seu Analyseos mathematicæ in specie.

§. 143. **A** Nalytis mathematica est ipsa Ars inveniendi, qua hodie utuntur Mathematici in verita-
Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

tibus mathematicis investigandis. Huic adeo operam dare debent, quotquot ad cognitionis gradum tertium in
D d Mathesi

Mathesi adspirant. Etsi enim demonstrationum more nostro facta resolutio etiam analytica sit, ut eodem modo ex hypothese data inveniri possit, quo demonstrandum quod demonstratur; non tamen iis detegendis sufficit, ad quæ Analysis recentiorum ducit, tota vulgo Algebra nomine appellari solita. Etenim, per Algebram, paucis cognitis, invenire licet quæ, si more veterum detegenda essent, longam rerum inventarum seriem supponerent. Quid, quod facili labore eruantur, quæ Herculeo investiganda essent? Hæc sane ratio est, cur inventa Mathematicorum recentiorum longissimo intervallo post se relinquant inventa Veterum, & quod uno seculo plura fuerint detecta, quam tot seculis inveniri potuerint, quibus Mathesis antea fuit exculta. Sane si ARCHIMEDES & APOLLONIUS nostro ævo reviviscerent; in stuporem raperentur, visis inventis recentiorum, quæ per Algebram fuerunt in apicem producta: neque enim unquam sibi persuasisset, patere ad talia mortali-bus aditum.

§. 144. Non tamen omnia per calculos algebraicos crui possunt, quæ ad Geometriam spectant. Patet id ex ipsa Geometria elementari. Etenim quæ ibidem de lineis perpendicularibus, de parallelismo linearum, de angulis, de congruentia & similitudine triangulorum, aliisque nonnullis demonstrantur, per Algebram investigari nequeunt.

Pendent enim hæc a situ linearum, quem ad se invicem habent. Calculus vero algebraicus est calculus magnitudinum, non situs. Unde LEYBNITIUS in Analyti recentiori adhuc desiderari monuit calculum situs, a calculo magnitudinum prorsus diversum; quem tamen nec ipse dedit, nec dedit adhuc alius, sed in desideratis numeramus.

§. 145. Similiter Analysis Veterum, qualem loquitur nostra demonstrationum analysis, non eam esse qua, Algebra inventa, carere possimus, haud difficulter ostenditur. Etenim antequam problemata geometrica, vel alia in Mathesi mixta ad Geometriam puram reducta, per Algebram solvantur, reducenda sunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo supponit præparationem methodo Veterum inveniendam, verum etiam ipsamet per eandem methodum eruenda. Accedit subinde occurrere problemata, etiam in altioribus, quæ methodo Veterum multo brevius & elegantius solvantur, quam per calculum algebraicum, qui haud raro admodum perplexus & nimis longus est. Accedit, quod absque omni theoria calculo algebraico minime sit locus. Hinc qui problemata physico-mathematica, vel etiam mechanico-physica solvunt, quædam tanquam cognita sumere tenentur. Contingit autem haud raro, ut sumant nondum satis explorata, vel si ea demonstrare voluerint, quæ certa sunt & methodo Veterum rigide

rigide demonstrari poterant in dubitationem adducant ; ut adeo, quæ per calculum ex assumtis eruuntur, vel incertitudini obnoxia fiant, vel suspecta reddantur acutioribus, rigori Veterum adfueris. Immo nullum est dubium, quin plura irrepserint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum Mathematicorum revisione quadam indigerent, & haud pauca firmiori fundamento superstrui mererentur. Nec alia ratio est, cur inter recentiores Mathematicos agitentur controversiæ, quales Veteribus erant ignotæ. Optime igitur sibi consulunt, qui methodum Veterum cum algebraica Recentiorum conjungunt. Et merito dolemus cum NEWTONO (§. 101), quod, illa neglecta, cito nimis pede ad hanc hodie properent, qui inter Mathematicos eminare volunt.

§. 146. In Analyfi nostra, primo loco occurrit Arithmetica speciosa, quam etiam literalem appellare solent. Primo loco agitur de signis tam primitivis, quam derivativis. Occurrunt nempe signa quantitatum, & operationum arithmeticarum, quas vulgo species Arithmeticæ vocant. Quantitates, cum sint numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), per determinatos explicabiles sunt. Quamobrem suadendum tyronibus, ut literas; quibus indigantur quantitates, per plures numeros diversos explicent. Quoniam vero eadem quantitates etiam sub se comprehendunt quamli-

bet magnitudinem; igitur non minus consultum est; ut etiam per magnitudines, veluti per lineas, explicentur. Linearum enim, & magnitudinum quarumvis determinatarum ratio ad aliam homogeneam, quæ pro unitate sumitur, per numeros determinatos definiri potest; cum numeri revera omnes, tam rationales, quam irrationales, nonnisi rationem ad unitatem expriment. Nimirum, quod literis generaliter, hoc est, indeterminate designatur, per numeros determinate exprimitur; itidemque per magnitudines determinatas; quatenus harum ratio ad aliam homogeneam pro unitate assumptam numeris, sive rationalibus, sive irrationalibus, exprimi potest: sit ita, quod hoc variis modis fieri possit pro diversitate ejus, quæ pro unitate sumitur, nec semper hoc præstare valeamus. Qui theoriâ entis universalis, ab ipsa Mathesi abstrahendam, perspectam habet, multo intimius quæ dixi perspiciet, quam qui ab omni Philosophia prorsus alienum habet animum.

§. 147. Qui Artem inveniendi in genere curæ cordique habent; modo universalis a specialibus abstrahere didicerint, multa animadvertent ad Characteristicam universalem spectantia, quam esse partem Artis inveniendi ipsa Arithmetica universalis, & calculus differentialis docet, suoque ostendemus loco, si quando ad Artem inveniendi explicandam ordo nos deducet. Ipsa autem

Ars Characteristica universalis plurimum lucis affundet, tum notationi numerorum in Arithmetica, tum signis, quibus utimur in calculo literali, sive communi, sive differentiali. Ceterum hic notandum est, signa primitiva, quæ in alia resolubilia non sunt, respondere notionibus confusis; derivativa verò distinctis: quemadmodum suo loco demonstrabimus. Qui enim novit differentiam, quæ inter notiones distinctas & confusas, quoad usum earundem, intercedit, quantæ sit utilitatis huc adverti animus facile perspiciet.

§. 148. Ipsum algorithmum in integris satis perspicue explicavimus. Tyrones sibi eundem familiarem reddent, ubi diversis modis exemplâ literalia explicaverint per numeros determinatos, si ita visum fuerit, etiam per concretos, quemadmodum ostendimus (§. 28, 30 *Analys.*). Qui in Arte inveniendi generali proficere volunt, iis consultum est, ut ex ipsis hisce exemplis in numeris concretis datis addiscant, quomodo algorithmus literalis ex notionibus communibus deducatur, per quas primum inventoribus innotuerunt regulæ, quibus in eodem utimur; quamvis idem, utut non eadem facilitate, jam ex Elementis Arithmeticæ ac Geometriæ addisci poterat. Plurimum enim prodest ut noris, omnem tandem cognitionem humanam ex notionibus communibus

fuisse deductam, in quocunque scientiarum genere. Et in Ontologia jam me monuisse memini, EUCLIDEM Elementa sua reduxisse ad notiones communes; consequenter, per ea, omnem Mathesin. Hoc notasse etiam usui erit in Mathesi mixta: demonstrabitur autem in Arte inveniendi generali, aliter fieri hoc minime posse.

§. 149. In multiplicatione quoad usum signorum fictiones occurrunt, veluti si quantitas sive positiva, sive negativa, per privativam multiplicanda venit (§. 34, 36 *Arihm.*). Unde liquet usus fictionum, ad conservandam notionum universalitatem. Etsi autem regulas, in subsidium vocata Geometria, demonstravimus; ut ad imaginationem reducantur, quæ vi intellectus concipienda; consultum tamen est, ut tyrones exempla statim in numeris addant, in iis regularum veritatem perspecturi, vel ipsas etiam regulas ex iisdem deducturi, quemadmodum in Elementis Germanicis feci. Clarius enim in numeris liquet, cur addendum sit, quod plus fuerat subtractum, vel subtrahendum, quod plus fuerat additum, ubi conceptibus universalibus, utpote nimium abstractis, nondum fueris adfuetus: id quod initio studii algebraici supponi nequit.

§. 150. Algorithmus fractionum literalis cum numeroso idem est; cum quantitates, quæ literis designantur, sint numeri indeterminati; regulæ autem

autem hujus algorithmi ex notione numeri generali fluant; consequenter ex iis deducantur, quæ numeris determinatis & indeterminatis communia sunt. Hinc tyrones sibi consulunt, si literis numeros substituant determinatos, ut clarius appareat, nihil hic occurrere diversitatis. Quæ vero problemate 7, & ejus corollaris, ac scholiis (§. 45 & seqq. *Analys.*), de seriebus infinitis per divisionem prodeuntibus docentur, initio prætermitti possunt ab iis, quorum attentio facile defatigatur; donec multo inferius in doctrina de seriebus infinitis iisdem habuerint opus, ubi attentio nihil amplius difficultatis facessit, cum multo usu jam major gradus fuerit acquisitus.

§. 151. Multiplicatio & divisio potentiarum, & elevatio ad potentiam, atque extractio ex radice, a Logarithmorum doctrina pendet, quam in Arithmetica tradidimus. Quamobrem, nisi hic in tenebris versari volueris, illam ante tibi perspectam reddere debes, quam ad Algorithmum dignitatum accedas. Inprimis autem hic notanda est reductio quantitatum irrationalium ad formam rationalium, & unitatis ad x^0 (§. 57, 55 *Analys.*), quoniam hæc reductio non modo multiplicem, eundemque prorsus eximium & inexpectatum, in altioribus habet usum; verum etiam apertissime loquitur, quantum intersit inter characteres primitivos & derivativos: id quod Arti

characteristica generali, quam partem quandam Artis inveniendi esse supra jam monuimus, notiones fecundas suppeditat.

§. 152. Usus hujus reductionis analyticus in Arithmetica irrationalium conspicitur; præsertim ubi ea, quæ nos de eadem tradimus, cum illis conferre velis, quæ vulgo in eadem docentur, veluti cum calculo irrationalium in Elementis Algebræ OZANAMI. Sane tractatio nostra tota vere analytica est, qualem requirit *Analys* recentiorum mathematica. Et qui ad cognitionis gradum tertium adspirant, hinc discunt, quemnam facere teneantur characterum derivativorum usum; cumque inferius per Algebram eruamus (§. 146 *Analys.*) quæ hic ex characterere derivativo, regulis Artis characteristica generalis convenienter, deducuntur; hinc porro discere licet, quomodo ex characteribus, derivativis, modo magis naturali & ad *Analys* Veterum propius accedente, eruantur, ad quæ Algebra via quadam extraordinaria ducit: sit ita quod tyrones, quibus intimius singula perspicere nondum datur, Algebræ magis fidant, quam Arti characteristica, quemadmodum indigitavi in scholio problematis 19 (§. 60 *Analys.*). Illustratur quoque doctrina fictionum in Arte inveniendi utilium, radicibus imaginariis, de quibus in scholio tertio problematis 13 (§. 71 *Analys.*) diximus. Et perplexa EUCLIDIS

de irrationalibus doctrina, ope hujus characteristicae, ab omni perplexitate liberari, eidemque plena lux affundi potest; ut non amplius habeant, quod de obscuritate illius conquerrantur, qui eandem ex Elementis hodie vulgo eliminare solent.

§. 153. Quibus calculus irrationalium sub initium molestus est, ii eundem præmittant, & statim ad usum calculi literalis in inveniendis theorematibus se transferant, absoluto algorithmo integrorum & fractionum; donec multo usu calculum literalem magis familiarem sibi reddiderint, majusque acumen acquisiverint ejus applicatione, & attentione majori uti didicerint. In ipso autem progressu patebit, quandonam calculo irrationalium habeas opus; ut gradum sistere & ad ea, quæ in anterioribus neglecta fuerunt, regredi teneris.

§. 154. Sola Arithmetica literalis sufficit ad inveniendâ longè plurima, quæ in Elementis *Euclideanis* docentur; ita ut, qui eam didicit, absque ullo negotio eadem facilitate theoremata *Euclideanâ* reperire possit, quæ exemplis illustrantur. Ostendimus hoc capite tertio. Neque in problematibus resolvendis, quæ ibidem proponuntur, alia notanda sunt, quam ut attendatur, quomodo datorum denominatio fiat, & ut literis designatæ quantitates numeris quoque exprimentur; quo pateat quid intersit discriminis inter exempla universalis

& singularia, & hisce illis lux quædam affundatur, qua indigent tyrones. Observandum tamen, calculum in casu singulari instituendum esse, juxta regulas calculi universalis seu literalis, ubi iste pleniori luce fulgere debet. Ex. gr. in problemate 20 (§. 81 *Analys.*) jubemur determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt. Diximus radicem unam n , alteram $n+1$. Dicantur in casu singulari 7 & $7+1=8$. Quodsi quadratum majoris per calculum universalem reperiatur, erit $7 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 1 = 64$; Quadratum minus $= 7 \cdot 7$, Differentia $2 \cdot 7 + 1 = 14 + 1 = 15$. Ita nimirum constabit, calculum universalem etiam excerci posse in numeris, & sic absque calculo literali eadem detegi posse, quæ per literalem eruuntur; quemadmodum & in Arithmetica fecimus, ubi v. gr. in genesin numerorum quadratorum & cubicorum inquisivimus. Consultius tamen est uti calculo literali, qui hoc commodò gaudet, ut numeri determinati ab indeterminatis sua sponte sese distinguant: cum si notis numericis uti volueris, artificii demum opus sit, quibus hoc fiat. Ita in allato exemplo $2 \cdot 7 + 1 = 14 + 1$, numerus binarius 2 est determinatus, idem in omnibus exemplis, sed 7 est indeterminatus, qui in omni exemplo alio alius. Collatio autem calculi literalis cum calculo universalis, in exemplis singularibus, usui esse poterit

terit ad inveniendā artificia, quibus absque ulla confusione calculus universalis in numeris utiliter exercetur. Nostrium non est ea hic docere uberius, quæ Ars inveniendi jure suo sibi vindicat. Etsi autem calculus universalis in numeris insituendus superfluous videri poterat, literalī invento; falluntur tamen, qui ita sentiunt. Facit enim ad facile demonstrandum haud pauca in gratiam eorum, qui ad Analysin animum appellere nolunt, nec difficiles demonstrationes capiunt; quemadmodum patet per ea, quæ de genesi numerorum quadratorum & cubicorum in Arithmetica doceantur. Neque nullus quoque ejus usus est in Analysi speciosa, prout ex sequentibus constabit. Taceo alia, quæ in ejus favorem dici poterant.

§. 155. Multa hic facillime, absque ullo fere negotio, eruiamus theoremata, quæ in Elementis EUCLIDIS extant, eorumque plura erui poterant, nisi hæc specimina sufficerent. Alia vero investigavimus per Algebram. Enimvero jam supra monuimus (§. 144), per calculum literalem, qui nonnisi magnitudinum calculus est, non omnia in Geometria demonstrari posse theoremata, sed quædam pendere a situ; ad quæ investiganda & analytice demonstranda, peculiaris requiratur calculus situs. Quodsi Analysis situs fuisset reperta; non inconsultum foret in-

tegra Elementa EUCLIDIS analytice demonstrari; ut inter methodum Vetterum, & Analysin Recentiorē clarius pateret differentia. Quodsi quis eam investigare voluerit, is novas condere tenetur definitiones situs notionem involventes; veluti quod *Punctum* sit situs sui unicum, quod *Circulus* sit figura plana, in cujus perimetro singula puncta ad punctum quoddam intra eam dato eundem situm habent, quod *Linea* una sit ad alteram *perpendicularis*, si punctum quodcumque in ea assumptum sit situs sui ad idem punctum alterius unicum. Dicitur autem *situs sui unicum*, quod ad aliam magnitudinem datam, seu punctum aliud datum, eum habet situm, ut nullum aliud præter ipsum eundem situm habere possit. *Eundem vero situm* habent, inter quæ idem extensum, veluti eadem linea recta poni potest (§. 5 *Geom.*). Præterea opus est novo calculo, calculo nempe situs: quem investigaturus perpendere tenetur, calculum in genere esse inventionem characteris derivativi ex aliis, sive primitivis, sive derivativis, per continuam æquivalentium substitutionem (§. 298 *Pfych. empir.*). Hinc enim conficitur, diversos determinandos esse situs possibiles eorumque excogitandos characteres, & ut hos legitime combinare liceat, requiri axiomata quædam generalia aut, si mavis, regulas quasdam generales, quibus perficitur combinatio & substitutio.

Sed

Sed nobis minime vacat, ut in talibus investigandis ingenii nostri vires exerceamus, qui magnum adhuc campum emetiri tenemur, antequam Philosophiam universam ad umbilicum perduxerimus. Sufficit aliis monstrasse viam, qua sit ad metam contendendum. Reddat eandem proprio ingenio & propria industria perviam, qui hanc attingere voluerit.

§. 156. Quanta vero sit vis Artis characteristicae, non modo ex singulis problematis, sed vigesimo praefertim nono, ejusque corollariis (§. 95 & seqq. *Analys.*) perspicitur; in quo binomium ad dignitatem quamcunque evehere docemur; quod deinde ad extractiones radicum (§. 98 *Analys.*), & ad infinitinomium ad dignitatem datam evehendum transferimus (§. 102 *Analys.*). Huc animum advertere debent non modo, qui in *Analysi Recentiorum* feliciter progredi voluerint, verum etiam qui eidem, Artis generalis inveniendi causa, operam navant.

§. 157. Quoniam vero non uno artificio analytico utimur in problematis istis per calculum literalem solvendis; singulis autem artificii insunt generales notiones, quae ad Artem inveniendi generalem spectant; eas inde abstrahere tenentur, qui Artis generalis inveniendi gratia in *Analysi Mathematicorum* versantur: ut vero hoc facere possint, acquirere sibi tenentur acumen pervidendi abstracta in concretis, quod quomodo com-

paretur docebimus in philosophia morali, ubi praxin virtutum intellectualium, inter quas etiam sibi acumen istud locum vindicat, exposituri sumus. Quodsi vero quis in addiscenda Mathesi eo modo versatus fuerit, quem capite primo praescriptimus, & imprimis in representatione definitionum, propositionum, & demonstrationum symbolica industriam suam exercuerit, atque imprimis ad animum probe revocaverit, quae in scholio generali ad algorithmum integrorum de abstrahendis regulis generalibus, juxta quas intellectus in eodem dirigitur, inculcavimus; is se hujus acuminis compotem fieri animadvertet: quod quomodo fiat, nunc exponere non lubet, ne extra oleas evagari videamur. Quemadmodum vero Mathesis & Philosophia mutuas sibi suppetias ferunt; ita quoque ad acumen istud ipso usu acquirendum haud parum confert Logica, qualem nos tradidimus idiomate Latino. Immo Ontologia etiam, & Psychologia, adjumento esse poterit. Quamobrem autor fui, ut, absolutis Arithmeticae ac Geometriae Elementis, studium Philosophiae cum mathematico jungatur. Et si quis in Arte inveniendi generali ex studio Matheseos proficere voluerit; ei suademus, ut, postquam in Philosophia fuerit cum laude versatus, Mathesin universam denuo pertractet, & huc imprimis animum advertat, quod ad usum facultatum in veritate cognoscenda

cenda usui esse potest. Nullum enim dubito fore, ut perspicillis philosophicis usus plus videat, quam cum iisdem destitueretur.

§. 158. Inprimis autem opera danda est, ut tempestive adsuescimus formulis algebraicis, tam per numeros, quam per lineas, explicandis. Quamobrem consultum est, ut data exprimantur, tum numeris, tum lineis, & tam in formula substituantur pro literis numeri, quam figuræ construantur juxta formulam: id quod cum in præsentī capite facillime succedat, plurimum confert ad formulas per Algebram erutas, geometrice præsertim, minori molestia construendas. Ex. gr. in problemate 24 (§. 90 *Analys.*), partes totius sunt Q & q , & prodit aggregatum ex Q^2 & $Q^2 + 2 Q q + q^2 = 2 Q(Q + q) + q^2$. Quodsi fiat $Q = 4$ & $q = 3$, erit $Q + q = 7$, $Q^2 = 16$, $(Q + q)^2 = 49$, adeoque $Q^2 + (Q + q)^2 = 65$. Sed $2 Q = 8$, adeoque $2 Q(Q + q) = 56$. Est vero $q^2 = 9$. Quare $2 Q(Q + q) + q^2 = 65$. Habes itaque etiam examen, quali inprimis indigent tyrones, ut tanto clarius percipiant, quod per calculum fuit erutum a veritate non esse alienum. Etsi enim exempla singularia non evincant veritatem in universali; tyronibus tamen magis satisfaciunt, quam si animum ad calculum advertentes nullibi a se aberratum esse observent. Neque destituitur summa pro-

babilitate, si quidem formula analytica cum exemplo in numeris consentit. Quoniam enim numeri nullo consilio eliguntur, sed potius sumuntur, prout eos casus obtulerit; vix credibile est te casu incidere in numeros, qui ex ratione singulari satisfaciunt formulæ, in omni casu minime veræ. In præsentī casu dubium hoc esse nullum, quod quis movere poterat, ostendi nullo negotio poterat, si calculus universali ratione instituitur etiam in numeris. Etenim si $Q = 4$ & $q = 3$, habebis $2. 4^2 + 2. 4. 3 + 3^2 = 2. 4(4 + 3) + 3^2$, hoc est, $2. 16 + 2. 12 + 9 = 8(4 + 3) + 9$, seu $32 + 24 + 9 = 32 + 24 + 9$. Vides autem pro numeris 4 & 3 substitui posse duos alios quoscunque, ceteris semper eodem modo sese habentibus. Sed nolim tyrones talibus defatigari, nisi tempestive adsuescieri voluerint calculo, universali ratione in numeris instituendo: quo in casu consultum foret, ut numeri determinati, in omni casu iidem, qualis hic binarius ter occurrit, virgula transversa notentur, nempe ut scribatur $2. 4^2 + 2. 4. 3 + 3^2 = 2. 4(4 + 3) + 3^2$. Quodsi Q & q explices per lineas & construas tam quadratum ex composita $Q + q$, quam ex una Q , & deinde rectangulum ex composita Q & q in rectam Q bis sumtam atque quadratum lineæ alterius q , formulam geometrice repræsentabis. Sed utriusque figuræ æqualitatem intuitive non cognosces,

quemadmodum numerorum, qui calculo secundum formulam instituto prodeunt. Hoc tamen non obstante figurarum constructio non omni utilitate caret. Neque enim figuræ eum in finem construuntur, ut examinis vicem subeant; sed ut discamus, quomodo formulæ analyticæ geometricæ construuntur, & earum sensus per figuras explicetur. Subinde tamen accidit, ut non minus veritatem formulæ intuendam præbeant figuræ, quemadmodum numeri. Taceo quod mechanicæ demonstrationi, de qua supra diximus, hic sit locus, si ad principium congruentiæ confugas & partes a figura una rescissas alteri superimponas, prout ipse usus docuerit. Enimvero quibus talia inutilia videntur, is ea prætermittat. Neque enim omnia conducunt omnibus.

§. 159. Nimirum calculus literalis, & ejus applicatio ad solutionem problematum, doceri poterat pueros & adolescentes; quorum captui consulitur, si, quæ abstracta sunt, ad sensum & imaginationem reducantur. In omni Philosophia utilis est hæc reductio; ut eidem nunquam satis adsuefieri possit, qui in hac inoffenso pede progredi voluerit. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, in Algebra versantur, talia negligere non debent, quæ superflua ac puerilia videntur aliis, qui in nuda veritatum mathematicarum cognitione acquiescunt. Maxima

quoque utilitatis est ad recte philosophandum, si actus imaginationis ab operationibus intellectus discernere valeas, ne abortus imaginationis cum notionibus realibus confundas: quemadmodum accidit summis etiam Mathematicis, qui imaginaria a realibus separare non didicere, neglectis exercitiis, quæ huc facere poterant.

§. 160. Difficilis est tyronibus doctrina de ratione quantitatum, quam in Arithmetica demonstravimus; præsertim si theoremata non exponantur per numeros, & demonstratio ad exempla non applicetur. Delectabuntur itaque, quando in problemate 32 (§. 124 *Analys.*) videntur, quomodo per calculum litteralem, absque ullo negotio, omnia pateant; ut ad ea capienda sensuum magis usu, quam intellectus operationibus opus sit. Hæc ipsa autem voluptas, non modo amorem studii algebraici, sed & alacritatem idem prosequendi instillabit. Consultum vero est, ut literæ non minus per numeros rationales, quam irrationales explicentur: id quod non modo universalitatem theorematum per calculum erutorum confirmabit, verum etiam exercitio calculum irrationalem reddet magis familiarem. Immo, ne multitudo theorematum hic coacervatorum obruaris, sed ut singula absque molestia memoriæ insigantur, nisi hoc jam factum fuerit in Arithmetica, hoc ipso obtinebis. Quoniam vero theoremata verbis pure

enunciata in usum futurum memoriæ mandanda sunt (§. 21); non minus consultum est, ut singula verbis enunciis. Hoc modo enunciatorum faciliior quoque erit comparatio cum theorematibus in Arithmetica propositis; cumque ea tota nitatur distinctis notionibus, faciet idem institutum ad notiones confusas ad distinctas revocandum, & animum impatientem reddet ad acquiescendum in confusis, per quas nobis veritatem perspicere videmur: id quod haud parum proderit in Philosophia ad præcavendam præcipitantiam, qua in periculum errandi adducimur, & in errorem haud raro præcipientes damur. Theorema primum, quo investigatur ratio factorum communem efficientem habentium, multiplicatis scilicet duabus quantitatibus, rationem quamcunque inter se habentibus, a & ma , per eandem tertiam c , ita repræsentatur:

$$a : ma$$

$$c \quad c$$

$$ac : mac = a : ma$$

Per numeros rationales explicabitur hoc modo:

$$8 : 12$$

$$3 \quad 3$$

$$3 \cdot 8 : 3 \cdot 12 = 8 : 12$$

$$\text{seu } 24 : 36 = 8 : 12$$

Quodsi 24 dividas per 36 & 8 per 12; fractionibus $\frac{24}{36}$ & $\frac{8}{12}$ reductis, prodibit utrobique $\frac{2}{3}$, idem nempe

exponens (§. 136 *Arithm.*), quemadmodum requirit proportio (§. 149, 155 *Arithm.*).

Per numeros irrationales explicabitur hoc modo:

$$\sqrt{5} : \sqrt{3}$$

$$\sqrt{7} \quad \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} : \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5} : \sqrt{3}$$

$$\text{seu } \sqrt{35} : \sqrt{21} = \sqrt{5} : \sqrt{3}$$

Quodsi denuo $\sqrt{35}$ dividas per $\sqrt{21}$ & $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$, prodibit utrobique exponens idem $\sqrt{1\frac{2}{3}}$.

§. 161. Quodsi existimes, committi hoc pacto circulum vitiosum, cum fractionum reductio ad minores terminos supponat rationum doctrinam, & calculus quoque irrationalium eadem nitatur; non unum est, quod respondeo. Primum constat, calculum fractionum & irrationalium erui posse per Algebram, quemadmodum specimine quodam docuimus (§. 146 *Analys.*), & quod idem imitari detur in casibus aliis, etiam in algorithmo fractionum, monuimus (§. 147 *Analys.*). Sane per Algebram reperiri posse reductionem fractionum ad minores terminos, quod dubio careat, exemplo singulari hoc docere lubet. Sit fractio reducenda $\frac{9}{12}$ Fiat

$$\frac{9}{12} = y$$

$$\text{erit } 9 = 12y$$

$$3 = 4y$$

$$\frac{3}{4} = y$$

adeoque $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

$$\text{Ecce } 2$$

Quodsi

Quodsi pro $\frac{a}{12}$ substituas $\frac{a}{ma}$ vel si
 mayis *na*: *ma*; habebis regulam, quæ
 in Arithmetica ad fractiones ad mi-
 nores terminos reducendos præscri-
 bitur. Cumque calculus hic nitatur
 axiomatis notissimis, intelligi etiam
 poterit ab iis, qui Algebram non-
 dum didicerunt. Deinde notandum
 est, nos calculum fractionum & irra-
 tionalium jam tradidisse, independen-
 ter a problemate 32 (§. 124. *Analys.*),
 adeoque absque circulo vitioso a no-
 bis illustrationis gratia adhiberi posse,
 quæ aliter jam demonstrata sunt, ut
 eorum, quæ traduntur, appareat con-
 sensus. Quamprimum vero scrupu-
 lus iste te angit, tollitur extemplo eo,
 quem diximus, modo. Quodsi quis
 Elementa Arithmetica & Geometriæ
 methodo analytica recentiorum de-
 monstrare veller; is calculum litera-
 lem cum numero in Arithmetica
 combinare poterat, & algorithmum
 fractionum, nullis suppositis de ratio-
 ne quantitatum theorematum, per Al-
 gebram elicere tenetur, antequam
 per calculum literalem demonstret
 theoriam rationum. Ceterum hic
 notari velim, quam facile committa-
 tur circulosus vitiosus, qui non ad-
 vertitur, ab iis, qui extra systema
 propositiones aliquas demonstrare
 volunt; ut agnoscaturnecessitas sys-
 tematum veri nominis in omni scien-
 tiarum genere, & ut principia, qui-
 bus utimur in demonstrando, de-
 sumantur ex systemate, in quo pro-

positiones demonstranda vel non oc-
 currunt, vel saltem non anteriore
 loco, quam principia ista, collo-
 cantur. Videmus etiam per præci-
 pitantiam judicare eos, qui demon-
 strationi cuidam circulum vitiosum
 simpliciter imputant, qui nonnisi in
 relatione ad certum aliquod systema
 committitur; ubi nondum demon-
 straverunt, non posse condi syste-
 ma, in quo veritates ita sibi invi-
 cem subordinentur, ut demonstratio-
 ni isti absque circulo vitioso sit lo-
 cus. Ad talia omnino animum ad-
 vertere tenentur, quotquot intellectus
 perficiendi curam gerunt.

§. 162. Inprimis etiam attentio-
 nem meretur problema 29. (§. 95
Analys.), quo theorema generale pro
 binomio ad dignitatem quamcunque
 evchendo investigatur, ope solius
 calculi literalis; quatenus scilicet
 ostendit, quomodo theoremata in-
 finita ad unicum reduci possint, ita
 ut unum æquipolleat infinitis; ut
 præjudicium illud evellatur animo,
 quasi intellectus finitus non sit capax
 infiniti. Falsum enim esse hinc in-
 telligitur, quod aliis quoque speci-
 minibus comprobabitur in sequenti-
 bus, intellectum infinita compre-
 hendere non posse; cum hic formu-
 las numero infinitas sub una quadam
 contentas exhibeamus. Rationem,
 cur hoc fieri possit, perspiciet, qui at-
 tenta mente perpendere voluerit, quæ
 hic docentur. Nec minus idem pro-
 blema singularem attentionem mere-

tur, ob artificia singularia, quibus in eodem solvendo utimur, & quorum usus etiam est in aliis, immo quæ artificia heuristica generalia suggerunt, extra Mathesin etiam usurpanda.

§. 163. Elementa nimirum Analyseos ita conscripsimus, ut paucas præscriperimus regulas, reliqua vero artificia ipso usu insinuentur: quibus cum utendum sit, non modo in eo problemate ubi primum adhibentur, verum etiam in aliis ubi adhiberi possunt; si reflectendo super iisdem distincta eorundem notio animo imprimitur, & facilius eadem memoria retinentur, & eorum statim meminimus, quando iisdem denuo opus habemus, nec tentatis demum frustra aliis in ea casu incidimus. Generalia vero Artis inveniendi præcepta ut inde abstrahat, qui artificia quibus utimur nondum distincte animo concepit, & in rationes eorum inquisivit, prorsus impossibile est. Quoniam generalia constituuntur similitudine latente in specialibus; ingenii quoque acumen mirifice augetur generalium ista abstractione, quam juvant regulæ de notione generis ex data notione speciei formanda (§. 710 *Log.*), & de notione generum superiorum ex notionibus inferiorum derivanda (§. 711 *Log.*), quemadmodum applicationem extra Mathesin adjuvant regulæ de notionibus specierum ex notione generis (§. 712 *Log.*), & de notionibus

specierum aliarum ex notione speciei unius deducenda (§. 714 *Log.*); quas singulas & ipsas a Mathesi abstrahi posse, exempla docent, quibus problemata hæc illustravimus in Logica.

§. 164. Nemo a nobis requisiverit, ut artificia specialia, quibus utimur, ad notiones generales revoceamus, & alias speciales determinemus, quibus extra Mathesin in aliis veritatibus investigandis opus est. Hæ enim pertinent ad Artem inveniendi generalem, quam suo loco, si Deo visum fuerit, explicaturi sumus: ubi in notis adjectis doceri poterit, quomodo ab artificijs analyticis Mathematicorum abstrahantur, quæ in ea ex notionibus ontologicis, & psychologicis, aliisque Philosophiæ principiis, demonstrantur. Sufficit excitasse attentionem illorum, qui studium Philosophiæ cum mathematico conjungunt, ea methodo philosophantes, qua nos utimur.

§. 165. Enimvero progrediamur ad Algebram proprie sic dictam. Algebra primum non erat nisi regula arithmetica, quæ instar regulæ trium in eadem docebatur, & in numeris tantummodo exercebatur. Arithmetica literali a VIETÆ, Gallo, inventa, latior patebat ejus usus; cum sub literis, non solum numeri seu quantitates discretæ, sed & magnitudines seu quantitates continuæ comprehenderentur. Unde calculum literalem VIETÆ ad Geometriam elementarem applicabat

GHETALDUS Italus in Libris *de Resolutione & Compositione mathematica*. Cum HARRIOTTUS Anglus, Arithmeticam literalem ope characteristica magis perfecisset, & CARTESIUS genuina characteristica potentiarum usus, (quemadmodum jam obiter monuerat KEPLERUS in *Harmonica*, & rationem designationis perspicue multo ante docuerat STIFELIUS in *Arithmetica integra*; numerorum cofficorum naturam ex genuinis fundamentis eruens,) Algebram quoque ad Geometriam superiorem applicaret; illustrior adhuc ejus evasit usus. Nos igitur ut in tradenda Algebra gradatim procederemur, primum eam exercere docuimus in problematis arithmeticis determinatis; deinde etiam in indeterminatis; mox in problematis Geometriæ elementaris; tandemque in problematis Geometriæ sublimioris. Quoniam vero Geometria sublimior aliud adhuc calculi genus requirit, in quo quantitates supponuntur infinite parvæ, methodo a KEPLERO in *Stereometria* primum quasi obiter indicata, a CAVALERIO in *Geometria Indivisibilium magis promota* & a STEPHANO præsertim DE ANGELIS, atque GREGORIO A S. VINCENTIO ulterius exculsa; hoc quoque calculi genus, cum reductione quantitatum ad series infinitas per divisionem MERCATORIS, & extractions radicum *Newtonianas*, combinatum, explicavimus; & Al-

gebræ usum, adhibito hoc calculo in Geometria sublimiori, multo latior em exposuimus. Ceterum cum in Geometria elementari omiserimus theoremata nonnulla, quæ difficilius demonstrantur; qualia sunt de multificatione anguli, seu divisione circuli & arcus in partes quotcunque æquales, & de investiganda soliditate corporum regularium, nec non de inscriptione quorundam polygonorum in circulo ab EUCLIDE demonstrata; Geometriam vero sublimiorem methodo Veterum demonstratam prorsus non attigerimus; quæ hic desiderari poterant, per Algebram investigare docuimus, ut una eademque opera & Ars inveniendi exerceretur, & theorematum scitu necessariorum cognitio acquireretur. Quoniam enim non cujusvis est in numeris, & lineis, atque figuris consensescere, & ab omnibus studium Philosophiæ cum mathematico conjungi consultum sit; plerique etiam non alio fine Mathesin puram tractare debent, quam ut in Philosophia aliisque studiorum generibus felicius progrediantur; Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ abunde sufficere existimavimus, ut genuinam methodum, sine qua ad solidam rerum cognitionem in quocunque scientiarum genere perveniri minime datur, nobis familiarem reddamus; præsertim si demonstrationes nostro more resolvantur, & singula analytice repræsententur, quemadmodum capite primo

primo præcepimus; & ceterarum veritatum mathematicarum facillimo modo acquirendam esse duximus cognitionem.

§. 166. Studium algebraicum ut facilitaremus, primas tantummodo exposuimus regulas (§. 141, 143 *Analys.*), easque statim applicavimus ad exempla; problematis eo consilio electis, ut vel artificium aliquod analyticum animo insinuent, vel veritatem quandam cognitu necessariam doceant. Ita problemate statim 38, quod in hoc genere primum est, (§. 144 *Analys.*) ostendimus, dari proprietates numerorum singulares, quibus ab omnibus aliis distinguuntur, & quæ differentiam eorum numericam constituunt. Hoc ipso illustratur doctrina de differentia numerica individuatorum, in Ontologia a nobis tradita, & in Cosmologia, ac Psychologia demonstrata; ex doctrina autem de origine idearum in intellectu divino, prorsus a priori deducta, ex ipsa natura & attributis Dei, entis omnium primi, multo clarius elucescens, scholæ autem non satis animadversa, multo minus expensa. Quoniam vero exemplum nonnisi singulare est, numeri nempe nonnisi duodenarii; sequente statim problemate (§. 145 *Analys.*) theorema generale eruere docemus, tum ut pluribus exemplis confirmetur idea tam nobilis, multique per philosophiam omnem, tam practicam quam theoreticam, usus, tum ut uberius

explicetur artificium problemata particularia, immo singularia, ad universalitatem revocandi; cujus jam specimina quædam dedimus in anterioribus, veluti cum problema generale de binomino ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analys.*), de radice quacunque inde extrahenda (§. 98 *Analys.*) & de infinitinomio ad dignitatem quamcunque evehendo proponeremus (§. 102 *Analys.*), & regulas de permutatione quantitatum, seu variatione ordinis earundem, ad universalitatem revocaremus. Similiter problemate 40 (§. 146 *Analys.*), specimine quodam docui per Algebram investigari posse talia, quæ aliis etiam modis crui possunt, & in scholio (§. 147 *Analys.*) monui, idem in aliis quoque eodem modo procedere. Quod vero utilitate sua non destituatur, eandem veritatem pluribus modis diversis investigari, supra jam monuimus (§. 161). Illustravimus differentiam, quæ intercedit inter solutionem problematum in numeris abstractis & concretis (§. 161 & *seqq. Analys.*), & artificia reductionis insinuavimus (§. 163, 183, 184 *Analys.*). Cum de proportionem harmonica & contra harmonica, nec non de numero pronico, & numeris polygonis, aliisque figuratis nihil dixerimus in Arithmetica, ne ejus theoriam nimium extenderemus, & a studio Geometriae nimis diu derineremus tyrones, studii mathematici facile effecturi desertores; defectum istum

istum hic supplemus, dum theoremata præcipua ad theoriam istorum numerorum spectantia per Algebram eruere docemus (§. 186 & seqq. ac §. 206 & seqq. *Analys.*). Idem a nobis factum esse in reliquis capitibus, qui animum huc advertere libuerit, facile deprehendet.

§. 167. Inprimis autem singularem attentionem meretur artificium prorsus singulare, quo in summandis quadratis & cubis, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur, utimur (§. 200 *Analys.*), & quod mox ad summandas potentias quasunque numerorum naturalium transferimus (§. 203 *Analys.*), ac deinde ad summandos numeros polygonos (§. 212 *Analys.*), & ad summandos quoque pyramidales adhibemus (§. 216 *Analys.*). Quantum enim eodem præstetur, abunde intelliget, qui quæ hac methodo eruuntur conferre voluerit cum *Arithmetica infinitorum* WALLISII & inprimis BULLIALDI. Facile autem apparet, methodum hanc ad alia problemata arithmetica solvenda transferri posse, perinde ac calculus summatorius in Geometria amplissimum habet usum. Nec puto faciliiori modo potentias, & numeros figuratos summi posse. Loquuntur autem hæc ipsa problemata, & problema de binomio ad dignitatem infinitam evchendo, ac radice quacunque ex eodem extrahenda, ut alia taceamus, quam ardua problemata per calculum lite-

ralem, & Algebram solvi possint, etiam si paucissima theoria fueris instructus; ut adeo methodi hæc, in Arte inveniendi, præ methodo Veterum sese maxime commendent. Per eas enim aditus ad ea patet, quæ a nostra cognitione intervallo quam longissimo adhuc sunt remota. Clarius idem elucescet in sequentibus. Unde si quis in Mathesi inventorem agere voluerit, ei *Analys.* Mathematicorum recentiorum nunquam satis commendari potest.

§. 168. Per universam *Analysin*, in solvendis problematis, calculum integrum distincte exhibuimus; ut quilibet tyro proprio Marte intelligat, quomodo problema fuerit solutum, & quomodo ordine in solutione sit progrediendum, quem præscribunt regulæ generales ab initio expositæ. Lineis quoque distinctimus ea, quæ ex anterioribus concluduntur, ab iis, ex quibus colliguntur per communem algorithmum. Non tamen hoc ipso solutiones reddidimus prolixiores, quin potius in minus easdem spatium haud raro coarctavimus. Et qui citra confusio- nem, quæ errorem facile parit, absque ulla molestia, problemata solve- re voluerit; eo modo calculum instituere teneat, quo eundem in contextu repræsentamus. Quilibet adeo experietur, nullibi ipsi esse hærendum, modo attentionem asferre voluerit. Equidem, brevitatis gratia, nonnisi speciminibus quibusdam ostendimus, quo:

quomodo formulæ algebraicæ verbis explicentur, ut prodeant regulæ, per quas problema solvitur in dato quocunque casu particulari; nec non quomodo theorematum ex calculo eruantur. Suadendum tamen tyronibus, ut idem faciant in singulis problematis. Sentient utilitatem, ubi in hoc labore sese præstiterint diligentes. Explicavimus formulas per numeros; ut discant tyrones, quod eadem instar regulæ sint, quæ per calculum eruuntur universalem. Initio tamen utilitate sua non caret, si solutionem algebraicam tentent in exemplis singularibus, numeris in locum literarum, quibus quantitates datæ designantur, surrogatis, quemadmodum exemplo aliquo ostendere lubet. In problemate 41 (§. 148 *Analys.*), datur duarum quantitatum summa & eorundem factum, quaruntur quantitates ipsæ. Quare si sit summa $a = 14$, factum $b = 48$; resolutio talis erit:

Sit summa $= 14$, semidiffer. $= x$
factum $= 48$, erit Quantitas

$$\text{maj.} = 7 + x$$

$$\text{min.} = 7 - x$$

$$- 7x - x^2$$

$$49 + 7x$$

$$\text{Factum} = 49 - x^2$$

Ergo

$$49 - x^2 = 48$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$1 = x^2$$

$$1 = x.$$

Quare $7 + x = 8$, & $7 - x = 6$.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

§. 169. Quodsi problemata quæque per Algebram numerosam solvas; non modo hinc elucescet discrimin inter Algebram numerosam & speciosam, & hujus præ illa præstantia agnosceretur; cum per istam nonnisi exempla computentur, per hanc vero solutiones, adeoque veritates universales detegantur; verum etiam calculus algebraicus reddetur familiarior & clarior. Hoc vero suademus nonnisi primis tyronibus. Qui enim in calculo jam fuerint versati, istiusmodi exercitiis non amplius habebunt opus. Consultum vero est exemplum calculi numerosi conferri cum calculo specioso; tum ut appareat, quantum convenient, quantum differant, tum ut numerosus lucem affundat specioso. Quodsi quis universalitatem in calculo numero conservare velit, haud difficulter idem præstabitur, quemadmodum exemplum modo allatum, & hic alia forma exhibitum, docet:

$$7^2 - x^2 = 48$$

$$7^2 = 48 + x^2$$

$$7^2 - 48 = x^2$$

$$\sqrt{7^2 - 48} = x$$

Vides nimirum, in quolibet casu, a quadrato semisummæ 7^2 subtrahendum esse factum & ex residuo extrahendam radicem, ut habeas semidifferentiam numerorum quæstorum. Quodsi Veteres hoc animadvertis-

F f

sent;

sent, per Algebram numerosam, ante inventum calculum literalem, non minus veritates universales eruisse, quam nunc per speciosam erui solent. Si enim in calculo numerofo universalitatem conserves, specioso prorsus æquipollet, quemadmodum collatio utriusque calculi intuenti extemplo prodit. Immo hoc pacto etiam, eodem successu, per Algebram numerosam solvi poterant problemata geometrica, quemadmodum nunc solvuntur per speciosam. Sed de hoc dicemus suo loco. Ratio in aprico est. Per calculum speciosum obtinentur solutiones universales, quia idem in omni casu particulari, & pro literis, quibus quantitates datæ designantur, numeri quilibet substitui possunt, salvo calculo integro. Idem vero succedere eodem modo in calculo numerofo, qui universalitatem conservat, per se patet. Quoniam signa primitiva, qualia sunt quibus exprimentur quantitates datæ, prorsus arbitraria sunt; notis autem numericis significatum universale imponere licet; universum a singulari, quem habent, abstrahere licet; veluti ut 14 non significet summam ex duobus numeris determinatis, (quas hic esse 8 & 6 solutio prodit), sed summam ex duobus quibuscunque numeris, immo generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus compositam, veluti si significet lineam in duas quascunque partes divisam; & similiter 48 non denotet factum ex

duobus numeris determinatis iisdem cum anterioribus, quorum summa est 14, sed potius factum ex duobus quibuscunque aliis, cum illis tantummodo iisdem qui summam conficiunt, vel generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus, cum illis iisdem ex quibus summa componitur; veluti quando 14 significet lineam in duas quascunque partes divisam, si 48 denotet rectangulum ex parte una in alteram.

§. 170. Non difficile fuisset Veteribus hæc animadvertere; si quidem in universalia in iis, quæ cognoscebant, latentia mentis aciem intendere voluissent, & a notatione numerorum notiones Artis characteristicæ universales abstraxissent: ad quod faciendum non defuit ipsis acumen, sed defecit tantummodo attentio ad ea quæ, pro scopo præsentis, satis cognita atque perspecta deprehendebant. Discant hinc velim omnes, quibus puerilia, aut saltem superflua videntur, quæ ad tractandam Mathesin præcipimus, quantum non modo sibi, verum etiam scientiæ desint, qui, quæ se satis intelligere arbitrantur, ea nulla amplius attentione dignantur, & vulgarium meditationem ad sublimia nitentibus non convenire arbitrantur. Multo luculentius hæc patebunt, ubi Artem inveniendi explicare licuerit. Nos experti, quantum valeat vulgarium meditatio, nulli dubitamus, quin in Philosophia universa, præsertim in Physica, & Philosophia morali, im-

mo ipsa civili, dudum principia certa, per quæ ad remotiora paratur aditus; constituissent Philosophi; siquidem ad notiones communes, ex maxime vulgaribus derivandas, sufficientem attentionem asserre voluissent. Neque vero existimandum est, convenire hæc iis, quibus ad sublimiora non conceditur aditus. Etenim non leve acumen requiritur, ut notiones communes, quas suppeditant obvia, non modo ad distinctas & determinatas revoces, sed & inde universales abstrahas. Quamnam enim, quæso, ratio est, cur notionum communium, admodum fertilem, quemadmodum vel EUCLIDIS Elementa testantur, immo ipsa quoque Algebra confirmat, non eum hætenus fecerint usum Philosophi, nec etiam in dirigendis actionibus viri prudentes, quem facere poterant, nisi quod negligantur ab iis, qui acumine alios vincunt. Sane cur Mathematici summi, quorum acumen accusari nefas, genuinam demonstrationis formam non apprehenderint, ratio alia non est, quam quod eandem attentione sufficiente dignati minime fuerint, sine qua distinctam ejus notionem consequi minime datur. Constat autem, quantum sibi metipsis defuerint, tum ubi demonstrationes more Veterum in ipsa Mathesi dare voluerunt, tum quando extra eandem veritates quasdam demonstrare conati sunt. Quo majore acumine maxime vulgaria

perlustrantur, eo profundiora in iis latentia in apricum proferuntur.

§. 171. Postquam usum Algebræ in solvendis problematis Arithmetici determinatis ostendimus, ad problemata indeterminata progredimur capite secundo. Applicamus in eo Algebram ad problemata pleraque DIOPHANTI, a quo horum solutio *Analysis Diophantea* appellari suevit. Ex quo Algebra ad Geometriam, præsertim sublimiorem, & inprimis ad problemata physico-mechanica applicata fuit; Analysis Diophantea negligi cœpit, ita ut præter OZANAMUM in *Elementis Algebræ*, vix quisquam fuerit alius, qui ultra *Diophanteos* limites eandem promovere conatus fuerit. Quam minus recte autem hoc fiat, jam LEIBNITIUS monuit, qui ejus præclarum usum in *Analyse infinitorum* observavit. Singularibus in iis artificiis haud raro opus est, tum si denominationem spectes, tum si reductionem consideres. Quamobrem suadeo, ut, qui horum problematum solutionem expendit, in rationem inquiret, cur denominatio hoc modo fuerit facta & reductio hoc modo instituat, ubi aliquid inusitati occurrit. Ex. gr. in problemate 92 (§. 230 *Analys.*), quo summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere jubemur, ubi latus quadrati majoris dicitur a , minoris b ; latus quaesiti unius appellatur $a-z$, latus alterius $yz-b$. Ratio denominationis non patet per communes

regulas: per eas enim dicendum erat latus unum x , alterum y (§. 141 *Analys.*). Enimvero si denominatio hoc modo fiat, habebimus $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$, consequenter $x = \sqrt{a^2 + b^2 - y^2}$. Sed hac solutio nulla est, cum in *Analyfi* *Diophantea* solutio quaeratur in numeris rationalibus. Quamobrem in scholio (§. 231 *Analys.*) monuimus, cur ad vitandam irrationalitatem, latera quadratorum quaesitorum sumserimus $a - z$ & $yz - b$. Enimvero cum idem non fecerimus in ceteris, sed propriae discentis meditationi reliquerimus; necesse est ut ad rationem generalem animum advertens specialem ex conditione calculi cruat.

§. 172. Quoniam in problematis indeterminatis facilius aberratur, ubi singularia artificia adhibenda sunt; tyronibus suadendum, ut problemata generaliter soluta etiam in numeris aliquoties solvant, quo artificia ista ipsis magis familiaria reddantur. Consultum etiam est, ut, ubi formulas generales per numeros explicaverint, examen addant, quo numeros repertos conditionem in problemate praescriptam habere innotescit. Ex. gr. in problemate 87 (§. 225 *Analys.*), reperiuntur numeri 11 & 6, quorum partes aliquotæ numeris suis additæ efficere debent eandem summam. Quoniam 11 est numerus primus, quem quippe sola unitas metitur (§. 75 *Aritbm.*), præter unitatem partem aliquotam aliam

non habet (§. 30, 74 *Aritbm.*). Unitas igitur si eidem addatur, summa efficitur 12. At senarii partes aliquotæ sunt 1, 2 & 3, quas ubi addas ipsi numero 6; habebis itidem summam 12. Similiter, per formulam generalem determinantur duo numeri 104 & 116. Illius partes aliquotæ sunt, 1, 2, 4, 8, 13, 26 & 52: hujus vero 1, 2, 4, 29 & 58. Est vero $1 + 2 + 4 + 8 + 13 + 26 + 52 + 104 = 210$, & $1 + 2 + 4 + 29 + 58 + 116 = 210$. Nec inconsultum est, ut etiam in hac *Analyfi* formulæ algebraicæ verbis explicentur, quemadmodum supra præcepimus (§. 168); si quis præsertim *Mathesin* non sibi soli discit, sed intellectus potissimum perficiendi gratia eidem incumbit. Etenim non leve exercitio opus est, ut, quicquid animo concipis, verbis distincte enuncies. Nisi vero hac facultate polleas, in studio philosophico, & quocunque alio scientiarum genere, accurata methodo nunquam uteris. Extra *Mathesin* non habemus characteres & figuras, quibus imaginatio juvatur, & defectus distincte enunciandi, quæ concipiuntur vi intellectus, suppletur. Inprimis autem usui est, ut quam maxime abstracta verbis perspicuis accurate enunciare valeas; ubi tibi propositum fuerit, ex perceptionibus obviis crueret notiones universales quæ iisdem insunt, & veritatibus in casu particulari agnitis omnem suam tribuere ampli-

amplitudinem, quam habere possunt: id quod mirifice conducit ad omnem cognitionem promovendam, & prudentiam, qua ad recte agendum opus habemus, amplificandam. Immo augebitur eodem medio notiones distinctas formandi facultas, quæ non adeo facile acquiritur, quemadmodum vulgo putatur, præsertim ubi cum abstractis tibi fuerit negotium. Scholastici in distinguendis iis, quæ diversa sunt, satis fuerunt acuti; sed quæ confuse perceperunt distinctè concipere, & verbis perspicuis accurate enunciare non valuerunt. Quamobrem Metaphysicam tenebris involverunt, nec ratiocinando quicquam ex notionibus confusis colligere potuerunt; ut scientia nobilissima in terminologiam versâ fuerit, ac proinde a nonnullis perperam pro Lexico quodam philosophico habita. CARTESIUS vero, qui notionum distinctarum usum indispensabilem in scientiis perviderat, Ontologiam in eorum numerum retulit quæ contempti merentur; & in Physicis, imaginaria cum realibus confudit, ut ad veritatem liquidam pertingere non potuerit; Philosophiam vero practicam, quam excoli maxime interest, prorsus intactam reliquit; etsi ipsi propositum esset Philosophiam reformare, cujus defectus abunde agnoscebat.

§. 173. Sed dicta sufficiant de applicatione Algebræ ad problemata

arithmetica. Progrediamur itaque ad problemata geometrica, quæ capite tertio traduntur. Problemata geometrica duo singularia habent. Etenim plerumque artis est invenire æquationem; nec ea tam obvia est, quemadmodum in problematibus arithmeticis puris, ubi scilicet numeri dantur abstracti. Deinde non minoris artis est formularum algebraicarum, per quas determinatur quæsitum, constructio geometrica. Immo subinde difficultate non caret, ut reperiatur, quid quæri debeat, ut in commodam incidat solutionem. Quamvis vero problemate 110 (§. 250 *Analys.*) præferantur regulæ generales de invenienda æquatione; eadem tamen non ita determinatæ sunt, ut in dato quolibet casu statim appareat, quam earum utendum sit ad æquationem inveniendam, sed haud raro variis id tentandum est modis. Similiter in problemate 111 & 112 (§. 252, 253 *Analys.*) docuimus, quomodo construantur æquationes simplices & quadraticæ omnes; monuimus tamen in scholio (§. 254 *Analys.*), quod hoc modo raro incidamus in constructiones concinnas, quales sunt, quæ in Elementis Geometriæ extant, cum tamen concinnæ potissimum desiderantur. Quamobrem modus quo pervenitur ad æquationem, & quo æquatio ultima, per quam determinatur quæsitum, construitur, majorem attentionem meretur, quam qua in

problematis arithmetici usi fuimus; ut pateant artificia, quibus utimur, in aliis casibus similibus, quando occurrunt, imitanda. Ut autem constructionem concinnam reperias, primo tentanda est per regulas generales, quæ præscribuntur. Deinde dispiciendum, quomodo omnes linearum determinationes eidem schemati includantur, in quo lineæ singulæ commodum nanciscantur situm; ut prodeat schema, quod visum minime offendit, & in quo citra molestiam lineæ ex loco uno in alterum transportantur. Nulla adhuc datur constructionum elegantium theoria, in qua elegantia, quam ipsi tribuimus, ad notionces distinctas reducitur; quamvis ea non impossibilis sit. Pendet ea a principiis generalibus pulchritudinis entis compositi, quam & ipsam nemo hæcenus explicavit. Insunt Architecturæ civili notionces quædam generales, quæ huc faciunt; sed nemo hæcenus ad eas, quantum publice constat, animum advertit. Quamobrem hæcenus, in casu omni, demonstrari nequit, constructionem, quam dedisti, esse eam, in qua nihil desiderari possit. Et haud raro, casui magis quam arti tribuendum, quod in constructionem incidat, quæ pulchritudine sua sese commendat. Neque vero existimandum est, si vel in nostris *Analyscos Elementis*, vel apud autores alios, occurrunt constructiones elegantes; eas ex formula algebraica juxta regulas generales re-

soluta primo statim conamine deductas fuisse. Quin potius pro certo tenendum, eas haud raro multum negotii fecisse inventoribus, antequam ad eam formam deducerentur, quam habent. Ceterum ut dicta intelligantur, specialia quædam addenda sunt.

§. 174. In problemate 113 (§. 255 *Analys.*), quo, ex data perimetro & area trianguli rectanguli, hypotenusam invenire, ipsumque triangulum construere docemus, non minus æquationis investigatio, quam trianguli constructio singularia quædam habent, quæ attentionem merentur. Quodsi in investiganda æquatione via ordinaria, quam monstrant regulæ generales, incedere voluissimus, hoc modo æquatio inventa fuisset.

$$\begin{array}{ll} AB + BC + CA = a & AC = x \\ \text{Area} = b^2 & AB = y \end{array}$$

erit

$$AB + BC = a - x.$$

$$BC = a - x - y$$

Duæ cum inveniendæ sint æquationes, alteram suppeditat theorema Pythagoricum, vi cujus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*), alteram vero area trianguli $= \frac{1}{2} AB \cdot BC$ (§. 392 *Geom.*). Habemus itaque

$$\begin{array}{rcl} x^2 = 2y^2 + a^2 - 2ax & b^2 = \frac{1}{2} ay \cdot \frac{1}{2} xy \cdot \frac{1}{2} y^2 \\ \quad + x^2 - 2ay + 2xy & \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} ay \cdot \frac{1}{2} y^2 - b^2 \\ \hline 0 = 2y^3 + a^2 - 2ax - 2ay & xy = ay \cdot y^2 - 2b^2 \\ \quad + 2xy & x = \frac{ay \cdot y^2 - 2b^2}{y} \\ \hline 2ax - 2xy = 2y^3 + a^2 - 2ay & \\ \hline x = \frac{2y^3 + a^2 - 2ay}{2a - 2y} \end{array}$$

Quam-

Quamobrem

$$\begin{array}{r}
 2y^3 + a^2 - 2ay \quad = \quad ay - y^2 - 2b^2 \\
 \hline
 2a - 2y \quad \quad \quad y \\
 \hline
 2y^3 + a^2 - 2ay = 2a^2y - 4ay^2 - 4ab^2 + 2y^3 + 4b^2y \\
 \hline
 0 = a^2y - 2ay^2 + 4b^2y - 4ab^2 \\
 \hline
 2ay^2 - 4b^2y - a^2y = -4ab^2 \\
 \hline
 y^2 - \frac{4b^2 + a^2}{2a} y = -2b^2 \\
 \hline
 \text{Fiat } \frac{4b^2 + a^2}{2a} = m, \\
 \text{erit } y^2 - my = -2b^2. \\
 \frac{\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}m^2} \\
 \hline
 y^2 - my + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 - 2b^2 \\
 \hline
 y - \frac{1}{2}m \quad \left. \vphantom{y - \frac{1}{2}m}} \right\} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2 \right)} \\
 \frac{1}{2}m - y \\
 \hline
 y = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2 \right)}
 \end{array}$$

Vides hic, quam prolixus evadat calculus, si viam ordinariam ingredieris stricte inhærens regulis generalibus. Incidis in æquationem quadraticam affectam; cum in solutione, quam in textu dedimus, æquatio sit simplex, adeoque primi gradus. Quodsi y per constructionem geometricam determinare volueris, primo eruendus est valor ipsius m . Est vero

$$m = \frac{4b^2 + a^2}{2a} = \frac{2b^2}{a} + \frac{1}{2}a.$$

Unde patet, te eadem opera, si æquatione in contextu utaris, reperisse hypothenusam, qua hic valorem m repe-

ris, quo in constructione geometrica æquationis ultimæ hic opus habes: ut adeo dubitari non possit, constructionem quoque fore multo prolixiorē, & intricatiorē ea, quam in contextu exhibemus. Abbreviatur calculus, & æquatio multo simplicior eruitur, quia problema ad æquationem reduci uteris theoremate de compositione quadrati, cujus radix binomia (S. 261 *Arithm.*); adeoque plures veritates cognitæ supponis, quam si viam ordinariam ingrederis; & ad circumstantias particulares animum attendis, quarum viam ordinariam ingressus nullam habes rationem. Nihil itaque hic singulare occurrit, quod non eodem modo locum habeat in aliarum regularum generalium applicatione. Quia ea attentione utitur in addiscenda Mathesi, quam in capite primo inculcavimus; rationem hanc jam dicit in Practica Italica, ubi, ob circumstantias singulares, ope theorematum quæ tanquam cognita præsupponuntur, & quorum in regula trium opus non habemus, calculus abbreviatur. Discas hinc velim, quod, si nostro more in studio Arithmeticæ & Geometriæ versatus acumen quoddam tibi comparaveris, te in studio quoque algebraico fore acutiorem, & dum eidem incumbis, in majore luce versaturum. Acumen vero, hoc studio algebraico auctum, non uno nomine sese tibi commendabit, ubi ad Philosophiam & alia addiscendum

dum progredieris, immo in ipsa praxi vitæ. Enimvero constructio quoque trianguli rectanguli, ex perimetro & area datis, attentionem meretur. Vulgo triangula rectangula construimus ex datis cruribus, quibus ad angulum rectum junctis determinatur hypotenusa: quæ etiam ratio est, cur problema per regulas generales solvantes investigamus cruris y valorem. Construi vero etiam potest triangulum rectangulum data hypotenusa & altitudine: quæ constructio denuo uberiorem theoriam supponit, quam communis; quod facile animadvertes, ubi fundamentum, quo nititur constructio, pendere volueris. Unde vides cur, inventa hypotenusa, etiam quasi-verimus altitudinem. Et quoniam inventa in numerum cognitorum refertur, x non amplius spectatur tanquam magnitudo incognita, sed pro cognita habetur; ut adeo constructionem præter necessitatem efficeret prolixior & intricatior, si pro x valorem inventum in æquatione $y = b^2 : \frac{1}{2}x, = 2b^2 : x$ substituere velles. Immo commodius accidit, si retineas $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, quam si, reductione modo ordinario facta, sumas $y = 2b^2 : x$. In quo denuo latet quoddam artificium, quod in geometricis constructionibus formularum algebraicarum utile est, & quo etiam in sequentibus utimur.

§. 175. Regulas arithmeticas non adscripsimus, brevitatis gratia; non

modo, quod geometricarum constructionum hic potissimum habetur ratio; verum etiam quod ex anterioribus satis manifestum supponimus, quomodo formulæ algebraicæ arithmetice explicentur, & regulæ arithmeticæ inde deducantur. Non tamen ideo tyrones negligere debent formularum per numeros explicationem, & regularum arithmeticarum enunciationem. Etsi vix opus esse videatur, exemplo præsentis rem declarari; ut tamen consulamus minus perspicacibus, id fecisse non nocebit. Æquatio itaque $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ hanc suppeditat solutionem arithmetice, adhibito artificio, quod sub finem paragraphi præcedentis commendavimus: 1. Quærat ad perimetrum dimidium $\frac{1}{2}a$, & latus quadrati area æqualis b^2 , tertia proportionalis, quæ erit $\frac{2b^2}{a}$. 2. Hæc sub-

trahatur a semiperipheria $\frac{1}{2}a$, relinquetur hypotenusa quæsitæ. Arithmetice explicabis formulam hoc modo. Sit $a = 12$, $b^2 = 6$. Erit $\frac{1}{2}a = 6$, adeoque $x = 6 - \frac{12}{6} = 6 - 2 = 4$.

§. 176. Qui ex solutionibus problematum proficere voluerit, quantum datur; is negligere minime debet theorematum, quæ offerunt æquationes. Quamobrem in problemate, quod nunc perlustramus, docuimus, quomodo theorema ex æquatione secunda, seu penultima cruatur. Enimvero ipsa etiam æquatio ultima theorema

rema non inelegans suppeditat. Cum enim $2b^2 : a$ vel $b^2 : \frac{1}{2}a$ sit differentia inter semiperimetrum trianguli rectanguli $\frac{1}{2}a$ & hypotenusam x , extemplo patet theorema sequens: *Differentia inter hypotenusam & semiperimetrum trianguli rectanguli est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati area trianguli aequalis.* Non video quid obftet, quominus hoc theorema ceteris Geometriæ elementaris adscribi possit; nisi quod usum, quem habere possit, non prævideas: nullum enim esse demonstrare minime vales. Sane si hæc ratio sufficeret ad theoremata ex Mathesi eliminanda, multa ex eadem arcenda & olim fuissent, & nunc essent; quorum egregius prorsus, successu temporis, comparuit usus, & in posterum comparebit. Ecquis prævidere poterat usum, quem habet comparatio progressionum arithmeticarum & geometricarum, cui inventum logarithmorum longe utilissimum deberi constat, & qua STIFELIUS usus in algebraicis æquationibus intimius explicandis? Quodsi igitur hanc comparisonem tanquam inutilem rejicere voluissent Mathematici, locum in Mathesi eidem denegaturi, quod usum ejus minime præviderent; logarithmorum doctrina & ardua illa, quæ in Mathesi sublimiori ab eadem pendent, forsitan hodiernum non essent detecta. Inventores non solliciti esse debent, num, quod investigandum sibi sumunt, utile sit, sed

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

num quod investigaverunt sit verum. Utilitas enim sua veluti sponte sese manifestabit, ubi in veritate investiganda progrediuntur, quam prævidere nullo modo poterant. Multum obest incremento scientiæ, si qui eam promovere possunt ac volunt, hoc præjudicio tenentur, quod de veritatis inveniendæ utilitate prima moveri debeat quæstio. Hæc enim cura tangere debet nonnisi eos, qui ab aliis inventa certo fine addiscunt; etsi cautione multa opus sit, ubi utilitatem ex vero æstimare voluerint; ne, quemadmodum plerumque accidit, quæ maxime utilia sunt pro inutilibus reputentur.

§. 177. Forsan non inconsultum judicaveris, ut constructiones ex calculo erutæ, itemque theoremata hinc derivata etiam more Veterum, seu synthetice demonstrantur. Non improbo consilium, ubi hoc facile fieri potest, & ea fini problemata quædam per leges rationum reduximus, quemadmodum problema 116 (§. 259. *Analys.*); ubi ipsa reductio demonstrationem quæsitam continet, modo singulæ analogiæ verbis enunciantur. Enimvero, cum per Algebram solvantur problemata, quæ a cognitione nostra adhuc procul sunt remota; defectu principiorum ad ratiocinandum requisitorum, per quæ ratiocinando colligi poterat quæsitum, quemadmodum in Geometria fecimus; multa haud raro theoremata interme-

G g

dia

dia essent inveniendæ, antequam demonstratio synthetica dari posset. Unde facile intelliges eam non esse in potestate tua. Sume exempli loco theorema, quod modo (§. 176) elicimus: In triangulo rectangulo differentia hypotenusæ a semiperimetro est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati triangulo æqualis. Si demonstrationem syntheticam dare volueris, hæc analogia ex aliis notis colligenda per theoremata de ratione quantitatum. Enimvero in Geometria elementari nihil adhuc demonstratum est de perimetro trianguli rectanguli. Quamobrem alia adhuc inveniendæ essent theoremata, antequam demonstrationem consummatam dare possis, quales dedimus in Geometria. Notabis jam non vacat eam in rem inquirere, ut exemplo dicta confirmaremus. Nemini igitur suademus, ut tempus in quærendis istiusmodi demonstrationibus fallat, quod longe utilius in exercenda Analyfi consumere datur. Quodsi vero obvia fuerit demonstratio, eam addi non dissuademus.

§. 178. Si existimaveris demonstrationes syntheticas dari posse, si vestigiis calculi insistens verbis enunciis, quæ per eum patent, & in reddendis rationibus ad leges calculi confugas; totus falleris: neque enim forma demonstrationis mutabitur, si characteribus expressa verbis enuncientur. Abunde hoc videre licet in *Phoronomia* HERMANNI, cujus

præsentæ demonstrationes syntheticæ seu lineares, quas vocat, quantum distent a demonstrationibus *Euclidæ* nullo negotio deprehendet, qui cum fuerit in resolvendis demonstrationibus more nostro versatus resolutionem demonstrationum *Hermannianarum* tentare voluerit. Præstat igitur in analyfi acquiescere, quam per eandem reperta minus recte demonstrare. Sane ipse NEWTONUS (quod citra injuriam in maxima Viri summi merita dictum esto,) multa, corollariorum instar, absque ulla demonstratione subjicit propositionibus, quæ subinde prolixam desiderant demonstrationem, si *Euclidæ* more evincenda eorundem veritas; immo corollariorum loco habet, quæ absque ulla demonstratione pateant lectori, quæ posita propositione minime ponuntur. Exempli loco est, quando problema inversum virium centripetarum in sectionibus conicis pro corollario directi habet, cum tamen conversio per se minime pateat; nec quis ferret, in Geometria elementari, si, ex parrallelismo linearum demonstrata angulorum æqualitate, per modum corollarii absque demonstratione inferret: Ergo etiam parallelæ sunt linæ, si anguli alterni fuerint æquales. Non omnes propositiones posse converti, ex doctrina logica de conversione fatis manifestum est. Quamobrem ubi conversio per rationes logicas non statim patet, conversæ utique demon-

demonstranda est. Immo cum ex principiis logicis demonstrandum foret, propositionem converti posse; Geometris veteribus consultius visum ex principiis propriis, aliunde non supponendis, demonstrare conversam. Nos vero, qui omnibus justum statuere pretium solemus, demonstrationes logicas in numerum artificiorum heuristicorum referimus, per quas reperire, nonnunquam saltem conjectare licet, propositionem aliquam datam & demonstratam converti posse. Qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navat, is a rigore demonstrandi ne latum quidem unguem recedere tenetur; ne methodi confusæ notiones & de eadem concepta præjudicia noceant extra Mathesin: quod quam facile fieri possit, jam in superioribus monuimus (§. 100, 101).

§. 179. Ceterum, cum demonstrationibus syntheticis confundendæ non sunt demonstrationes, quibus evincitur constructionem juxta formulam per calculum erutam rite esse factam. In his enim supponimus quæsitum eo modo determinandum esse, quemadmodum exigit formula algebraica. Quoniam nos constructiones ad formulam retulimus, earundem demonstrationes in ipsa constructionum explicatione jam continentur. Quodsi vero illas verbis enunciare velles, demonstratio ubique adjicienda foret, de qua hic sermo est. Ita in exemplo nostro, ubi

triangulum rectangulum construendum ex formulis $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & $y = b^2 : \frac{1}{2}x$ (§. 255 *Analys.*); constructio pure enunciabitur hoc modo: 1°. Erigatur ad perimetrum BD perpendicularis AB, quæ sit ad latus quadrati areae trianguli æqualis in ratione dupla; fiatque BG ipsi lateri huic æqualis. 2°. Quærat ad BD, AB & BG quarta proportionalis BH. 3°. Fiat BC semiperimetro æqualis; & ex C in I transferatur modo inventa BH. 4°. Super BI describatur semicirculus; & ad BO diametrum ipsius BI, & BE dimidium ipsius AB, quærat tertia proportionalis BK. 5°. Ducatur denique ex puncto K diametro BI parallela KL. Quodsi 6°. punctum L cum extremis diametri B & I rectis BL & LI connectatur, prodibit triangulum rectangulum quæsitum BLI. Hoc modo si enunciaris constructionem, ut prodeat resolutio problematis, quali forma exhibentur resolutiones in Geometria elementari; demonstratio sequens adjicienda utique est, ut manifestum evadat, suppositis formulis algebraicis tanquam veris, seu, uti loqui amamus, iisdem concessis, constructionem esse veram. Nimirum quoniam $BD = a$, $AB = 2b$, $BG = b$; erit quarta proportionalis $BH = 2b^2 : a$. Quare cum sit $BC = \frac{1}{2}a$ & $CI = BH$, erit $BI = x$, seu hypotenusa trianguli rectanguli construendi per formulam primam. Jam quia porro $BO = \frac{1}{2}x$, $BG = BE = b$, erit $BK = b^2 :$

Fig. Al-
gebr.
Tab.
XII.
Fig. 113.

$=b^2 : \frac{1}{2}x$, adeoque altitudo trianguli rectanguli construendi. Quoniam itaque recta KL est ipsi BI parallela & BLI semicirculus super hypothenusa trianguli descriptus; erit BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa $\frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & altitudo $=b^2 : \frac{1}{2}x$. Quod erat construendum. Suppono nimirum hic tanquam notum, quomodo triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa sit construendum. Quod si enim notum non sit, demonstratio ex principiis Geometriæ elementaris facile contexitur. Etenim angulus BLI, cum sit in semicirculo *per constr.* rectus est (§. 317 *Geom.*), adeoque BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa BI (§. 91, 95 *Geom.*). Linea KL est diametro BI parallela, & KB ad BC perpendicularis, *per construct.* consequenter perpendiculara inter eadem intercepta KB & ex L in BI demissum æqualia sunt (§. 226 *Geom.*). Enimvero KB est altitudini trianguli æqualis, *per construct.* & perpendicularum ex L in BI demissum ipsa trianguli BLI altitudo (§. 227 *Geom.*). Patet itaque si supra hypothenusa describatur semicirculus & in ejus altero extremo erigatur perpendicularis altitudini æqualis, per ejus vero summitatem ducatur recta diametro parallela & punctum, in quo hæc fecit semicirculum, connectatur cum extremis diametri; triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa data esse constructum.

Problema hoc, cum sua demonstratione, Elementis Geometriæ inferi poterat; ex cujus quippe principis eodem prorsus modo demonstratur, quo problemata cetera ibidem demonstrantur.

§. 180. Cum formulæ algebraicæ contineant regulas, per quas ex datis determinatur quæsitum; & per calculum ac demonstrationem æquationis, nisi hæc in conditione seu hypothese problematis continetur, verum esse constet, quod sic determinetur quæsitum, quemadmodum vult formula; qui constructiones ex formulis erutas pure enunciat, & easdem deinde hisce convenienter factas demonstrat, in demonstrando sese non minus exercet, quam si in demonstrationibus Arithmeticæ & Geometriæ elementaris versetur. Quamobrem qui methodum demonstrandi sibi familiarem reddere intendunt, eadem extra Mathesin feliciter usuri; iis omnino suadendum, ut constructiones pure enuncient, & ad eam formam redigant qua resolutiones problematum in Geometria elementari exhibentur, atque deinde demonstrationes, cum quibus jam nobis negotium est, superaddant.

§. 181. Et quoniam problematum simplicium reductio per leges rationum, cujus exempla quædam dedimus (§. 259, 266, 289 *Analyf.*), & reductio quadratici ordinis ad lineas reciprocas (§. 263, 265, 278 *Analyf.*) propius accedit ad Analysisin Veterum,

terum, & demonstrationes ad formam Veterum componendas formaliter continet; eam negligere minime debet, qui methodum Veterum cum methodo Recentiorum conjungere voluerit. Probe nimirum notandum est, signorum usu non variari ipsam methodum, quæ in modo ratiocinandi consistit, sed tantummodo facilitari & clariorem reddi; quemadmodum demonstrationes Veterum eadem manent, si nostro more resolutæ, ope Artis characteristicæ, symbolice representantur. Sane per hoc, quod in Geometria elementari utamur signis, quorum in Algebra usus est, demonstrationes non sunt algebraicæ, quemadmodum hebetiores judicant; sed tantummodo brevius & clarius exprimuntur. Vocabula non minus signa sunt, quam signa alia, quæ in locum eorum surrogantur. Quemadmodum itaque eadem manet demonstratio, si vocabula idem significantia sibi mutuo substituis, prouti in versionibus accidere solet, ubi v. gr. Latinis substituis Germanica, vel Gallica; ita nec alia evadit, si vocabulis alia signa substituis, quæ cum ipsis idem significant. Ita perinde est, siue dicas, triangulum BDE simile est triangulo BAC, siue scribas, $\triangle BDE \sim \triangle BAC$: etenim si verbis reddere volueris, quæ ita scripsisti, verbis istis eadem efferre teneris; perinde ac dicendum est, *das Dreyecke BDE ist dem Dreyecke BAC ähnlich, ubi Germanice redde-*

re volueris, quod Latine dictum fuerat.

§. 182. In problemate 114, (§. 257 *Analys.*) quo, data arca trianguli rectianguli, cujus latera sunt in proportionem continua, inveniri jubentur latera; & reductio, & constructio singularia habet, quæ attentionem tyronum merentur. In reductioe notandus est modus, quo eliminatur quantitas alterutra incognita, utpote a regula generali recedens (§. 141 *Analys.*). Notanda quoque est applicatio calculi irrationalium, qua formula efficitur simplicior. In constructione autem notatu dignum est artificium, quo numeri irrationales in lineis exhibentur, & radices quoque quadrato-quadratæ per Geometriam elementarem construuntur. Quæ enim in aliquo problemate singularia occurrunt, ad ea advertendus est animus, cum eisdem insinuentur artificia, quibus utendum in casu simili, quoties is occurrit. Et selecta dicuntur problemata, quæ vel in veritatum cognitu necessariarum notitiam nos deducunt, vel artificia suggerunt, quibus Ars inveniendi locupletatur, ipso usu rectius discenda, quam per præcepta; cum hæc non satis intelligantur, nisi per exempla. Quamobrem qui in *Analysi* proficere voluerit, non sine singulari attentione circa singula problemata versari tenetur; ut, si qua nova occurrunt, ea comparatione cum regulis generalibus instituta advertat & memoriæ infigat.

§. 183. Non commemoramus hic alia, quæ in ceteris problematis annotabit attenta mente & solutionem & constructionem perlustrans; ne præter necessitatem iusto prolixiores videamur. Unum tamen est, quod notasse non piget, scilicet ex problemate 124 (§. 275 *Analys.*) patere, per Algebram subinde prodire formulas, quæ statim dant constructionem, quam Veteres suo modo invenerunt. Patet in hoc problemate ratio, quod in æquatione investiganda insistamus iisdem principiis, quibus usi Veteres in eruenda constructione. Et quamvis problema sequens (§. 279 *Analys.*) de latere Pentagoni inveniendò contrarium insinuare videatur; videbis tamen, si attentius rem consideres, nos totos in eo esse, ut investigemus relationem lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni regularis eidem circulo inscriptorum simul, qua nititur constructio Veterum. Eam vero non dare regulas reductionis generales; sed utendum hic esse singulari artificio substitutionis; quo neglecto, per æquationem $x^2 = 4b^2 - b^4 : a^2$, vel per $\frac{29}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}}a^2$ longe alia prodiret constructio, quam dedere Veteres. Immo nisi relatio lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni simul, ex inventis Veterum, nobis cognita & perspecta fuisset; non facile adfuisset ratio, cur de ista substitutione cogitassetus. Duo igitur hic probe notari velim, cum in veritate investi-

ganda multum relictum sit tentaminibus, in problematum resolutionibus algebraicis & præsertim in formularum constructionibus, operam dandam esse ut problema & ejus constructio efficiatur dependens a veritatibus aliis jam inventis; quæ dependentia in methodo Veterum, qua usi sumus in Geometria elementari, & in demonstrationibus propositionum syntheticis, unice attenditur, & ut ea fini tententur substitutiones, quibus locus esse potest. Elucescit hinc usus, quo commendatur studium in veritatibus nobis jam notis analytice investigandis, si nempe proponantur tanquam querendæ. Istiusmodi enim investigationes efficient, ut animum attendas ad artificia, quæ alias eundem non subirent, & quibus posthac felici successu usus es in investigandis iis, quæ nondum cognita, sed adhuc latent. Neque enim sufficit, artificia quædam esse in potestate nostra; verum etiam requiritur ratio, cur eadem mentem nostram subeant, quando iisdem commode utimur: id quod ex principiis nostris psychologicis abunde patet. Ratio autem ista non semper a nobis pendet, sed a casu, qui potestati nostræ subducitur. Quodsi vero artificia nobis fuerint familiaria, quoniam iisdem jam ante usi ea attentione conveniente memoriæ infiximus; probe conscii varia esse tentanda, ubi veritas latens eruenda; eadem nobis in memoriam revocamus: id quod

quod denuo per principia nostra psychologica manifestum est; ut nihil affirmetur, quod non ex iisdem demonstrari possit, si demonstratio exigatur; quamvis defectum demonstrationis hic suppleat experientia domestica, si quis dictis fidem habere voluerit.

§. 184. Forsan nec inconsultum erit quædam adhuc moneri circa examen Rēgulæ *Renaldiniane* polygonum regulare quodcunque circulo inscribendi. Constat ex Elementis EUCLIDIS, constare modum; quo trigonum, quadratum, pentagonum, octogonum, decagonum, quindecagonum circulo inscribitur, & idem patet ex anterioribus. Quamobrem totum examen huc redit, ut investigetur valor lateris cuiusdam polygoni, aut saltem partis ejusdem, per regulas demonstratas; deinde vero idem valor eruatur per regulam RENALDINI; quæ si vera fuerit, valor per eam inventus erit alteri æqualis. Quodsi ergo hosce duos valores æquales ponas, & exinde eruas contradictionem; hinc patebit, regulam *Renaldinianam* esse falsam, cum alteram veram esse constet. Nimirum hinc agnoscitur illam contradicere veritati manifestæ, adeoque, per principia logica, quibus nititur tota methodus demonstrandi per indirectum, colligitur eam falsam esse debere. Examen adeo præsens pendet a principio contradictionis, & in applicatione methodi de-

monstrandi per indirectum consistit. Eodem artificio utimur etiam in aliis; veluti si quis dederit Quadraturam circuli; sumta diametro pro unitate, valorem peripheriæ eruiamus in fractionibus decimalibus, quia constat numeros LUDOLPHI notissimos cum veritate consentire. Quodsi enim ab his diversi prodeant, prætensam quadraturam circuli veritati contradicere, adeoque falsam esse colligitur. Novi equidem quod huic examini manus victas dare nolint, qui circuli quadraturam sibi-invenisse videntur: sed hi sunt, qui ignorant, quomodo numeros suos eruerit LUDOLPHUS, & quales sint methodi recentiorum; quibus investigantur series infinitæ pro circulo, unde iidem numeri deducuntur. Valeat hic pervulgatum istud: Cum ignorante principia non est disputandum.

§. 185. Quantum interfit discriminis, inter constructionem elegantem & minus elegantem, clarissime clucescit, ubi utramque constructionem * trianguli rectanguli, ex data area una cum angulo uno obliquo, inter se conferre volueris. Ipsa vero hæc collatio etiam manifestabit rationem, cur constructio secunda prima sit elegantior. Constructio secunda simplicitate sua sese ita commendat, ut in Geometriam referri possit. Habet autem hoc singulare constructio, quod recta simul representet sinum totum, & rectam datam; sicque loco quartæ proportionalis inveniendæ sit

* Probl. 149.

sit tertia, singulari modo per constructionem trianguli rectanguli determinata, qui ab eo longius recedit, quem in Elementis Geometriæ docuimus; etsi hujus quoque fundamentum in illis ipsis contineatur. Quodsi quis constructionibus æquationum in Algebra sedulam operam navaverit; is varias solutiones ex Elementis demonstrandas detegat, quæ in usum constructionum elegantium in Algebra, non sine tyronum commodo, posthac Geometriæ elementari inferentur; ut hæc ampliorem nanciscatur usum, & studium construendi formulas algebraicas facilitetur.

§. 186. Problema 152, cum duobus sequentibus (§. 325 & *segg. Analysis*) inter difficilia referri solet. Ita autem eadem resolvimus, ut nec tyronibus quicquam difficultatis facessant. Præmittitur, in resolutione primi, theorema quod tanta facilitate ex principiis Geometriæ elementaris demonstratur, ut ipsum in iisdem Elementis locum mereatur. Hoc ipso autem exemplo docemur, quod in usum Analyseos & Geometriæ sublimioris, supplementum quoddam Elementorum Geometriæ conscribi posset, quo studium algebraicum & Matheseos mixtæ multum facilitaretur. Sane si hoc ipsum theorema, quod ad resolvendum problema præsens primus adhibuit NEWTONUS, ab EUCLIDE jam fuisset traditum; Mathematici alii non tantopere in resolvendo hoc problemate desudaf-

sent. Confirmat igitur problematis præsentis resolutio ea, quæ superius (§. 176) inculcavimus de non contemnendis theorematis, quæ nullum usum habere videntur, seu quorum saltem usum prævidere minime licet. Vi hujus theorematis, solo calculo literali, absque regulis Algebrae, ex sinu & cosinu anguli simpli eruuntur sinus & cosinus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, sextupli, septupli &c. ita ut hoc problema jam superius c. 3. exhibere potuissimus, ubi usus calculi literalis in inveniendis theorematis explicatur. Apparet adeo denuo, quam ardua solo calculo literali eruantur, etiamsi Algebra prorsus ignota supponatur. Inprimis vero animum attendi convenit ad artificium, quo ex theorematis particularibus eruitur universale. Consistit hoc in reductione ad theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evahendo; & reductio ipsa nititur comparatione formularum particularium problematis præsentis cum formulis particularibus problematis superioris. Principium hoc reductionis amplissimum habet usum in omni Arte inveniendi, etiam extra Mathesin; quemadmodum jam in Psychologia me monuisse memini. Inprimis autem reductio problematis unius ad aliud, quod notius & simplicius, in Geometria sublimiori & in calculo integrali usum profusus eximium habet. Quamobrem

consultum est hoc artificium tempestive observari. Tollit reductio hæc, in casu præsentē, omnem laborem, cumque valde molestum, quo alias opus foret, si eodem modo legem progressionum in infinitum, quam formulæ particulares loquuntur, ex earundem comparatione elicere velles; quemadmodum supra fecimus, cum theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigarem. Ostendi etiam, quomodo ex formula cosinus multipli, expungatur valor sinus simpli, per legem substitutionis, ut cosinus multipli determinetur per solum simplex atque sinum totum. Hoc modo eruuntur alia theorematum particularia; & universale quoque aliud prodiret, si eadem substitutione valores b^2 , b^4 , b^6 , b^8 , &c. eliminare velles. Quem calculi molestia non deterret, is eundem tentare potest; quamvis non opus habeamus hisce theorematibus, cum dato sinu facile reperitur cosinus (§. 16 *Trigonom.*). Ceterum hic quoque elucet, quomodo infinita theorematum comprehendantur uno generali. Sed cum hic nihil occurrat, quod non jam animadversum fuerit in problemate 29 (§. 95 *Analyf.*); plura ea de re non addimus. Corollarium vero, quod adjicitur, attentionem meretur, ut notes alibi etiam profutura. In eodem scilicet ostendimus, quod idem theorema inserviat determinandis chordis arcuum multiplo- rum, quo

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

sinus angulorum multiplo- rum determinantur: immo quod hinc etiam pendeat multiplicatio arcus, & consequenter anguli per datum numerum. Notandum igitur hic est; in scientiis, problematum quoque æquipollentiam esse perpendendam; non modo, ne entia præter necessitatem multiplicentur, verum etiam ut, in solutione problematis investiganda, seligamus illud quod facilius solvi potest. Sane, in nostro casu, non adeo prona erat solutio, si loco sinus anguli multipli investigandam tibi proposuisses chordam arcus multipli. Neque enim meditatio te duxisset ad theorema geometricum, cui debetur solutionis problematis præsentis facilitas. Multum in philosophia usum habet, ut æquipollentia agnoscantur. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, Mathesi operam navant, ea probe notare tenentur, ad quæ hic attentionem excitamus.

§. 187. Problema de tangente arcus multipli ex data tangente simpli inveniendâ, quod operosissime solvitur ab aliis, hic nullo fere negotio solvitur, si nostram solutionem cum aliis solutionibus compares. Notanda igitur sunt artificia, quæ facilitatem solutionis pariunt. Primum artificium, idque palmarium, in eo consistit, quod problema hoc consideretur tanquam dependens ab altero de inveniendâ sinu anguli multipli ex dato sinu simpli. Unde intelligitur, quantæ sit utilitatis,

H h

ut

ut dependentiæ problematum a se invicem habeatur ratio. Quoniam vero hoc pacto prodit formula, tangentem anguli multipli ex datis sinu & cosinu simpli, non ex tangente simpli determinans, quod querebatur; ideo, per legem substitutionis, valores sinus & cosinus simpli eliminamus, ut eorum loco introducatur tangens anguli simpli. Dux sunt quantitates exterminandæ, nimirum a & b . Singulari autem ratione hic accidit ut, cum una earundem a , eliminetur etiam altera b : quod nisi succederet, substitutione nihil efficeret, propterea quod valorem ipsius a , per tangentem t expressum, ingreditur simul b , & vicissim valorem b , per t expressum, simul a . Atque hæc forsitan ratio fuit, cur problema nostrum independentem a problemate sinus & cosinus anguli multipli inveniendi solvendum esse visum fuerit. Unde patet veritatem investigaturum non nimis tribuere debere iis, quæ apparent; &, nisi impossibilitas fuerit demonstrata, non obstante apparentia tentandum esse, quod successu cariturum videtur. Tentaminibus enim in veritate investiganda multum esse tribuendum nemo diffitebitur, nisi qui eorum usum nondum fuit expertus. Ceterum hic quoque attentionem meretur artificium, quo utimur in abbreviando calculo, eoque a perplexitate tædiosa liberando; dum pro coefficientibus substituimus literas majores, pro quibus deinde,

calculo absoluto, iterum reponuntur earundem valores. Etsi enim eodem artificio jam antea fuerimus usi, veluti in problematis 54 & 81 (§. 165, 213 *Analys.*); applicatio tamen in casu præsentem non statim cuilibet succurrit, nisi qui in anterioribus ad idem artificium animum attendit, & distincta notione comprehensum memoriæ infixit; quemadmodum ex natura animæ, vi principiorum nostrorum psychologicorum, facile demonstratur. Ea enim dedimus in Psychologia principia, per quæ ratio a priori dari potest, in casu dato, eorum quæ in anima contingere observamus. Denique notandum est, quomodo formula pure enuncietur, ut prodeat solutio facillima intellectu, in locum formulæ surroganda. Continet ea legem progressionis in infinitum, qua nituntur formulæ particulares, qualem in anteriori problemate deduximus ex formulis particularibus in usum generalis eruendæ. Ceterum, quæ hic annotavimus de problemate tangentis multipli ex tangente simpli arcus inveniendæ, eadem etiam tenenda sunt de problemate secantis anguli multipli ex data secante simpli inveniendæ (§. 328 *Analys.*).

§. 188. Quæ hæcenus de Algebra tradidimus, non progrediuntur ultra terminos ab Arabibus assignatos, a quibus eandem accepimus; nisi quatenus ope Arithmeticae literalis, seu calculi universalis, ad quem animum

non

non adverterunt Arabes, multo amplior efficitur illius usus, ut per eam pateat accessus ad ea, quæ inaccessible videbantur. Ante inventam vero Arithmeticam literalem, Algebram ulterius provehere studuerunt Itali; nec infelici prorsus successu. Cum enim Arabes in æquationibus quadraticis subsisterent; **SCIPIO FERREUS**, ulterius progressus, dedit regulas ex æquationibus cubicis extrahendi radicem, a **CARDANO** publici juris factas; **LUDOVICUS** vero *Ferrariensis* etiam ex æquatione biquadratica radicem extrahere docuit. Neque Algebra in hunc usque diem ulterius promota, ex quo, ope calculi literalis & calculi differentialis, adeo amplificatus est ejusdem usus, ut nihil videatur a cognitione nostra adeo remotum, quin ad ipsum aperiat aditum. Etsi enim **DE TSCHIRNHAUSEN** invenisse sibi visus est methodum universalem quamcunque æquationem affectam reducendi ad puram; eamque Analyfi suæ demonstratæ inferere nullus dubitavit **CAROLUS REYNEAU**; tentanti tamen apparebit, eam non succedere, nisi in æquationibus cubicis, ad quas etiam eandem tantummodo applicavit **DE TSCHIRNHAUSEN** & qui eandem approbavit **REYNEAU**: eandem enim methodum ad æquationes altioris gradus applicaturus, incidet in æquationes, quæ superioris gradus sunt quam resolvenda; id quod monendum utique fuerat, ne Algebra

complementum suum videatur nacta, a quo tamen longissimo intervallo adhuc distat. Non difficile fuerat **Dn. DE TSCHIRNHAUSEN** hoc observare, modo applicationem in superioribus æquationibus tentasset, nec nimia forsan in vires suas confidentia, quæ ipsum non in unum errorem seduxit, difficultates oblatas pro superabilibus reputasset, quæ omnino insuperabiles sunt, saltem hæcenus superari minime possunt. Quoniam itaque methodus universalis, extrahendi radicem exactam ex æquatione quacunque data, desiderabatur, nec adeo facile erat eandem reperire; ad extractionem radicis per approximationem confugerunt Analytæ, & methodum ingeniosam jam dedit **FRANCISCUS VIETA**. Alii alio modo idem tentarunt; quod prolixè recenseri nostri jam non est instituti: neque enim nobis propositum est historiam Algebræ scribere, sed ea tantummodo enarrare, quæ scitu necessaria sunt lectori Elementorum nostrorum Analyseos, ut majore luce fruatur, nec quasi in tenebris versetur, ignorans, cur ea de extractione radicum ex æquationibus altioribus tradamus, quæ capite quinto continentur. Nos hic retinimus methodum facillimam, (quam Arithmetici nostrates, *die Rechenmeister*, in Algebra numerosa *Cossicam mechanicam* appellarunt; & quam etiam adhibuit **NEWTONUS**, & **RAPHSON** in peculiari Tractatu multis exemplis

illustravit); sed nostro more captui tyronum magis accommodatam; qua radix æquationis reperitur in fractionibus decimalibus tam exacta, quantum desideratur. Et quoniam HALLEIUS regulas duas universales investigavit, alteram rationalem, alteram irrationalem, quæ merito commendatur; eandem eadem methodo investigare docuimus, qua in exemplis singularibus usi sumus, & quæ breviori ac trita magis via ad eandem ducit, quam qua HALLEIUS ad eandem pervenit. Methodus hæc in praxi satisfacit, nec ea ulteriorem Algebrae perfectionem desiderat. Neque enim in praxi desiderantur numeri irrationales, quales prodeunt per inventas generales formulas radicum in æquationibus cubicis (§. 358 *Analys.*); sed numeri rationales. Quando vero ex irrationali actu extrahenda radix; eam quærimus in fractionibus decimalibus, quales reperimus per methodum, de qua jam nobis sermo est. Applicatio autem formularum irrationalium plerumque plus pareret laboris quam methodus approximandi. Immo si in formula, substitutis numeris pro literis, extrahenda foret radix altioris gradus; non inutiliter recurreremus ad methodum approximandi, qua statim uti poteramus (§. 365 *Analys.*). Non tamen ideo damnamus, si quis in extrahendis radicibus ex æquationibus superioribus ulterius progrediatur: facit enim ad perfe-

ctionem theoriæ, seu incrementum scientiæ, & ad Artem inveniendi locupletandam. Enimvero, cum de commoda methodo extrahendi radicem ex æquatione quacunque data, sive exacte, sive per approximationem, laborarent Mathematici; in naturam æquationum inquisiverunt & quomodo eandem præparentur, sicubi opus est, investigarunt. Unde enata sunt problemata ista, quæ initio hujus capituli explicantur.

§. 189. Problemata ista intellectu facilia sunt ei, qui in anterioribus attentionem suam suumque acumen desiderari minime passus; ut adeo opus non sit quædam de iis moneri. Calculum in singulis adeo perspicue representavimus, ut in eodem versantes levi saltem attentione opus habeant ad problematum solutionem intelligendam. Usus autem eorum, quæ de natura æquationum docentur, elucescit ex problemate 165 (§. 351) de extrahenda radice rationali, si quam habet æquatio; id quod rarissime accidit. Duplicem proponimus methodum. Altera nititur principio substitutionis; altera vero principio de natura æquationum, quod scilicet æquationes altiores prodeant per multiplicationem simplicium. Atque hæc posterior ingeniosior est priori. Non amplius turbabit tyrones, quod alterum æquationis membrum hic ponatur 0, modo in anterioribus fuerint satis attenti; quoniam per reductionem aliquoties pro-

dit

dit talis æquationum forma. Quando primum tale quid occurrit, attoniti quasi hærent tyrones, quod aliquid nihilo æquale esse debere existiment, non advertentes ad diversitatem signorum, ut ipsis succurreret axioma, Si æqualia ab æqualia subtrahuntur, nihil relinquitur. Nimirum hic differentia nulla est: differentia autem nulla per fictionem quandam nihilo æqualis ponitur. Proprie enim loquendo ei, quod non est, nullum prædicatum positivum competere potest; juxta canonem tritissimum scholasticorum, Non entis nulla sunt prædicata. Æqualitas est prædicatum, quod quantitibus convenit: quod verò nullum est, cum non sit in quantitatum numero, nec æquale dici potest alteri. Fingitur adeo nihil quantitatis esse aliquam quantitatis speciem; ut de eo prædicatum, quod nonnisi quantitibus convenire potest, enunciari possit fiducia axiomatis, Quamlibet quantitatem æqualem esse sibimetipsi. Nugari videretur, qui extra usum in calculo talia proponeret; veluti si demonstrare vellet, nihilum æquale esse nihilo. Hac tamen demonstratione subsistit fictio adeo utilis in calculo algebraico. Simile quid obtinet, si alterum æquationis membrum fuerit quantitas privativa; ubi tyrones perspicaciores, ad diversitatem signorum in altero æquationis membro non attenti, vel saltem ignari, quantitates privativas excedere posi-

tivas, hærent, existimantes aliquid poni minus nihilo, seu quod aliquid est æquale esse debere ei quod nihilo minus est; cum tamen revera minus nihilo ponatur ei quod minus nihilo est æquale; quatenus, in calculo, fingimus quantitatis defectum per eam, quæ deficit, æstimabilem esse veram quantitatem. Fisiones istiusmodi plurimum habent utilitatis in calculo, nec iisdem carere possumus. Nodum in scirpo quarit, qui contra eas difficultates accessit. Ad fisiones recurrendum est etiam extra Mathesin, nisi nescire velis, quæ scitu maxime necessaria sunt. Ita, in Jure naturali, Civitatem fingimus instar personæ liberæ, quæ sui juris est, & cui per naturam suam certa competunt jura; immo individuum unum physicum in plura moralia dividimus; & individuum morale physico contradistinguimus, tanquam personam diversam ab eo; immo unum eundemque hominem distinguimus a se ipso, quasi duæ sint personæ, quarum una alteri obligatur, & uni in alteram competunt certa jura: qua fictione utitur ipse Apostolus, dum hominem novum veteri contradistinguit. Nec ignotæ sunt istiusmodi fisiones in Jure Romano. Exemplo sit postliminium; ut taceamus alia, ubi fisiones non adeo manifestæ sunt, alio loco a nobis commemorandæ. Quod si dicas, in explicanda æquationum natura poni $x = -5$, adeoque quantitatem positivam æqua-

lem privativæ: id quod utique contradictorium sit; cum quantitates privativæ positivis heterogeneæ sint, adeoque ratio æqualitatis, qualem supponit æquatio, inter eas intercedere nequeat (§. 24 *Analys.*). Enimvero cum, in æquationibus compositis, radix non minus quantitas negativa, quam positiva esse possit; ea autem designetur litera x ; quamdiu valor ejus ignoratur, signum eidem adjiendum dubium est: in casu autem dubio signo + afficitur: id quod etiam in sequentibus fiet, ubi utile est non attendi signorum diversitatem. Quando itaque in formatione æquationum sumitur $x = -b$, non supponitur, quantitatem positivam privativæ æqualem esse, sed tantummodo sumitur, eadem litera x indigitari posse non minus quantitatem positivam, quam negativam; cum signa primitiva sint prorsus arbitraria; & quantitatem privativam subinde utiliter considerari instar positivæ, quando fictionem istiusmodi fert natura rei, nec ea in errorem seducit.

§. 190. In resolutione problematis 168. (§. 358 *Analys.*), quo ex æquatione cubica extrahi jubetur radix, singulare occurrit artificium, quo quantitas incognita x dividitur in duas partes indeterminatas y & z , & harum ope æquatio data transmutatur in aliam, quæ duas incognitas indeterminatas continet. Etenim hoc ipso obtinetur, ut lege comparationis terminorum utraque determine-

tur, & sic inveniat quæsitum per partes. Nimirum, quia y & z indeterminatæ sumuntur, ideo licet ponere $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ & $y^3 + z^3 = q$; non alia de causa, quam quia commodum accidit, ut per primam æquationem eruatur valor unius indeterminatæ z , qui in æquatione altera substitutus dat valorem ipsius y atque z determinatum. Æquatio $y^3 - qy^3 = -\frac{1}{27}p^3$ duas habet radices; quarum altera quod sit $= y$, altera vero $= z$, ex eo liquet, quia ex æquatione prima $3y^2z + 3z^2y = py + pz$, reperitur $y = p : 3z$, perinde ac $z = p : 3y$, & valor ipsius y in altera $y^3 + z^3 = q$ substitutus dat æquationem $z^6 - qz^3 = -\frac{1}{27}p^3$, eandem cum anteriore. Manifestum enim est æquationem, quæ ducit ad valorem determinatum quantitatis cognitæ, duas habere debere radices, quarum una denotat y , altera vero z ; etsi perinde sit quam ipsi y , quam vero ipsi z tribuere velis; cum quantitates y & z pro arbitrio assumantur, ut pro majore & minore habere possis, quam volueris. Hoc artificio jam usi sumus in investiganda regula tollendi secundum terminum ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), ut nempe coëfficiens secundi termini propter indeterminatam poni possit nihilo æqualis. Diversa tamen in præsentī casu ejus applicatio est.

§. 191. Limites æquationum eo modo investigare docuimus, (§. 356 *Analys.*), qui in *Commentariis ad Geometrias*

metriam CARTESII proponitur. Habet enim hoc singulare ea methodus; quod Algebram, quæ tota nititur ratione æqualitatis, extendat ad rationem inæqualitatis, ubi inæqualia, mediante signo $>$ vel $<$, eodem modo inter se comparantur, quo in Algebra æqualia mediante signo $=$, & reductio per similia axiomata instituitur, quo eadem in Algebra fieri consuevit. Hanc ipsam vero methodum, etsi hæcenus attentione sua indignam eam judicaverint Analystæ, etiam alibi usui esse posse, exemplo aliquo facili monstrare lubet. Ponamus quæri, qualis sit ratio, quam habent duæ quantitates inæquales ad eandem tertiam. Resolutio problematis ita sese habet:

Sit major $= x$ Data tertia $= a$
 minor $= y$

$$\begin{array}{r} \text{erit} \\ x > y \\ \hline ax > ay \end{array}$$

Fiat $x : a = t : v$

$$\text{erit } x = \frac{at}{v}$$

$$\text{adeoque } \frac{at}{v} > ay$$

$$\frac{at}{v} > y$$

$$\frac{t}{v} > \frac{y}{a}$$

$$\text{Ergo ob } \frac{t}{v} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

$$\text{hoc est } x : a > y : a$$

Habemus adeo theorema: *Majus ad idem majorem rationem habet, quam minus*, istiusmodi analysi investigatum, qua problemata algebraice solvuntur. Non alio fine proponimus hoc problema, quam ut ideam quandam hujus methodi animo tyronum ingereremus. Consultum igitur erat, ut exemplum eligeremus facile, & ex anterioribus jam notum. Videbimus deinceps applicatione methodorum, quæ nobis innotescunt, ad exempla notissima & maxime vulgaria haud raro detegi maxime ardua: fit ita, quod methodorum inventores, ne ardua nullo fere negotio detexisse videantur, eas applicent ad exempla; quæ sublime quid spirant & intellectu difficilia deprehenduntur.

§. 192. Extractio radicis ex serie infinita (§. 366 *Analys.*), etiam artificium quoddam singulare habet; quod consistit in diversa applicatione assumptionis quantitatum indeterminatarum lege comparationis determinandarum; quo supra jam usi sumus: in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), & in extrahenda radice ex æquatione cubica (§. 358 *Analys.*). Series enim assumptionis, qua exprimitur valor ipsius x , qui quaritur, coefficientes habet

indeterminatos, lege comparationis determinandos. Ut vero determinari possint, perinde ac superius lege substitutionis; æquatio proposita, cujus coëfficientes determinati sunt, transmutatur in aliam, quam coëfficientes indeterminati cum determinatis simul ingrediuntur; quemadmodum fecimus in extractione radicis ex æquatione cubica (§. 358 *Analys.*); etsi alio principio hic nitatur coëfficientium indeterminatorum determinatio, cujus ratio ex ipso contextu liquet, & quod affine est ei, quo eodem fine usi sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), quamvis ob aliam rationem. Patet hinc, quam utile sit ut artificia analytica, quibus in resolutione problematum utimur, inter se conferantur, quo pateat eorum, quæ eadem sunt, diversa applicatio. Quodsi enim in rationem applicationis inquisiveris; id non modo efficiet, ut eadem in casu eodem recurrente facilius memoriam subeat; verum etiam hoc ipso consequeris, ut eandem, prout casus exigit, ipsemet variare possis. Istiusmodi autem disquisitiones apprimè necessariae sunt ei, qui in Arte inveniendi generali proficere vult studio Algebrae, & intellectui conciliare gestit eam habitudinem, quæ ad artificia heuristicæ diversimode applicanda opus habet. Problema, de quo jam loquimur, maximæ utilitatis est: continet enim methodum,

quæ *Regressus serierum* nomine venit, & cujus maxima est utilitas in Geometria sublimiori; quemadmodum suo loco ostendemus. Equidem problema hoc tanta perspicuitate exposuimus, ut tyro in anterioribus cum laude versatus idem absque ulla difficultate intelligat, nisi calculi molestias fugiat; quodsi tamen quis ab iisdem abhorreat, idem tamdiu seponat, donec regressu serierum ad solvenda problemata opus habuerimus.

§. 193. Extractiones radicum ex æquationibus, de quibus diximus in capite præsentè, usum tantummodo habent in solutionibus problematum arithmetice. Quamobrem docendum quoque erat, quomodo æquationes altiores geometricè construantur. Per rectas & circulum eadem construi nequeunt: sed confugiendum hic est ad lineas curvas. Quamobrem cum de lineis curvis, præter circulum, nihil doceatur in Geometria elementari; nostrum erat ante docere, quomodo Algebra ad Geometriam sublimiorem, quæ de curvis agit, applicetur; ut ejus ope curvarum descriptiones, & proprietates, ac symptomata, hoc est, prædicata absoluta & conditionata, inveniantur. Applicationem hanc debemus CARTESIO, qui eam docuit in Geometria, sed non ad captum tyronum. Facile tamen reperiri poterat, si quis ad vulgaria animum attendere voluisset. Tota enim in hoc

hoc confistit, ut curva definiatur per æquationem, & ex ea, adhibitis artificijs in Algebra usitatis, eliciantur curvarum constructiones, proprietates, & symptomata. Ecce igitur tibi facillimam ad hanc methodum, quæ inexhaustæ utilitatis est in Geometria sublimiori, viam. Constat ex elementis Geometriæ (§. 327 *Geom.*), semiordinatam PM esse mediam proportionalem, inter abscissam AP & complementum diametri PB; si utamur terminis in doctrina de Curvis receptis, & initio capitis sexti explicatis. Quare si sit diameter AB = a, abscissa AP = x, semiordinata PM = y, erit complementum diametri PB = a - x; consequenter

$$AP : PM = PM : PB$$

$$x : y = y : a - x$$

adeoque $y^2 = ax - x^2$
Habemus adeo æquationem, quæ circulum definit. Quodsi jam ponamus, nos nescire, qualis sit hæc curva; ea, quæ de eadem nobis innotescere possunt, hoc modo eruimus.

$$\begin{aligned} \text{Sit } y &= 0 \\ \text{erit } ax - x^2 &= 0 \\ \frac{ax}{a} &= \frac{x^2}{x} \\ a &= x \end{aligned}$$

Patet itaque 1°. curvam secare rectam AB in B.

$$\begin{aligned} \text{Sit } x &= 0 \\ \text{erit } y^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Unde liquet 2°. curvam secare rectam AB in A.

$$\begin{aligned} \text{Sit } x &= \frac{1}{2}a \\ \text{erit } y^2 &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ &= \frac{1}{4}a^2 \\ y &= \frac{1}{2}a \end{aligned}$$

Videmus itaque, 3°. si ex medio rectæ AB erigatur perpendicularis CD, æqualis AC, curvam transire per punctum D.

Quoniam eadem curva transit per A & B (*vi num. 1 & 2*); evidens est, 4°. eam concavitatem rectæ AB obvertere. Et quoniam patet, singula sese eodem modo habere debere, si semiordinatæ ex altera parte sumantur; porro liquet, 5°. curvam esse in se redeuntem. Quærat jam magnitudo rectæ MC, ex puncto C, in medio rectæ AB assumpto, ad extremitatem semiordinatæ PM, seu punctum in curva M ductæ.

$$\begin{aligned} \text{Sit } AC &= \frac{1}{2}a & MC &= z \\ AP &= x \\ \text{erit } PC &= \frac{1}{2}a - x \\ \text{adeoque } PC^2 &= \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 \\ PM^2 &= ax - x^2 \text{ per naturam curvæ.} \end{aligned}$$

$$\text{Ergo ob } MC^2 = MP^2 + PC^2, z^2 = \frac{1}{4}a^2$$

6°. Recta igitur ex puncto C in quodlibet peripheriæ punctum M ducta æqualis est rectæ AC, seu dimidiæ rectæ AB; consequenter rectæ omnes ex eodem puncto C in peripheriam

riam ductæ æquales sunt (§. 87 *Arithm.*): quæ est proprietas circuli, per quam definiri solet in Geometria elementari.

Hinc vero porro. 8º liquet, Curvam hanc describi, si recta CA circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ est definitio circuli, realis.

$$\text{Ponamus } y = \frac{1}{2}a.$$

$$\text{erit } y^2 = \frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{array} \right\} = 0.$$

$$x = \frac{1}{2}a.$$

Quoniam superius (n. 3) reperimus $y = \frac{1}{2}a$, si fiat $x = \frac{1}{2}a$; ideo patet, 9º. In nullo alio puncto, quam in C semiordinatam rectæ dimidiæ AB æqualem esse posse.

Si sit $PM = y$, $PC = v$, $CM = \frac{1}{2}a$ (n. 6); erit per theorema Pythagoricum:

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$$

$$\text{adeoque } \frac{1}{4}a^2 > y^2.$$

$$\frac{1}{4}a > y.$$

$$y < \frac{1}{2}a.$$

Quamobrem 10º. ubivis extra centrum, semiordinata minor dimidia rectæ AB: consequenter cum minor sit semiordinata in centro erecta CD (n. 3), semiordinatæ autem sint chordarum dimidiæ; 11º. diameter chordarum maxima est.

Sit distantia semiordinatæ a centro, $PC = v$, $PM = y$, erit

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2 \text{ (n. 6).}$$

Et si alia $PC = t$, PM alia $= z$,

$$\text{erit } \frac{1}{4}a^2 = z^2 + t^2$$

$$\text{Quare } z^2 + t^2 = y^2 + v^2$$

$$\text{sit } t > v.$$

$$\text{erit } z^2 < y^2$$

$$z < y.$$

12º. Semiordinata itaque z tanto minor alia quacunque semiordinata y , quanto magis a centro distat; consequenter chordæ tanto minores, quanto a centro remotiores.

Sit $AB = a$, $AP = x$, erit $PB = a - x$, adeoque

$$AP^2 = x^2.$$

$$PM^2 = ax - x^2, \text{ ex natura Curvæ}$$

$$AM^2 = ax.$$

$$\text{Similiter } PB^2 = a^2 - 2ax + x^2.$$

$$PM^2 = ax - x^2$$

$$MB^2 = a^2 - x^2.$$

$$AM^2 = ax.$$

$$MB^2 + AM^2 = a^2 = AB^2$$

Quoniam $AB^2 = AM^2 + PB^2$, triangulum AMB rectangulum est, consequenter 13º. angulus AMB in semicirculo rectus.

Et quia $AM^2 = ax$, $BM^2 = a^2 - ax$;

$$\text{erit } a : AM = AM : x$$

$$a : BM = BM : a - x$$

hoc est $AB : AM = AM : AP$

$$AB : BM = BM : PB$$

Est igitur 14°. Chordā media proportionalis inter diametrum AB & segmentum adjacens.

Tab. II.
Fig. 19. Quodsi quæratur recta TM ex puncto quocunque T intra circulum assumpto in peripheriam ducta; ducatur, per centrum C & punctum T, recta AB, quæ erit diameter circuli, & ex puncto peripheriæ M demittatur perpendicularis MP, quæ erit semiordinata. Sit jam

$$\begin{aligned} AC &= CB = a & AP &= x \\ BT &= b & \text{erit } PC &= a - x \\ \text{erit } CT &= a - b & PT &= 2a - b - x \end{aligned}$$

Porro

$$\begin{aligned} PM^2 &= 2ax - x^2, \text{ ex natura circuli} \\ PT^2 &= (2a - b)^2 - 4ax + 2bx + x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TM^2 &= (2a - b)^2 - 2ax + 2bx \\ &= (2a - b)^2 - 2(a - b)x \\ &= TA^2 - 2CT \cdot AP \end{aligned}$$

Est adeo 15°. Quadratum rectæ TM æquale excessui quadrati rectæ TA supra rectangulum ex duplo distantie puncti T a centro C in abscissam AP puncto M respondentem. Hoc theorema in Elementis non extat: ex eo tamen consequuntur, quæ in iis demonstrantur. Nimirum quia 2CT constans est; decrescente abscissa AP decrescit quoque rectangulum ex AP in 2CT; & cum quadratum rectæ TA non minus constans sit, quo minus fuerit rectangulum ex 2CT in AP, eo major evadet excessus quadrati rectæ TA supra hoc rectangulum; consequenter eo majus erit quadratum rectæ TM, quippe

eidem æquale, adeoque etiam ipsa recta TM. Et quando TM incidit in diametrum, seu punctum M in A, quadratum ipsius TM æquale evadit quadrato ipsius TA; consequenter TA major est qualibet TM, adeoque maxima rectarum, quæ ex puncto T in peripheriam duci possunt. Incidimus adeo 16°. in theorema 63 (§. 303 *Geom.*)

Ante invenimus (n. 14) $AM^2 = AB \cdot AP$, hoc est, quod quadratum chordæ sit æquale rectangulo ex diametro in abscissam. Quamobrem, cum crescente abscissa AP crescat arcus AM, crescat etiam rectangulum ex diametro AB in abscissam AP; ideo patet 17°. quadratum chordæ majoris esse majus quadrato chordæ minoris; consequenter chordam majorem subtendere arcum majorem, quam minor, seu chordam arcus majoris majorem esse, chordam minoris minorem.

Alia ex æquatione ad circulum deducuntur, in ipsa Analyfi præsertim infinitorum, qua in Geometria sublimiori carere minime possumus. Ex hæcenus dictis abunde patet, quomodo applicatione Algebræ ad ea, quæ ex EUCLIDE notissima sunt, methodus definiendi curvas per æquationes, & ex iis deducendi earum geneses ac constructiones, proprietates, aliaque symptomata, innotescere potuerit. De sectionibus conicis APOLLONIUS similiter demonstravit theoremata, quorum ope per æquationes

nes definiuntur, quemadmodum in hoc capite fecimus. Quamobrem apparuit, eandem methodum ad conicas quoque sectiones applicari posse. Atque sic enata est methodus tractandi curvas per æquationes, seu Algebram ad Geometriam sublimiorem applicandi. Hæc non eo fine a nobis adducuntur, ut inventorum laudi detrahamus; sed ut discamus, vulgarium meditationem ducere ad maxime ardua; & ea neglecta inventores sibimetipsis obesse, si quando per ambages quærunt, quæ obvia sunt recta via incedentibus; utque tyrones ideam hujus methodi animo concipiant, quæ in ejus applicatione ad altiora faciem præfert. Qui recta via in inveniendis progreditur, ex iis, quæ cognita atque trita sunt, colligit quæ nondum patent, parum sollicitus, quamnam utilitatem sint habitura, quæ deteguntur. Sed de his dicemus, ubi Artem invenienti ex instituto exposaturi sumus.

§. 194. Diximus superius (§. 169), nondum invento calculo universalis, Algebram numerosam jam applicari potuisse ad Geometriam, ut per eam detegerentur theorematum & problematum constructiones. Immo ipsa etiam applicatio ad Geometriam sublimiorem fieri poterat non sine successu. Dicis igitur fidem facere nostrum est uno alteroque exemplo. Ponamus ex. gr. quæri relationem rectarum AT & TE, ex eodem puncto T extra cir-

culum dato ductarum; quarum altera Tab. II. ra AT circulum tangit in A, altera ^{Fig. 20.} TE eundem secat.

Sit diameter BE = 1, TB = x
erit AC = $\frac{1}{2}$; TC = $\frac{1}{2} + x$
sit porro AT = 2, TE = 1 + x

Quoniam AT perpendicularis ad AC (§. 308 Geom.), erit

TC² = AC² + TA² (§. 417 Geom.)
adeoque $(\frac{1}{2})^2 + x \cdot \frac{1}{2} + x^2 = (\frac{1}{2})^2 + 2^2$

$$x \cdot \frac{1}{2} + x^2 = 2^2$$

sed $x \cdot \frac{1}{2} = 1$, per cond. probl.

ergo $1x + x^2 = 2^2$

hoc est $(1+x)x = 2^2$

sive TE · TB = AT²

Quamobrem TE : AT = AT : TB

Habemus itaque duo theorematum :
1°. Quadratum tangentis, in hypothesis problematis, est æquale rectangulo ex secante in ejus portionem extra circulum. 2°. In eadem hypothesis tangens est media proportionalis inter secantem & ejus portionem extra circulum.

In Algebra speciosa diametrum appellamus *a*, tangentem *b*. Cum hæc signa sint primitiva, perinde est five diametrum *a*, sive 1, & num tangentem *b*, an vero 2 dicas, modo in calculo universalitatem conserves, ut in locum 2 quemcunque numerum alium surrogare possis, sive rationalem, sive irrationalem, sive integrum, sive fractum, qui in dato casu exprimit rationem ad diametrum tanquam unitatem.

Ponamus

Tab. I.
Fig. 3.
Analys.

Ponamus porro problema 13 (§. 255 *Analys.*) solvendum esse per Algebram numerosam, sed universaliter, quemadmodum solvitur per speciosam. Solutio hæc erit:

$$\text{fit } AB + BC + CA = 6 \quad AC = x \\ \text{Area } \Delta = 2^2, \text{ erit } BC + BA = 6 - x \\ AC^2 = x^2$$

Cum sit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2 AB \cdot BC$ (§. 216 *Arithm.*); erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2 AB \cdot BC$ (§. 91 *Arithm.*). Est vero $(AB + BC)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6x + x^2$ & $2 AB \cdot BC = 4x$ (§. 392 *Geom.*). Quamobrem

$$x^2 = 6^2 - 2 \cdot 6x + x^2 - 4x$$

$$0 = 6^2 - 2 \cdot 6x - 4x$$

$$2 \cdot 6x = 6^2 - 4x$$

$$x = \frac{6}{2} - \frac{2}{6}$$

Patet itaque hypothenusam trianguli rectanguli x esse æqualem excessui semiperimetri $\frac{6}{2}$ supra tertiam pro-

portionalem ad semiperimetrum $\frac{6}{2}$ & latus quadrati 2 areæ trianguli æqualis. Unde liquet, problema geometrice construi, si ad semiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis quæraturn tertiam proportionalis, & hæc ex semiperimetro auferatur.

Æquatio pro circulo erat $y^2 = ax - x^2$, ubi a diametrum denotat, sive igitur diametrum dicas a , sive 1 aut 2, modo observes ea, quæ ad

universalitatem calculi conservandam præcepimus; ex æquatione $y^2 = 1x - x^2$, vel $y^2 = 2x - x^2$ eadem erues, quæ paulo ante ex altera eruimus (§. 194).

Immo nondum invento calculo literali poterant quoque quantitates datæ exprimi literis, quibus in Geometria lineas indigitamus, veluti in exemplo primo.

$$\begin{array}{ll} \text{Diameter} = BE & TB = x \\ \text{radius} = AC & TC = AC + x \\ \text{tangens} = AT & TE = BE + x \end{array}$$

Tab. II.
Fig. 20.

$$\text{Unde resultat æquatio} \\ AC^2 + 2AC \cdot x + x^2 = AC^2 + AT^2$$

$$2AC \cdot x + x^2 = AT^2$$

$$(BE + x) x = AT^2$$

$$\begin{array}{l} \text{h. e. } TE \cdot TB = AT^2 \\ \text{vel in problemate altero} \\ \text{Periph. } \Delta = AB + BC + CA \quad AC = x \\ \text{Area } \Delta = DE^2 \quad AC^2 = x^2 \\ BC + CA = AB + BC + CA - x \end{array}$$

Tab. I.
Fig. 3.
Analys.

$$\begin{array}{l} \text{Unde reperitur ut ante æquatio:} \\ x^2 = (AB + BC + CA)^2 - \\ 2(AB + BC + CA)x + x^2 - 4DE^2 \end{array}$$

$$0 = (AB + BC + CA)^2 - 2(AB + BC + CA)x - 4DE^2$$

$$2(AB + BC + CA)x = (AB + BC + CA)^2 - 4DE^2$$

$$x = \frac{1}{2} (AB + BC + CA) - 2DE^2 : (AB + BC + CA)$$

I i 3

Simi-

Tab. II.
Fig. 17. Similiter si diameter circuli dicatur AB, semiordinata PM, abscissa AP; æquatio ad circulum est $PM^2 = AB \cdot AP - AP^2$: unde eadem deducuntur, quæ ex æquatione $y^2 = ax - x^2$ deduximus.

Talia monemus, ut appareat Veteribus plura in potestate fuisse, quam existimavere, propterea quod ad studium mathematicum non eam attentionem attulerunt, quam in superioribus commendavimus, ut methodos intimius perspiciamus, ea discernentes, quæ sunt legum methodi, ab iis, quæ characteristica tribuenda, & ut characteristica ubivis commodum faciamus usum: neque enim iidem characteres æque satisfaciunt in omni casu, sed alii aliis non sine utilitate haud raro substituantur. Neque vero est, quod excipias, nos in calculo universali numerofo, & substitutis linearum appellationibus communibus, adhibere artificia ex characteristica, qua in Algebra speciosa utimur, petita; veluti dum potentias linearum designamus per exponentes, numeris vel literis majoribus quibus lineæ denotantur adscriptos instar apicum. Etenim hanc denotationem jam indicavit KEPLERUS in *Harmonica*, calculo literali adhuc ignorato, & per ea eadem patere poterat, quæ de natura numerorum coëffidorum, quos vocat, tradidit STIFELIUS in *Arithmetica integra*, multo ante, quam VIETA de Arithmetica literali cogitaret, & HARIOT-

TUS atque CARTESIUS eandem ulterius perficerent. Et quamvis recentior characteristica commodior sit; ipsa tamen methodus per eam non variatur, quæ etiam absque omni characteristica subsistit: sit ita, quod, deficiente characteristica commoda, subinde tantæ suboriantur molestiæ, quas devorare non est cuiusvis, & ea requiratur attentio, ut ab errore immunem te præstes, quam non quivis afferre valet. Hæc ignorare non potest, qui ad characteristicam, qua hodie in Arithmetica utimur, eam attentionem attulerit, quam in superioribus commendavimus; & quæ acumen istud, quo ea quæ sunt legum methodi, ab iis quæ characteristica debentur separantur, confert.

§. 195. Circulus per æquationem algebraicam definiri potest, quia punctorum omnium M ad diametrum AB constans quædam ratio est, quæ exprimitur per relationem semiordinatæ ad abscissam; demittendo scilicet ex puncto quolibet M perpendicularum PM in diametrum AB, ut abscindatur AP. Unde facile intelligitur idem succedere debere in aliis curvis ubi similis ratio obtinet. Quamobrem cum constet, APOLLONIUM de parabola, hyperbola, & ellipsi, seu sectionibus conicis, tale quid demonstrasse; statim prævidere licet methodum, qua in circulo usi sumus, in iisdem quoque adhiberi posse. Enimvero possunt puncta cur-

Tab. II
fig. 211

væ referri ad quamcunque aliam rectam positione datam: id quod cum usui sit in sequentibus, exemplo circuli hoc ipsum declarare lubet. Ducatur recta AL, quæ circum in C tangat; erit ea ad radium GC perpendicularis (§. 308 *Geom.*). Ducatur quoque DA, quæ circum tangit in D, adeoque ad radium DG perpendicularis (§. cit.); cum etiam CG sit perpendicularis ad GD (§. 143, 78 *Geom.*), erit AL diametro DE parallela (§. 258 *Geom.*), & AD ad eandem perpendicularis (§. 230 *Geom.*), adeoque semiordinata (§. 370 *Analys.*). Ducatur semiordinata alia quæcunque PM, continuanda donec diametro DE in Q occurrat; erit MQ ad DE perpendicularis. Sit AC=DG=a, AP=x, PM=y; erit QM=a-y; adeoque per naturam circuli, cum sit

$$QM^2 = DQ \cdot QE$$

$$\text{erit, } a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$$

Quæ æquatio circum definit respectu tangētis AL.

Fiat jam $x=0$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 0$$

$$a - y = 0$$

$$a = y$$

hoc est, in origine abscissæ A semiordinata AD est radio circuli æqualis.

Sit $x=a$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2a^2 - a^2$$

$$= a^2$$

$$y^2 - 2ay = 0$$

$$y - 2a = 0$$

$$y = 2a$$

hoc est, semiordinata CN diametro circuli æqualis, seu perpendicularis CN ad AC curvæ in N occurrit.

Sit $x=2a$, erit

$$a^2 - 2ay + y^2 = 4a^2 - 4a^2$$

$$= 0$$

$$a - y = 0$$

$$a = y$$

hoc est semiordinata LE radio circuli æqualis.

Quodsi quæratür recta GM, cum sit per theorema Pythagoricum

$$GM^2 = MQ^2 + QG^2$$

$$\text{erit } GM^2 = 2a^2 - 2ay + y^2 - 2ax - x^2$$

est vero ex natura curvæ

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$$

$$\text{Ergo } GM^2 = a^2$$

$$GM = a$$

Quare si ponamus, nos ignorare, ad quam curvam sit æquatio; patet hinc eam esse ad circum.

Nimirum quando ex æquatione data eruuntur, quæ de curva cognosci possunt, tum semper supponitur, non constare, ad quamnam curvam sit æquatio. Quodsi semicirculus DNE ad rectam AL referretur, semiordinata PO foret y , adeoque $QO=y-a$. Quamobrem cum eadem prodiret, quæ ante æquatio; alterum ejus membrum $a^2 - 2ay + y^2$ duas habet radices $a-y$ & $y-a$: id quod indicio est, semiordinatam recta AC & minorem, & majorem esse posse; consequenter ex ipsa æquatione intelligitur

gitur, curvam a semiordinata secari in duobus punctis. Quoniam itaque in C eandem nonnisi in uno puncto N secat; id indicio est, quod in C eandem tangat. Similiter quia in A & L semiordinata nonnisi unum valorem habet; hinc conficitur, quod semiordinatæ AD & LE curvam similiter tangere debeant. Unde liquet curvam esse in se redeuntem, & ejus puncta referri ad lineam, quæ tota puncta curvam cadit, ab ea tamen non distat. Distantia enim a tota curva æstimatur ex perpendiculari minima, quæ hic nulla est.

Suadendum omnino est, ut tyrones notent, quomodo curvæ agnoscantur, & a se invicem distinguantur; nimirum relatione punctorum ad rectam quandam positione datam, & circulum referant ad varias rectæ positiones, ut totius methodi vim ac potestatem rectius ac intimius perspiciant. Hoc enim pacto non modo nihil difficultatis habebit, quod in capite præsentis occurrit; verum etiam doctrina de Locis geometricis, quæ omnem rectæ illius positionem possibilem supponit, non perturbabit tyronem. Immo in genere notandum est, si ad maxime obvia & notissima applicentur methodi novæ, in quas incidimus; haud raro talia offerri, circa quæ hærent etiam exercitiores, ubi in applicatione methodi ad nondum cognita occurrunt. Exemplum suppeditat æquatio, quam

modo dedimus pro circulo $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$. Etenim si sumis, eam explicare relationem quadrantis DMC ad rectam AC, & ponis $AP = AC$, seu $x = a$, per ea, quæ vidimus in æquatione præcedente (§. 193), prodire debere videtur $y = 0$. Unde miraris, ubi prodit $y = 2a$. Verum enimvero ubi consideras, æquationem $a^2 - 2ay + y^2$ habere duas radices, alteram nimirum $a - y$, alteram $y - a$, & priori respondere QM, posteriori autem QQ; hinc discis, per æquationem $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$ tam semicirculi superioris DNE, quam inferioris DCE ad rectam AL relationem exprimi; consequenter in puncto C, ubi valor unus ipsius PM sive $y = 0$, etiam prodire debere valorem alterum ipsius $y = 2a$, recta nimirum PO in CN degenerante. Quodsi tale quid occurreret in tractatione æquationis, cui, quænam curva respondeat, adhuc ignoratur; unde hoc fiat, non adeo facile animadverteres, & multum omnino olei ac operæ perderes, antequam ex perturbatione eluctari valeres. Similiter ubi ponis $x = 0$ & $x = 2a$, prodit $a^2 - 2ay + y^2 = 0$, adeoque $y - a = 0$ & $a - y = 0$, quæ utraque æquatio dat eundem valorem nempe $y = a$. Unde vides, in contactu D & E, duas radices æquales habere æquationem; quemadmodum deinceps supponitur in methodo tangentium, & sine quo principio CARTESIUS ad methodum suam tangentium non pervenisset.

Non

Non addimus plura, cum hætenus dicta abunde sufficiant ad persuadendum utilitatem meditationis eorum, quæ nobis notissima sunt, ut eorundem ope detegantur alia, quorum alias cogitatio animum nunquam subiisset.

§. 196. Quodsi hanc methodum, quam adeo fecundam experiris in circulo, etiam ad curvas alias, quas tractarunt Veteres, applicare volueris; non omnes promiscue per æquationes definiri posse animadvertes, ubi eodem modo puncta eorum refert ad rectam quandam positione datam. Non succedet in Spiralibus ARCHIMEDIS, nec in Quadratrice DINOSTRATIS, quemadmodum sub finem capituli videbimus. Quoniam itaque ex iis, quæ de circulo diximus, & per sectiones conicas confirmantur, didiceris, quod æquatio curvam definiens supponat constantem relationem puncti cujuscunque ad eandem rectam positione datam; hinc utique patet, non dari posse æquationem ad curvam, cujus puncta ad rectam positione datam constantem relationem minime habent. Atque adeo non miraberis, nec hærebit aqua, ubi curva offertur, quæ per istiusmodi æquationem explicari nequit. Et patet ratio, cur CARTESIUS curvas distinxerit in algebraicas & non algebraicas, quarum illas vocat geometricas, has vero mechanicas; propterea quod existimavit, illas solas in Geometriam recipi posse,

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

has vero ex eadem excludi debere; quod ignoravit æquationes differentiales, de quibus dicemus in *Analysi infinitorum*, & quarum ope non minus algebraice tractantur curvæ, quæ a CARTESIO mechanicæ appellantur, quam quas geometricas appellat. Et sic patet ratio divisionis Curvarum in algebraicas & transcendentes, quam tradimus (§. 377, 380 *Analyf.*)

§. 197. Notandum vero est artificium, quo æquatio curvæ particularis reducit ad generalem, quæ infinitas curvarum species sub se comprehendit: id quod fit exponentium indeterminatorum surrogatione in locum determinatorum; quo artificio jam usi sumus in anterioribus, veluti in theoremate generali de binomio ad dignitatem quamcunque evchendo (§. 95 *Analyf.*). Probe quoque notandum est, quod in istiusmodi æquationibus observanda sit lex homogeneorum, quæ præcipit, ut termini singuli æquationum habeant dimensiones numero æquales, hoc est, ut unus valor prodeat, ductis tot rectis in se invicem, quot in se invicem sunt ducendæ, ut prodeat quilibet alter. Etsi enim in Geometria non detur magnitudo, quæ ultra solidum, quod trium dimensionum est & tribus rectis in se invicem ductis resultat, assurgit; in Algebra tamen fictione non inutiles admittuntur hypersolida, quæ ductu quotlibet rectarum in se invicem in infinitum resultant. Nititur hæc fictio principio,

pio, quod inter duas lineas infinitæ cadere possint lineæ mediæ continue proportionales, quemadmodum ex genesi potentiarum in infinitum progredientium liquet; veluti si ponas numeros in progressionē geometrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. in infinitum, hoc est 1, 2¹, 2², 2³, 2⁴, 2⁵ &c. in infinitum, ubi inter 1 & 2² una, inter 1 & 2³ duæ, inter 1 & 2⁴ tres, inter 1 & 2⁵ quatuor cadunt numeri mediū continue proportionales, & sic porro in infinitum. Etsi enim hic numeri omnes, quorum ductu in se invicem resultant termini posteriores, sint inter se æquales; constat tamen, vel ex Geometria elementari, (in qua v. gr. rectangulum reducitur ad quadratum eidem æquale, & parallelepipedum ad cubum sibi æqualem,) ea, quæ ductu linearum inæqualium in se oriuntur, reduci posse ad talia, quæ oriuntur ductu totidem æqualium in se invicem. Sufficiant hæc in gratiam tyronum dicta, ut ipsis aliqua lux affundatur in considerandis hyper-solidis, quæ Algebra admittit. Inprimis autem attentionem meretur æquatio, quæ eminenter continet omnes æquationes ad algebraicas curvas. Etenim in eo latent tria artificia, nimirum 1^o. quod æquationis alterum membrum sit nihilum, de quo artificio jam supra diximus (§. 189); 2^o. quod terminus unus repræsentet in casu particulari plures, ut adeo coefficients explicandi sint non uno, sed diversis modis, 3^o. quod

in æquatione nulla habeatur ratio signorum, quæ in particularibus variant æquationibus, sed termini omnes afficiantur signo +, ne opus sit plures formare æquationes generales, ubi omnes particulares sub una comprehendi possunt, quod sane artificium maximi faciendum. Enimvero ut applicatio formulæ generalis manifesta evadat, lubet eam applicare ad circulum. Æquatio generalis est:

$$ay^m + bx^n + cy^sx^s + df = 0$$

Æquatio ad circulum:

$$y^2 + ax - x^2 = 0$$

Vides hic abesse xy , nec ullum adest membrum constans ex mere cognitis, adeoque $cy^sx^s + df = 0$, consequenter formula generalis contracta hæc relinquitur:

$$ay^m + bx^n = 0$$

Est igitur

$$\frac{ay^m}{bx^n} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\text{adeoque } \frac{a}{m} = \frac{1}{2}$$

Porro

$$\frac{bx^n}{b} = \frac{+ax}{b} \quad \frac{bx^n}{b} = \frac{-x^2}{b}$$

$$\text{adeoque } \frac{b=a, n=1}{b=-1, n=2}$$

Docet adeo hoc ipsum exemplum, quomodo terminus unus in generali comparetur cum pluribus in particulari, ut coefficients indeterminati in generali determinantur ex particulari. Patet etiam, quomodo signum + in formula generali non obstat, quo minus coefficientes negati-

us determinetur ex particulari, dum hic reperitur $b = -1$. Habet nimirum b in casu præfenti valorem duplicem, alterum positivum $+a$, alterum negativum -1 .

§. 198. Qui quæ de circulo diximus probe perpendit, ei non hærebit aqua circa ea, quæ de sectionibus conicis aliisque curvis in præfenti capite, & de locis geometricis in sequente demonstrantur. Incepimus a parabola, quæ est sectionum conicarum simplicissima. Aequatio ejus $y^2 = ax$. Quodsi fiat

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ \hline \text{erit } y^2 = 0 \\ \hline y = 0 \end{array}$$

Tab. II. Atque adeo patet 1º. in origine
Fig. 27. abscissæ A curvam secare rectam datam, ad quam refertur, AX.

Sit alia abscissa $AP = v$, eidem respondens semiordinata $PM = z$, erit $z^2 = av$.

$$\begin{array}{l} \text{Ponamus } v > x \\ \hline \text{erit } av > ax \\ \text{adeoque } z^2 > y^2 \\ \hline z > y \end{array}$$

2º. Crescentibus adeo abscissis, semiordinatæ quoque crescunt; consequenter curva in infinitum continuari potest, & ab axe AX continuo magis magisque recedit.

$$\text{Si fiat } x = a$$

$$\text{erit } y^2 = a^2$$

$$y = a$$

3º. Quando igitur abscissa parametro æqualis, etiam semiordinata eidem æqualis est, consequenter si abscissa parametro æqualis, semiordinata & abscissa æquales sunt.

$$\text{Sit } y = \frac{1}{2}a$$

$$\text{erit } ax = \frac{1}{4}a^2$$

$$x = \frac{1}{4}a$$

4º. Si ergo semiordinata semiparametro æqualis, quarta diametri parte a vertice A seu origine sua distat.

Quodsi æquationem ad parabolam cum æquatione pro omnibus curvis algebraicis conferre volueris; cum hæc sit:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^i + df = 0$$

pro parabola vero

$$y^2 - ax = 0$$

& in hac deficiat xy & terminus constans ex mere cognitis respondens ipsi df , æquatio generalis contrahitur in

$$ay^m + bx^n = 0$$

$$\text{estque } ay^m = y^2 \quad bx^n = -ax$$

adeoque; $a=1, m=2 \quad b=-a, n=1$

Hæc addere libuit, ut appareat, eodem modo tractari posse æquationem ad parabolam, qua tractavimus æquationem ad circulum. Cetera enim patent per resolutionem problematum in hoc capite propositorum.

§. 199. De methodo tangentium, qua utimur problematis 181, 189, 208, (§. 410, 440, 491 *Analys.*), quædam adhuc annotanda sunt. Tangentes curvarum facillime determinantur per calculum differentialem, quemadmodum in *Analysi infinitorum* docemus. Quoniam vero sectiones conicas referre minime licet ad diametrum, nisi præsupposita tangente, cui semiordinatæ sunt parallelæ & quæ ex puncto contactus ducitur; ideo necessarium fuit tangentem determinari per Algebram communem. Adhibuimus itaque methodum CARTESII, quæ nititur hoc principio, quod in contactu duæ radices evadant æquales: id quod superius in circulo reperimus (§. 195). Ponamus enim rectam TR secare curvam in M & N; evidens est, quod, si abscissæ AP & AQ dicantur x , eisdem respondere duas semiordinatas PM & QN, per quas y in æquatione explicari potest. Ducatur alia tr , quæ eandem curvam secat in punctis m & n : habebimus denuo duas semiordinatas pm & qn , per quas explicatur y in æquatione data. Patet autem abscissam unam PM continuo crescere, & alteram QN continuo decrescere, donec punctis M & N in contactu coincidentibus, in æquatione data una alteri fiat æqualis. Ad hæc qui animum advertit, nullo negotio deprehendet, quomodo ad methodum istam pervenire licuerit. Patèbit autem suo loco, subtangenter per hanc

Tab. II.
Fig. 23.

methodum prodire eandem in sectionibus cònicis, quæ invenitur per calculum differentialem. Etsi autem hæc methodus videatur universalis, ad tantas tamen in curvis altioribus calculi perplexitates deducit, quæ vix videntur superabiles. Unde in ea perficienda plurimum defudarunt Geometræ, donec tandem ope calculi differentialis obtentum fuerit quod quærebatur.

§. 200. In Ellipsi $ay^2 = abx - bx^2$. (§. 420 *Analys.*). Quodsi hic ponas

$$x = 0$$

$$\text{erit } ay^2 = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Quamobrem patet, 1º. in origine abscissarum curvam secare rectam positione datam, ad quam refertur.

$$\text{Si fiat } x = a$$

$$\text{erit } ay^2 = a^2b - a^2b$$

$$= 0$$

adeoque denuo $y = 0$

Unde liquet, 2º. curvam quoque secare rectam, ad quam refertur, si abscissa sit datæ a æqualis, adeoque concavitatem obvertere eidem rectæ: ex quo porro sequitur, cum ex altera parte eodem modo sese habeant, quæ modo reperimus, curvam esse in se redeuntem.

Fiat

$$\begin{array}{l} \text{Fiat} \quad b = a \\ \hline \text{erit} \quad ay^2 = a^2x - ax^2 \\ \hline \quad y^2 = ax - x^2 \end{array}$$

3°. Æquatio adeo ad ellipsin degenerat in æquationem ad circulum, ut circulus pro specie quadam ellipsos haberi possit, nactus nomen ellipsos æquilatæ, nisi jam antea nomine circuli insignita fuisset hæc curva.

Quodsi a ponatur infinita, erit in æquatione ad ellipsin

$$\frac{bx^2}{a} = 0$$

$$\text{adeoque} \quad y^2 = bx$$

Cum adeo æquatio ad ellipsin degeneret in æquationem ad parabolam, ideo liquet 4°. In locum ellipsos, cujus axis infinitus est, surrogari posse parabolam eandem cum ellipsi parametrum habentem.

Quodsi quis hæreat in infinitate axis elliptici, & in eo, quod hinc colligatur $\frac{bx^2}{a} = 0$; is evolvat, quæ in Ontologia de infinito mathematico demonstravimus.

§. 201. Eodem modo in hyperbola quoque generalia quædam ex æquatione ejus colliguntur. Æquatio ad hyperbolam est: $ay^2 = abx + bx^2$, seu

$$y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$\begin{array}{l} \text{Sit} \quad x = 0 \\ \hline \text{erit} \quad y^2 = 0 \\ \hline \quad y = 0 \end{array}$$

Patet ergo 1°. in origine abscissarum curvam secare rectam positione datam, ad quam ea refertur.

$$\begin{array}{l} \text{Sit} \quad x = a \\ \hline \text{erit} \quad y^2 = ab + a^2b : a \\ \quad \quad = ab + ab = 2ab \\ \hline \quad y = \sqrt{2ab} \end{array}$$

Unde liquet 2°. si abscissa fuerit axis transversus æqualis, semiordinatam fore mediam proportionalem inter axem transversum & duplam parametrum.

$$\begin{array}{l} \text{Sit} \quad x = b \\ \hline \text{erit} \quad y^2 = b^2 + \frac{b^3}{a} \\ \hline \quad y = \sqrt{b^2 + \frac{b^3}{a}} \end{array}$$

Patet adeo 3°. si abscissa fuerit parametrum æqualis, semiordinatam esse mediam proportionalem inter parametrum & compositam ex parametrum & tertia proportionali ad axem transversum & parametrum.

Sit alia abscissa v , alia semiordinata eidem respondens z ; erit per naturam curvæ

$$z^2 = bv + \frac{bv^2}{a}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Quare si } v > x \\
 \text{erit } bv > bx \\
 \quad \frac{bv^2}{a} > \frac{bx^2}{a} \\
 \hline
 bv + \frac{bv^2}{a} > bx + \frac{bx^2}{a} \\
 \hline
 y^2 > z^2 \\
 y > z
 \end{array}$$

Patet itaque 4^o. crescente abscissa crescere semiordinatam; adeoque curvam continuo magis magisque ab axe recedere; consequenter in infinitum continuari:

Quodsi æquationem pro hyperbola cum generali pro omnibus algebraicis conferre volueris; cum sit

$$ay^m + bx^n + cx^r y^s + df = 0$$

$$ay^2 - abx - bx^2 = 0$$

$$\text{erit } cx^r y^s + df = 0$$

$$\frac{ay^m}{a} = \frac{ay^2}{a}$$

$$a = a, m = 2$$

$$\frac{bx^n}{bx^n} = \frac{-abx}{-abx} \quad \frac{bx^n}{bx^n} = \frac{-bx^2}{-bx^2}$$

$$\frac{b}{b} = \frac{-ab}{-ab}, n = 1 \quad \frac{b}{b} = \frac{-b}{-b}, n = 2$$

Reliqua in ipsa Analyfi reperiuntur.

§. 202. Enimvero applicemus eandem methodum ad æquationem pro hyperbola intra asymptotos. Quoniam $xy = ab$,

$$\text{erit } x = \frac{ab}{y}$$

$$\text{Fiat, } x = 0$$

$$\text{erit } \frac{ab}{y} = 0$$

adeoque, $y = \text{infin.}$

Patet itaque 1^o. in origine abscissæ semiorinatam esse infinitam.

$$\text{Similiter cum sit } y = \frac{ab}{x}$$

$$\text{Si ponamus } x = \text{infin.}$$

$$\text{erit } \frac{ab}{x} = 0$$

$$\text{adeoque } y = 0$$

Unde liquet 2^o. rectam, in qua sumuntur abscissæ cum curva non concurrere nisi intervallo infinito, seu ab eadem non distare nisi intervallo infinite parvo; quatenus ab quantitas ordinaria per infinitam divisa dat particulam infinite parvam, quæ respective nihilum est.

Sit jam alia abscissæ v , semiordinata alia z ; erit per naturam curvæ

$$z = \frac{ab}{v}$$

$$\text{Ponamus } v > x$$

$$\text{erit } \frac{ab}{v} < \frac{ab}{x}$$

$$\text{adeoque } z < x$$

Videmus ergo 3^o. crescente abscissa decrescere semiordinatam; consequenter lineam curvam continuo magis magisque ad eam appropinquare rectam, in qua sumuntur semiordinatæ.

Quoniam itaque hæc cum curva non concurrat nisi infinito intervallo, aut potius ab eadem non distat nisi quantitate infinite parva, quando illa

illa in infinitum continuatur (*vi num.* 2); & in origine abscissarum semiordinata infinita (*vi num.* 1); curva continetur inter duas rectas, quæ in infinitum excurrunt, & ad quas curva continuo propius propiusque accedit, nunquam tamen easdem secat. Continetur adeo inter asymptotos. Ex hoc exemplo apparet, quomodo ex æquatione colligatur, quod curva, quæ per eam definitur, habeat asymptotos.

§. 203. Sed demus etiam exemplum in curva quadam superioris generis, cujus æquatio perplexa videtur. Sit itaque $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, quam invenimus pro Conchoide prima sive superiore (§. 538 *Anal.*); erit

$$y^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2 - x^4 - 2bx^3 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

Fiat $x = 0$

erit $x^2 - 2bx = 0$

$$\frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} = \frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0} = \text{infin.}$$

adeoq; $a^2 - b^2 = 0$, respectu $\frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0}$

Quare $y^2 = \text{infin.}$

$y = \text{infin.}$

Patet itaque 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam, consequenter curvæ asymptotum.

Fiat $x = a$

$$\text{erit } y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2} + \frac{2a^2b}{a} + a^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$= b^2 + 2ab + a^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$= 0$$

$y = 0$

Quando igitur 2°. abscissa fit ipsi a æqualis, semiordinata nulla est, adeoque curva rectam, in qua sumuntur abscissæ, secat.

Quoniam y ex infinita nulla evadit, dum x ex nihilo degenerat in a ; necesse est 3°. crescere abscissa decrescere semiordinatam.

$$\text{Quia } y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

$$= \left(\frac{ab}{x} + a \right)^2 - (x + b)^2$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{ab}{x} + a \right)^2 - (x + b)^2}$$

Est igitur y latus trianguli rectanguli, cujus hypothenusa componitur ex $\frac{ab}{x}$ & a , crus unum vero ex b & x . Unde liquet, 4°. Si semiordinata infinita dicatur regula, recta b distantia poli a regula, recta vero a distantia verticis a regula, quemadmodum termini in Conchoide recepti sunt (§. 535 *Anal.*); semiordinatam esse crus trianguli rectanguli, cujus hypothenusa componitur ex tertia proportionali ad abscissam (ejus origine in regula constituta), distantiam regulæ a vertice & ejusdem
a po-

a polo distantiam, atque distantia ejusdem regulæ a vertice, crus vero alterum ex abscissa & distantia regulæ a polo.

Tab II.
Fig. 24.

Hinc 5^o. ex data abscissa BP, distantia regulæ a polo BC, & a vertice BA, reperitur semiordinata PM, si ex P intervallo BA interfecetur regula in O, & recta PO producat, donec perpendiculari CH in polo erecta in H occurrat; tandemque intervallo CH interfecetur PM ad AB perpendicularis in M.

Quoniam enim $PB = x$, $PO = a$, $BC = b$; erit $OH = \frac{ab}{x}$, consequenter

$$PH = \frac{ab}{x} + a, \text{ trianguli rectanguli}$$

PCH hypotenusa. Quamobrem cum porro fit $CP = b + x$, erit $CH = \sqrt{\left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (b + x)^2} = y$,

consequenter quia $PM = CH$; erit PM semiordinata quæsitæ. Quodsi fiat $CL = PB$ & $CN = BA$, ac LN ad BC perpendicularis; recta CN producta statim ressecabit semiordinatam PM.

Manifestum itaque est, quomodo ex æquatione eruatur modus determinandi geometricæ punctum curvæ respondens cuilibet abscissæ, quamvis æquatio primo intuitu videatur admodum perplexa. Ceterum in applicatione methodi generalis adhibentur varia artificia, ex anterioribus æquidem nota, quæ tamen tyroni

non statim succurrunt. Quamobrem hinc elucescit, quod jam sæpe inculcavimus, artem exercendam esse per exempla, non per regulas particulares: etsi particulares annotandæ sint, ubi occurrunt; ut tanto facilius succurrant, quando denuo iisdem opus habemus. Non addimus de conchoide alia, quæ ex ejus æquatione deduci poterant, ne simus justo proximiores.

§. 204. Etsi ex dictis appareat; ductum curvæ hac methodo facillime indagari posse, ut de reliquis taceamus; non tamen existimandum est, idem in qualibet promiscue curvæ eadem facilitate succedere. Etenim si in æquationibus altioribus occurrunt termini, quos duæ indeterminatæ ingrediuntur, nec earum separatio in promptu est, quemadmodum vidimus in conchoide (§. 203); hærebit aqua. Sit ex. gr. $y^3 - axy = x^3$. Quodsi ponamus $x = a$, prodibit $y^3 - a^2y = a^3$, æquatio cubica affecta, ex qua radicis extractio difficilis & cujus constructio geometrica per inferiora demum patet. Similiter, quamvis per calculum algebraicum, quæ quærentur, haud raro mira facilitate eruantur, quemadmodum supra vidimus in circulo (§. 193), & plurima capitis præsentis problemata loquuntur, quæ de sectionibus conicis proposuimus; subinde tamen calculus prolixus & intricatus evadit, prouti videre licet in probl. 193, 195, 209, (§. 449, 454, 492 *Analys.*)

§. 205. Nos sectiones conicas consideravimus in plano & æquationes assumimus, quæ eas definiunt. Hinc vero nondum constat, curvas istas esse sectiones conicæ, nisi supponas theoriâ sectionum conicarum a Veteribus traditam, tanquam cognitam. Quamobrem consultum esse duximus analyticè demonstrari, sectione conicæ prodire has ipsas curvas, quas in plano consideravimus, & quarum descriptiones, proprietates alique symptomata ex æquationibus assumtis deduximus (§. 511 & seqq. *Anal.*). Poteramus æquationes, quas assumimus, eruere ex proprietatibus, quas ex sectione conicæ derivavimus: sed cur hoc minime fecerimus, jam monuimus (§. 514 *Anal.*). Ex. gr. pro parabola ex sectione conicæ deduximus

$$y^2 : q^2 = x : z$$

ubi y & q denotant semiordinatas, x & z autem ipsis respondentes abscissas.

Quoniam etiam est

$$y^2 : x = q^2 : z$$

$$\text{erit } y^2 : ax = q^2 : az;$$

Quare si ponamus, constantem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$; evidens est fore etiam $q^2 = az$, atque adeo in omni puncto curvæ esse quadratum semiordinatæ æquale rectangulo ex abscissa in eandem rectam constantem. Possit autem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$ patet, quia a tertia proportionalis est ad abscissam & semiordinatam. Idem etiam hoc

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

modo patere poterat. Si alternando esse debet $y^2 : x = q^2 : z$ (§. 173 *Arithm.*) cum ratio non sit nisi homogeneorum (§. 126 *Arithm.*) x & z denotare debent rectangula, quorum latus unum unius est x , latus unum alterius z , latus vero alterum unitas seu recta, quæ pro unitate sumitur (§. 375 *Geom.*), utique eadem utrobique (§. 178 *Arithm.*). Quodsi ergo hæc recta efficere debet rectangulum x , æquale quadrato y^2 , unitas ista degenerare debet in tertiam proportionalem ad x & y , quam fore eandem cum tertia proportionali ad q & z per modo demonstrata patet. Unde manifestum est, æquationem ad sectionem conicæ præsentem esse $y^2 = ax$, aut, si $a = 1$, $y^2 = x$. Notandum adeo hic est, si in æquationibus non appareat lex homogeneorum observata, termini pauciorum dimensionum coefficientem esse unitatem, seu rectam quandam determinatam, quæ pro unitate sumitur. Cum autem quælibet recta pro unitate assumi possit, unitatem esse eandem non sumendum, sed demonstrandum est. Ita sumere licet $y^2 = x$, ubi coefficientens ipsius x est 1; sumere quoque licet $q^2 = z$, ubi coefficientens ipsius z est 1. Enimvero non licet sumere coefficiententes ipsarum x & z esse æquales; sed hoc demonstrandum, quemadmodum ex modo dictis claret. Nihil hic supponitur, quod non sit ex notione numeri rationalis integri manifestum, quem in communi Arithmetica

metica practica consideramus; modo ad communia perpendenda omnem attentionem afferamus: qua neglecta, haud raro haerent tyrones, ubi sumuntur quæ per ea patent, & ad ardua magis applicantur; nisi fide Mathematicorum tanquam vera admittere velint, quorum rationem minime capiunt.

§. 206. Id quoque notandum est, in æquationibus, per quas definiuntur curvæ, originem abscissarum non semper assumendam esse in aliquo curvæ puncto, etiam si recta, ad quam curva refertur, eandem secat vel tangit; sed eandem esse posse quodvis punctum aliud in eadem recta assumtum. Ita ex. gr. in circulo, si peripheriæ puncta referuntur ad diametrum AB, origo abscissarum statui potest in centro C, ut sit $PC = x$, $PM = y$ & radius $AC = MC = a$. Quoniam enim $MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebimus $a^2 = y^2 + x^2$, adeoque $y^2 = a^2 - x^2$; quæ æquatio non minus circulum definit, quam altera, quam supra dedimus, & unde circuli genesin atque proprietates, cum aliis symptomatis, deduximus (§. 193). Atque ex hac æquatione eadem deducere licet, quæ ibidem ex altera deduximus, si tanquam data supponatur, ut adhuc ignoretur, ad quamnam curvam ea sit. Etenim si hic ponas

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 0 \\ \text{erit } y^2 & = & a^2 \\ y & = & a. \end{array}$$

Unde liquet 1^o. in origine abscissarum semiordinatam esse constanti a æqualem.

Si vero ponas $x = a$

$$\begin{array}{rcl} \text{erit } y^2 & = & a^2 - a^2 \\ & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}$$

Unde patet 2^o. si abscissa fiat semiordinatæ, quæ in origine abscissarum est (*vi num. 1*), æqualis, curvam secare rectam positione datam, ad quam refertur.

Quoniam $a^2 = y^2 + x^2$; ideo liquet, 3^o. Hypothenusam trianguli rectanguli, cujus crura sunt abscissa & semiordinata, ad quodvis punctum curvæ esse eandem; consequenter cum hæc hypothenusa constanter ex origine abscissarum ducatur, rectas omnes ex origine abscissarum ductas ad curvam esse, inter se æquales. Æquatio adeo nos deducit ad genesin circuli non minus, quam ad definitionem ejus nominalem; &, ubi definitio circuli ex elementis nota supponitur, hinc discimus, æquationem esse ad circulum. Immo potest origo abscissarum etiam extra centrum statui, veluti in L, ubi AL Tab. II. constans est, & abscissa LP. Sit Fig. 19 enim $AL = b$, $AB = a$, $LP = x$, $PM = y$, erit $AP = b + x$, $PB = a - b - x$, consequenter ob

$$PM^2 = AP \cdot PB$$

$$y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$$

Quodsi

Quodsi hic ponas

$$x = 0$$

erit

$$y^2 = ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(ab - b^2)}$$

Unde liquet, 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse mediam proportionalem inter rectam quandam constantem b & differentiam ejus a constante alia a .

Quodsi fiat

$$x = a$$

$$\begin{aligned} \text{erit } y^2 &= ab - b^2 + a^2 - 2ab - a^2 \\ &= -ab - b^2. \end{aligned}$$

Patet itaque 2°. abscissam nunquam fieri posse ipsi a æqualem, sed semper eadem minorem esse debere.

Sit $x = a - b$

$$\begin{aligned} \text{erit } y^2 &= ab - b^2 - 2ab + 2b^2 + a^2 \\ &\quad - ab - a^2 + 2ab - b^2 \end{aligned}$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Patet adeo, 3°. si abscissa fiat differentiae quantitatum constantium æqualis, curvam secare rectam positione datam.

Sit $x = \frac{1}{2}a - b$

$$\begin{aligned} \text{erit } y^2 &= ab - b^2 - ab + 2b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab \\ &\quad - \frac{1}{4}a^2 + ab - b^2 \end{aligned}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{2}a$$

Videmus itaque 4°. si abscissa fiat $\frac{1}{2}a - b$, semiordinatam esse $= \frac{1}{2}a$.

Quodsi ponamus

$$b = 0$$

$$\text{erit } y^2 = ax - x^2$$

Æquatio igitur degenerat in æquationem ordinariam pro circulo (§. 193).

Licet etiam originem abscissarum statuere extra circulum, veluti in N, ut sit, $NP = x$, adeoque si $NA = b$, $AP = x - b$. Et similiter abscissas computare licet in aliqua a centro C distantia, ut earum origo vel sit inter A & C, vel inter C & B. Hæc si notent tyrones, in doctrina de locis geometricis & constructione æquationum altiorum nihil prorsus sentient difficultatis. Patebit etiam, quomodo ad formulas generales plana sit via. Quæ vero hic annotamus de relatione curvarum ad rectam, quæ curvam in puncto quodam fecat, eadem quoque locum habent, ubi eandem referre libuerit ad rectam extra curvam quomodocunque sitam. Nec oleum atque operam perdunt tyrones, si in omni casu possibili æquationem ad circulum investigent, ut methodum definiendi curvas per æquationem intimius inspiciant beneficio exempli omnium facillimi & notissimi, idem imitaturi in curvis aliis, quod in circulo fecere.

§. 207. Enimvero abunde ea docuimus, quæ in hac methodo lucem accendunt tyronibus, ne in tenebris

bris palpitent ad magis ardua progressi, quemadmodum vulgo accidere solet. Sed dicenda quoque nonnulla sunt de lineis non algebraicis, quarum nonnullæ sub finem capitis definiuntur. Definimus Quadraticam

Tab VI.
Fig. 67.
Algeb.

DINOSTRATIS, per $ay = bx$, ubi x denotat arcum AN, a Quadrantem AB, b radium AC, & y portionem radii AP, quæ ad radium eandem rationem habet, quam habet arcus AN ad Quadrantem. Quamobrem etsi æquatio alias definiat triangulum rectangulum æquicrurum; consequenter in ea spectetur ratio rectæ, quæ hypotenusæ est ad crus unum, in quo sumuntur abscissæ; præsentī tamen in casu æquatio, quæ eadem videtur, prorsus diversa est. Etenim in casu priori, quando est ad triangulum rectangulum æquicrurum, a & x denotant lineas rectas; in posteriori autem, quando ad Quadratricem est, a designat quadrantem, x arcum circuli quadrante minorem. Æquatio igitur algebraica non est; nisi cum in ea singulæ literæ denotent totidem rectas. Hoc tamen non obstante æquationes istiusmodi, quas curvæ linearæ ingrediuntur, tractari possunt eodem modo, quo ante tractavimus algebraicas: quod succedere ipsa præsens æquatio docere potest. Etenim

$$\begin{array}{ll} \text{Si fiat} & x = o \\ \text{erit} & ay = o \\ & y = o \end{array}$$

Atque adeo patet, quadratricem concurrere cum radio in origine abscissæ.

$$\begin{array}{ll} S & x = a \\ \text{erit} & ay = ab \\ & y = b \end{array}$$

Unde liquet, quamprimum x fit quadranti æqualis, rectam AP, quæ designatur per y , degenerare in radium.

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & x = \frac{1}{2}a \\ & ay = \frac{1}{2}ab \\ & y = \frac{1}{2}b \end{array}$$

Evidens igitur est, dimidio quadranti respondere radium dimidium.

Eadem adeo eliciuntur, quæ per genesin Quadratricis manifesta sunt.

Quod vero etiam alia ignota hinc deduci possint, suo patebit loco (§. 55 *Anal. infin.*): id quod omnino notandum, ne nullum in usum æquatio ista data videatur.

Singulare quid habet æquatio, quod non exprimat relationem ipsius curvæ ad rectam positionem datam per se, sed relationem potius curvæ alterius, nimirum Quadrantis circuli, cuius ope determinatur punctum M; quod rectæ AP & arcui AN, hoc est duabus indeterminatis y & x respondeat. Exprimit scilicet relationem arcus AN ad rectam AP, qualis esse debeat, ut ipsi AP respondeat punctum M in Quadratrice. Data enim hac relatione datur etiam punctum M.

Quo

Quoniam vero $y = \frac{ab}{x}$, adeoque AP quarta proportionalis ad arcum AN, quadrantem AB & radium AC; determinatio puncti M dependet a rectificatione indefinita circuli, consequenter a circuli quadratura. Ceterum Quadratrix insinuat artificium reductionis constructionis curvarum ad curvas simpliciores, supposita harum quadratura vel rectificatione: neque enim in omnibus curvis rectificatio pendet a quadratura, prouti in circulo obtinet (*vi. theor. 3. §. 128 Anal.*), quemadmodum suo loco videbimus, ubi de quadratura & rectificatione curvarum agitur. Artificium hoc maximi momenti est in Analyfi infinitorum ad Geometriam sublimiorem applicata, quemadmodum patet per problemata physico-mechanica, qualia in Elementis Mechanicæ occurrunt. Quamobrem consultum est, ut tyrones, qui ad tertium cognitionis gradum adspiciant, tempestive annotent, quomodo inventa Veterum recentioribus Geometris insinuaverint artificia, aut saltem insinuare potuerint, siquidem attentionem suam deficere non fuerunt passi.

§. 208. Notandum adhuc est, posse etiam curvas referri ad curvas alias positione datas, quemadmodum referuntur ad rectas positione datas, ita ut abscissæ sumantur in curva positione data, quemadmodum su-

muntur in recta positione data: quod ut facilius intelligatur, dabo exemplum. Sit AMO parabola *Apollo-Tab. II. niana* seu primi generis. Producat-
Fig. 22.
tur semiordinata PM in N, donec recta MN habeat ad arcum parabolicum AM eam relationem, quam habet semiordinata PM ad ejus abscissam AP; evidens est, si arcus AM $= x$, MN $= y$ & recta quædam constans $= a$, fore $y^2 = ax$. Æquatio hæc ab æquatione ad parabolam in eo differt, quod x denotet arcum parabolicum AM, cum in æquatione ad parabolam denotet rectam AP. Ceterum eadem ex æquatione hac deducuntur, quæ ex æquatione ad parabolam, nisi quod theoremata ingrediatur arcus parabolicus. Nimirum cum sit $y = \sqrt{ax}$; semiordinata MN est media proportionalis inter arcum parabolicum datum AM & rectam quandam datam constantem a , quæ tertia proportionalis est ad quemvis arcum parabolicum & ipsi respondentem semiordinatam. Et quemadmodum in parabola quadrata semiordinatarum habent rationem abscissarum, ita semiordinatæ curvæ ANR sunt in ratione arcuum parabolicorum ipsis respondentium. Hoc artificio jam usus est ARCHIMEDES in spiralibus qui eas retulit ad peripheriam circuli tanquam ad axem. Facile autem apparet, relationem semiordinatæ MN ad arcum AM exprimi posse per æquationem curvæ algebraicæ cujuscunque alterius.

rius. Ita si arcus $AO = a$, $AM = x$, & $MN = y$; curva AMR definiri potest per æquationem $y^2 = ax - x^2$, quæ est æquatio ad circulum (§. 193).

Si ponamus $x = a$

$$\begin{array}{r} y^2 = a^2 - a^2 \\ = 0 \\ \hline y = 0 \end{array}$$

Unde liquet punctum R cum puncto O coincidere, adeoque curvam AR parabolam AO secare in O .

Si fiat $x = \frac{1}{2}a$

$$\begin{array}{r} y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ = \frac{1}{4}a^2 \\ \hline y = \frac{1}{2}a \end{array}$$

Patet itaque, si arcus parabolicus AO bifecetur, fore MN arcui dimidio æqualem.

Ponamus ex adverso $y = \frac{1}{2}a$

$$\begin{array}{r} \text{erit} \quad \frac{1}{4}a^2 = ax - x^2 \\ x^2 - ax = -\frac{1}{4}a^2 \\ \hline x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0 \\ x - \frac{1}{2}a = 0 \\ \hline x = \frac{1}{2}a \end{array}$$

Unde manifestum est, in nullo alio puncto, quam in medio arcus AO arcum parabolicum AM rectæ MN æqualem esse.

§. 209. Præter sectiones conicas definivimus potissimum eas curvas, quæ a Veteribus fuerunt inventæ; & quas

recentiores Geometræ addiderunt; antequam Algebra ad Geometriam sublimiorem appliceretur & doctrina curvarum amplificaretur. Veteres præter circulum, parabolam, hyperbolam & ellipfin considerarunt conchoidem, cissoidem, quadratricem, atque spirales, & recentiores addiderunt logarithmicam & cycloidem, cui deinceps accessit epicyclois. Tenendum nimirum est, Veteres non animum advertisse ad curvas, nisi quatenus problematis geometricis solvendis inserviebant. Duo autem apud ipsos celebrabantur problemata; alterum scilicet de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas datas; alterum de quadratura circuli. In usum prioris problematis solvendi NICOMEDES invenit conchoidem, DIACLES cissoidem: posterius autem problema per spiralesolvere tentavit ARCHIMEDES, per quadratricem DINOSTRATES. Recentius quadratura circuli tentata per cycloidem, ad cujus imitationem, si genesin illius spectes, inventa epicyclois. Cum vero logarithmi essent inventi & tanta utilitate in Mathesin practicam recepti; in usum logarithmorum recepta est logarithmica, ad cujus imitationem deinceps excogitata logistica spiralis. Nostrium erat lineas curvas veteribus celebratas non prætermittere silentio, qui lectorem nostrorum Elementorum ad Mathescos universæ cognitionem manuducere intendimus; præter:

præsertim cum inventis recentioribus ansam dederint, quæ a Veteribus inventa fuerunt, quemadmodum jam hinc inde annotavimus. Logarithmica autem & cyclois usum præclarum nactæ sunt in problematis physico-mechanicis, prouti suo loco in Elementis Mechanicæ ostendimus. Earundem itaque mentionem injicere debuimus. Habet quoque usum prorsus eximium epicyclois in Mechanica practica, & aliis inventis recentioribus ansam dedit. Quamobrem nec hancce silentio præteriri fas erat. Quadratricem *Tschirnhausianam* & Lineam sinuûm, tangentium atque secantium non alio fine adjecimus, quam ut constaret, quomodo curvarum geneses excogitari possint: quem in finem etiam adjecimus problemata ultima hujus capituli (§. 579 & seqq. *Anal.*). Ex duobus tamen ultimis (§. 581, 583 *Anal.*) simul discimus, quomodo curvæ superiorum generum describi possint ope curvarum generum inferiorum. Ecce igitur tibi rationem, cur hæc potissimum curvas in præsentē capite consideraverimus.

§. 210. Postquam ostendimus, quomodo Algebra utamur in eruendis curvarum descriptionibus, proprietatibus, aliisque symptomatibus; ad earum usum in construendis problematis exponendum progredimur. Primum itaque docemus, quomodo problemata indeterminata construuntur. Atque eo fine capite sexto

agitur de locis geometricis. Doctrinam hanc invenerunt veteres Geometræ; sed Recentiores ad eandem Algebram applicare cœperunt; ubi constabat intersectione duorum locorum construere æquationes altiores. Problemata indeterminata, quemadmodum vidimus superius cap. 2, sect. 2, duas habent quantitates incognitas, quarum, una pro arbitrio assumpta, determinatur altera; quemadmodum vidimus in curvis algebraicis assumpta abscissa pro arbitrio determinari semiordinatam: id quod etiam obtinere, si recta quædam positione data referatur ad rectam aliam itidem positione datam, ex iis liquet, quæ in Geometria de lineis proportionalibus inveniendis demonstrata sunt. Ita in triangulo rectangulo *ABC*, habet *PM* ad *AP* rationem constantem ipsius *BC* ad *AB*; atque adeo sumpta *AP* pro arbitrio, per rectam *AC* determinatur *PM*. Dum itaque problema indeterminatum construimus, omnes reperimus rectas possibiles, quæ eandem datam relationem ad se invicem habent. Unde si ad rectam positione datam applicentur parallelæ, & quæritur in recta positione data punctum, quod sit origo unius indeterminatæ, atque linea secans omnes istas parallelas, ut ad ipsas respondentes portiones in linea positione data habeant eandem relationem datam; problemati satisfactum. Hinc vero patet, cur linea ista dicatur *Locus*;

Tab. II.
Fig. 16.

cus;

cus; quia nempe continet omnes lineas rectas; quæ in problemate in locum indeterminatarum substitui possunt; seu quia in ea sunt singula puncta, quibus terminantur rectæ, una indeterminatarum pro arbitrio assumpta, determinandæ. Ex. gr. in triangulo rectangulo hypotenusa AC est locus omnium rectarum proportionalium cruribus AB & BC: etenim continuatis rectis AB & AC in infinitum, intra crura hujus anguli continentur omnes istæ proportionales, quarum una sumitur in AB, altera vero determinatur per rectam AC; & in recta AC sunt omnia puncta M, quibus terminantur indeterminata ad AB normales, ut fiant assumptis AP in data ratione proportionales. Ratio est relatio simplicissima, quam exhibet recta ad rectam aliam relata. Relationes vero ceteræ constantes repræsentantur per lineas curvas; qualis est in circulo, ut quadratum semiordinatæ sit æquale rectangulo ex segmentis diametri. Videmus adeo æquationes, quæ duas involvunt lineas incognitas, geometricè construi posse; quatenus eadem exprimunt relationem constantem, quam habent singula lineæ curvæ puncta ad rectam positione datam, seu quatenus eadem sunt æquationes ad curvam quandam lineam, quam definiunt. Atque ideo æquationes, quas ante diximus æquationes ad curvam, hic vocantur locales.

§. 211. Monuimus in anterioribus, curvam referri posse ad quamlibet rectam positione datam, sive ea curvam fecerit in vertice, sive in alio quocunque puncto, sive eandem non fecerit, sed tota extra eam cadat intervallo vel nullo, vel dato ab eadem distans, & sive axi fuerit parallela, sive ad eundem obliqua. Hinc determinantur omnes casus possibiles æquationum localium: quæ quomodo reperiantur, ex iis patet, quæ de circulo paulo ante ostendimus. Cum SLUSIUS æquationum localium usum in construendis æquationibus cubicis & biquadraticis docuisset; PHILIPPUS DE LA HIRE Algebram ad loca geometrica applicavit, & in omni casu æquationes locales ad rectam, circulum, & sectiones conicas investigare docuit: quod idem fecit OZANAMUS. Enimvero cum sic plures prodirent æquationes particulares ad eandem lineam; JOANNES CRAIGIUS æquationes generales investigavit ad sectiones conicas, quæ omnes particulares eminenter continent: cujus exemplum secutus HOSPITALIUS. Nobis quoque placuit generalia invenire theorematà construendi omnes æquationes locales ad rectam & sectiones conicas; cum per ea constructiones problematum indeterminatorum, via vere analytica, erui possint. Rem penitus examinanti constabit, non aliis hic opus esse artificiis, quam quæ paulo ante insinuavimus, cum de æquationi-

tionibus ad circulum ageremus. Theoremata generalia inveniuntur, si investigentur theorematum in casu maxime composito; in quo linea, ad quam refertur curva, ponitur esse ad axem obliqua, & origo abscissarum distare a vertice, vel centro curvæ, si quod habet, aliquo intervallo. Etenim si hic quædam lineæ constantes supponantur nullæ, in æquatione termini evanescunt, qui in eas ducuntur, sicque prodit æquatio in casu simpliciori. Hoc fieri debere observavimus superius, cum in circulo origo abscissarum statuere-
 Tab. II. Fig. 25. tur in L intra verticem A & centrum C. Vidimus enim si ponatur $AL=0$, æquationem in eo casu repertam $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$, degenerare in æquationem ad circulum $y^2 = ax - x^2$, in casu simplicissimo, quando origo abscissarum est in A. Enimvero non modo æquatio magis composita, hoc pacto, reducitur ad simpliciore, verum etiam schema, quod exhibet constructionem illius æquationis, degenerat in schema, quod hujus repræsentat constructionem. Ex. gr. si fuerit $LH=0$, linea DH incidit in DL, adeoque pars schematis, quæ relinquitur, casum istum repræsentat, in quo recta positione data DL, ad quam refertur curva AMB, est axi AS parallela. Quodsi porro fiat $KD=0$, relinquitur pars schematis, quæ repræsentat casum, in quo abscissæ computantur in axe ultra verticem continuato KS,

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

& origo earum statuitur in aliqua a vertice distantia K. Denique si etiam ponatur $AK=0$, prodit schema casum ordinarium exhibens, in quo abscissæ sumuntur in axe AS, & origo abscissarum in vertice. Methodus adeo qua utimur, non modo æquationes locales omnes ad eandem curvam una æquatione includit, eodem artificio, quo æquationes omnes ad curvas algebraicas ad æquationem unicam generalem reduximus (§. 385 *Analys.*); sit ita quod ibidem aliud præterea artificium adhibendum erat, quo hic non habemus opus; quia ibidem æquationes omnes una formula comprehendendæ, non erant ejusdem gradus, quemadmodum in præsentis obtinet; sed etiam unico schemate omnium æquationum localium constructiones comprehendit. Quænam hæc sit prærogativa præ methodo communi, qua singuli casus figillatim expenduntur; facillimo negotio animadvertet, qui, quæ de locis geometricis tradimus, cum iis conferre voluerit, quæ de iisdem docet DE LA HIRE, vel OZANAMUS.

§. 212. Unum adhuc superest; quod de theorematis hisce generalibus observandum, ne eorum applicatio turbet tyrones. In schemate nostro supponimus, originem abscissarum removeri ultra verticem, ita ut abscissæ linea quadam data excedat abscissam ordinariam. Enimvero
 Tab. II. Fig. 25. vidimus supra, originem earundem

M m

etiam

etiam statui posse ex parte altera, veluti in L, ita ut abscissa LP deficiat ab abscissa ordinaria linea quadam data AL. Similiter rectam axi parallelam, vel ad eum obliquam ponimus ultra eundem, ut augeat semiordinatam ordinariam PM recta quadam data; cum tamen etiam hæ lineæ ita duci possint ex parte opposita, ut semiordinata QM vel RM deficiat ab ordinaria PM, linea quadam data PQ, vel PR. Æquatio igitur localis generalis non videtur omnes æquationes particulares continere, nec schema illi respondens comprehendere omnia schemata, quæ harum constructionem exhibent. Dubium hoc ut tollatur, nostrum est docere, qua ratione innotuerit, quomodo iidem quoque casus in eo, ad quem computavimus æquationem, contineantur. Supra reperimus æquationem ad circulum, si origo abscissarum fuerit in L, $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$. Ponamus jam originem abscissarum esse in N, ut sit $NA = b$, $NP = x$, sitque $AB = a$, $PM = y$; erit $AP = x - b$, $PB = a + b - x$.

Ob $PM^2 = AP \cdot PB$ prodibit

$$y^2 = ax - x^2 + 2bx - ab - b^2$$

Æquationem hanc a superiori non differre videmus nisi signis & hanc diversitatem hinc oriri observamus, quod ibi abscissa ordinaria AP sit $x - b$, hic vero $b - x$. Quodsi ergo æquationes istæ redigantur ad nihilum, quemadmodum in hac

doctrina fieri solet; habebimus in eo casu, ubi abscissarum origo in N,

$$y^2 + x^2 - ax + ab = 0 \\ - 2bx + b^2$$

in casu autem opposito, ubi origo abscissarum in L,

$$y^2 + x^2 - ax - ab = 0 \\ + 2bx + b^2$$

Quare si duas haberes formulas; valor ipsius b in casu particulari dato semper eliceretur positivus; cum in priori coëfficiens negativus comparandus esset cum negativo $-2b$, in posteriori coëfficiens positivus cum $+2b$. Quodsi vero æquationem, quæ cum formula posteriori conferri debebat, cum priori componis, adeoque quantitatem positivam cum negativa, necesse est ut valor ipsius b prodeat negativus. Si $-b$ substituās in locum $+b$ in æquatione altera; pro $+2bx$ habebis $-2bx$, pro $-ab$ vero $+ab$; ducendo scilicet $-a$ in $-b$; at b^2 retinet signum suum, quia $-b$ in $-b$ efficit $+b^2$. Atque sic æquatio posterior degenerat in priorem; ut adeo prior in utroque casu adhiberi possit; modo notes, quoties in casu particulari lege comparationis valor ipsius b elicitur negativus, toties sumendam esse rectam eidem respondentem ex parte opposita, ut sit $AL = b$. Idem cum eodem modo obtineat quoad distantiam parallelæ axi ab eodem PQ; manifestum est, cur una formula satisfaciāt in casu utroque, modo observetur, quod de valore negativo

in

Tab. II.
p. 22.

in æquationis particularis cum generali comparatione prodente annotavimus. Idem adhuc clarius patet in parabola. Etenim si fuerit $SA = b$, $SP = x$, adeoque $AP = x - b$; erit ex natura Parabolæ, si parameter fuerit a ,

$$y^2 = ax - ab$$

seu $y^2 - ax + ab = 0$

Quodsi fuerint omnia ut ante, sed $AL = b$, adeoque $AP = b + x$, erit

$$y^2 = ax + ab$$

seu $y^2 - ax - ab = 0$

Hic denuo patet, æquationem posteriorem non differre a priori, nisi diversitate signorum in iis terminis, quorum coëfficiens est b ; in priori enim habemus $+ab$, in posteriori $-ab$. Quamobrem ubi in applicatione formulæ generalis, quæ ad casum priorem spectat, confers terminum negativum æquationis ad casum posteriorem spectantis cum positivo, qui ex formula casus prioris sumitur; valor utique prodire debet negativus pro AL . Patet etiam hic, si in æquatione posteriori pro $+b$ substituas $-b$, ducendo $-b$ in $-a$, prodire $+ab$, adeoque æquationem posteriorem degenerare in priorem; quemadmodum ex adverso prior abit in posteriorem, si in priori substituas $-b$ pro $+b$. Quodsi enim ducas $+a$ in $-b$, prodibit $-ab$, quemadmodum habet formula posterior. Videmus adeo, quomodo innotuerit, eandem formulam subire posse

vicem duarum, si valoris negativi quantitas sumatur ex parte opposita. Immo videmus, perinde esse, siue in formula generali abscissam & semiordinatam statuas ordinariis AP & PM majorem, siue minorem; ut adeo nulla ratio intrinseca fuerit electionis, sed tantummodo extrinseca: quod ideo monemus, ne quis in Philosophia hinc petat argumentum contra principium rationis sufficientis in electionis casu. Utimur eodem artificio, non sine maxima utilitate, in Analyfi infinitorum seu calculo differentiali & integrali, quemadmodum suo loco videbimus; ubi ex eadem ratione valorem negativum sumimus pro magnitudine ex parte opposita sita. Absit itaque ut tibi persuadeas, hoc fieri ex natura quantitatum privativarum; & hinc colligas, quantitates privativas esse veras quantitates, seu in numero positivarum; cum satis constet eas non denotare nisi defectum quantitatis veræ, seu positivæ, per positivam, quæ deficit, æstimabilem; quemadmodum pecunia, quæ debetur, non est parata pecunia, quam habes, etsi per paratam pecuniam æstimetur, quæ solvenda, ut debitum tollatur. Nullæ revera sunt quantitates negativæ, etsi utiliter in usum calculi universalis fingantur. Cavendum omnino est, ne entia ficta Mathematicorum confundantur cum realibus in detrimentum scientiæ philosophicæ.

§. 213. Hinc simul patet ratio,
M m 2 cur

Tab. II.
Fig. 25.

cur in casu particulari demonstraturi constructionem ex formula generali elicita; eruendo ex hac æquationem ad construendum propositam; non utamur valoribus negativis, qui per comparisonem cum formula generali prodeunt, sed iis substituamus positivos: id quod fieri non licebat, si per naturam quantitatum valor esset negativus. Valor negativus v. gr. rectæ AL nonnisi fictitiuſ est; quatenus æquatio, unde elicitur, repræsentare fingitur casum, quem non repræsentat; cum revera non exhibeat nisi cum, in quo origo abscissarum est in N; propterea quod, hac fictione, eadem formula sufficere deprehenditur in utroque casu, quam absque ea nonnisi in uno adhibere liceret, nimirum quando origo abscissarum est in N. Extra hanc fictionem utique contradictorium est, quantitatem positivam esse æqualem privativæ; quemadmodum etiam in ipsa Analyſi contradictionem inde colligimus, atque ex ea porro, notioni impossibilis convenienter, (§. 97 *Ontol.*) impossibilitatem inferimus. Habemus exemplum in æquatione ad circulum $y^2 + x^2 - ax + 2bx - ab + b^2 = 0$.

Quodsi enim ponas

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 + a^2 - a^2 + 2ab - ab + b^2 = 0$$

$$y^2 = -ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(-ab - b^2)}$$

Ex eo itaque, quod valor ipsius y ,

prodit negativus, qui producit pro y radicem imaginariam; infertur, impossibile esse, ut abscissa fiat diametro æqualis; recte omnino, cum idem per se pateat, ubi supponis notum esse, quod æquatio sit ad circulum, & origo abscissarum in L, cum abscissa major esse nequeat recta $LB = a - b$. Nimirum hic colligitur, hypothesin $x = a$ esse absurdam; quia hinc sequitur, quantitatem positivam esse æqualem privativæ, aut radici imaginariæ; quod absurdum esse supponitur.

§. 214. Ut usus formularum generalium in construendis æquationibus problematum indeterminatorum clarius elucesceret, aliquot exemplis eundem illustrare lubuit (§. 593 *Æseqq. Anal.*). Patet per ea, ope istarum formularum, nos via vere analytica deduci ad problematum indeterminatorum constructionem, ac constructiones semper obtineri concinnas, quales in Geometria desiderantur; ut adeo non solius brevitatis gratia easdem prætulerimus methodo communi, qua usi sunt DE LA HIRE & OZANAMUS. Dedimus quoque exempla, (§. 597, 600 *Anal.*), quibus ostenderemus, quomodo, ex constructione locorum, deriventur æquationes locales; ut appareat ad quamnam curvam sit locus constructus. Quoniam vero id intendimus, ut, dum artificia Analyſeos inculcamus, simul doceamus veritates mathematicas cognitu utiles; ideo selegimus constructiones curva-

curvarum, quas pro fornicibus commendant Architecti, ut constaret, eas esse ellipses *Apollonianas*. Æquationem primam (§. 597 *Anal.*) $y^2 + \frac{d^2 x^2}{a^2}$

$\frac{d^2 x}{a} = 0$ esse ad ellipsin, constare poterat ex collatione cum formula generali pro ellipsi (§. 588 *Analys.*). Quodsi consueto more hanc æquationem cum formula ista compares, deprehendes a esse axem majorem, d vero minorem ellipsicos. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \quad 2n = 0$$

$$q = f$$

$$\frac{2tp}{2m} = -\frac{d^2}{a} \quad m^2 = p^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{2d^2 p}{a^2} = \frac{d^2}{a} \quad m = \frac{1}{2}a$$

$$\frac{2p}{a} = 1$$

$$p = \frac{1}{2}a$$

Habemus adeo

$$a^2 : d^2 = a : t$$

$$t = \frac{ad^2}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

Quoniam parameter t est tertia

proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Analys.*); cum a sit axis major, erit d minor, & ob $p = \frac{1}{2}a$ abscissæ computantur a vertice.

Similiter æquationem alteram $y^2 + \frac{ddx^2}{a^2} - \frac{2ddx}{a} = 0$ esse ad ellipsin, ejus cum formula generali collatio prodit; & illius cum hac comparatione facta patet, quod a sit axis dimidius major, d vero dimidius minor. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \quad \frac{2tp}{2m} = \frac{2dd}{a}$$

$$\text{h. e. } \frac{d^2 p}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

$$p = a \quad m^2 = p^2 = a^2$$

$$m = a$$

$$a^2 : d^2 = 2a : t$$

$$t = \frac{2ad^2}{a^2} = \frac{2d^2}{a}$$

Quoniam a est dimidius axis major, & parameter t tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Anal.*), seu quarta ad dimidium axem majorem, minorem dimidium, & minorem integram (§. 124 *Analys.*); ideo patet, d esse axem minorem dimidium, & ob

M m 3

$p = a$

$p = a$ originem abscissarum esse in vertice ellipsos.

§. 215. Utraque æquatio localis, etsi ex diversis constructionibus eruatur, eadem est; nisi quod in posteriori a & d denotent semiaxes, in priori autem integros axes conjugatos. Forfan non inconsultum erit hic docere, quomodo constructio utraq; eruatur ex æquatione ordinaria ad ellipsin. Æquatio hæc est $y = bx - \frac{bx^2}{a}$, in qua b parametrum, a vero axem majorem denotat. Quoniam parameter est tertia proportionalis ad axem majorem a & minorem d (§. 423 *Anal.*); erit $b = d^2 : a$. Quodli ergo in æquatione ordinaria hunc valorem in locum ipsius b surroges; habebis

$$y^2 = \frac{d^2 x}{a} - \frac{d^2 x^2}{a^2} \\ = \frac{d^2 ax - d^2 x^2}{a^2}$$

Quare

$$a^2 : d^2 = ax - x^2 : y^2 \\ a : d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Patet adeo semiordinatam in ellipsi esse quartam proportionalem ad axem majorem, minorem & semiordinatam circuli super axe majore descripti eidem cum semiordinata ellipsos abscisse respondentem. Quamobrem cum pro a & d sumi etiam possit $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}d$ (§. 124 *Anal.*); igitur patet, si super axe majore describatur semicirculus & in P erigatur perpendicularis PN , ductaque ex centro C radio CN

in eum transferatur CR semiaxi minori æqualis, ac tandem ex R demittatur perpendicularis RM ; fore punctum M in ellipsi: quæ est ipsa constructio SERLII ex æquatione ordinaria elicita. Cum enim sit MR parallela ipsi PC ; erit (§. 268 *Geom.*)

$$NC : RC = NP : PM$$

$$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Poteramus itaque constructionem *Serlianam* ellipsos jam ex æquatione ordinaria elicere in superioribus, cum doctrinam de ellipsi traderemus. Etsi autem æquatio ex altera constructione elicita eadem sit cum anteriore; ex ea tamen non minus deduci poterat constructio altera. Etenim sit ellipsis ADB , cujus axis major AB , semiaxis minor EF . Describatur, radio CD , semicirculus EDF , & erecta perpendiculari PM ducatur axi AB parallela MN , ex N vero demittatur perpendicularis NQ , quæ erit ipsi PM æqualis. Si sit $AC = a$, $DC = d$, $AP = x$, erit æquatio ad ellipsin $y^2 = \frac{2addx - d^2x^2}{a^2}$, adeoque

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : y^2$$

Sit jam $EQ = z$, erit $QF = 2d - z$, adeoque $QN^2 = PM^2 = y^2 = 2dz - z^2$. Habemus itaque

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : 2dz - z^2$$

adeoque (§. 124 *Anal.*)

$$a^2 - 2ax + x^2 : a^2 = d^2 - 2dz + z^2 : d^2$$

$$a - x : a = d - z : d$$

$$x : a = z : d$$

$$x : z = a : d$$

hoc

hoc est, AP:EQ=AC:EC

Quare si ad semiaxem majorem, & minorem ellipseos, atque abscissam AP pro arbitrio assumptam, quærat^r quarta proportionalis; erit ea abscissa EQ, cui responderet semiordinata QN in circulo semiordinatæ ellipseos PM æqualis.

Quodsi displicet resolutio per analysin rationum; analogiam, qua nititur constructio, per Algebram quoque reperire licet. Etenim

$$\frac{2ad^2x - d^2x^2}{a^2} = 2dz - z^2$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x}{a^2} = z^2 - 2dz$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2}{a^2} = z^2 - 2dz + d^2$$

$$\frac{ad - dx}{a} = d - z$$

$$\frac{dx}{a} = z$$

Habemus itaque, ut ante:

$$a : d = x : z$$

Notanda hic sunt artificia, quibus constructiones ex æquatione ordinaria eliciuntur. Nimirum in æquatione ordinaria substituimus valorem parametri, quam ex eadem eliciimus, ut eandem ingrediantur non nisi lineæ in ipsa contentæ. Ita enim prodibat æquatio, cujus in analogiam resolutione constructio prior erat

manifesta. Ex eadem æquatione in analogiam resoluta prodit quoque altera; substituendo valorem quadrati semiordinatæ ellipseos ex circulo circa axem minorem descripto. Equidem prævidere non licet, quid per substitutionem sit proditurum; non tamen ideo ea negligenda est. Ubi enim veritatem quærimus; tentanda sunt omnia, donec incidamus in theorematæ & constructiones problematum. Principii substitutionis magna vis est in Analyfi: efficit enim æquationem dependentem a pluribus veritatibus, ut jam ex ea per reductionem eadem erui possint, quæ ex iisdem more Veterum ratiocinando colliguntur.

§. 216. Enimvero ut intelligant^{Tab. III.} tyrones, idem artificium etiam in aliis^{Fig. 28.} curvis adhiberi posse, lubet hoc ipsum applicare ad hyperbolam. Pro hyperbola æquatio ordinaria est $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$. Est etiam hic, si axis

conjugatus = d , parameter $b = \frac{d^2}{a}$.

Quodsi ergo hunc valorem in æquatione ordinaria substituas, habebis

$$y^2 = \frac{d^2x}{a} + \frac{d^2x^2}{a^2} \\ = \frac{d^2ax + d^2x^2}{a^2}$$

Quare $a^2 : d^2 = ax + x^2 : y^2$

$$a : d = \sqrt{ax + x^2} : y$$

$$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = \sqrt{ax + x^2} : y$$

Quodsi

Quodsi ergo ex centro hyperbolæ C erigas $CD = \frac{1}{2}d$, & super BP, abscissa AP pro lubitu assumpta, describas semicirculum secantem perpendiculararem in A erectam in N, & $PN = \sqrt{(ax+x^2)}$ transferas ex B in L, tandemque in L erigas perpendiculararem LI, occurrentem rectæ per B & D ductæ in I; erit LI semiordinata y abscissæ AP respondens. Quamobrem, si fiat recta PM ad BP perpendicularis = LI; erit punctum M in hyperbola. Cum in praxi non opus sit semicirculum describi, sed ex medio BP, tantummodo interfecanda recta AN in N, & intervallum PN ex B in L transferendum; quodvis in hyperbola punctum M hoc modo facillime determinatur, ut constructio pro non ineleganti haberi possit. Notent igitur hic tyrones, quod ad artificia, quibus in solutionibus problematum utuntur Autores, animum attendere debeant, eadem statim adhibitori ad alia, quantum ipsis datur. Nec inconsultum erit, ut Autores, qui de sectionibus conicis commentati sunt, evolvant, & ubi theoremata & problemata elegantia occurrunt, ea analytice investiganda sibi proponant. Ad hoc studium ut eos incitarem, iisdemque viam, qua eundem, commonstrarem, ea in medium proferre libuit, quæ de ellipsi & hyperbola dicta sunt. Unicum adhuc addendum. In hyperbola æquilatera $a=d$, adeoque $y = \sqrt{(ax+x^2)}$, consequen-

ter $PM=PN$. Quamobrem punctum M in eadem nullo fere negotio determinatur, scilicet si ex medio BP, intervallo $\frac{1}{2}$ BP, interfecetur AN in N, & intervallo PN interfecetur PM in M; ut adeo non opus sit, nisi in A erigi perpendiculararem infinitam.

§. 217. Nos non progredimur ultra loca solida, in quibus acquieverunt Veteres: neque enim hæc doctrina ultra hosce limites multum promota. NEWTONUS enumeravit lineas tertii ordinis, seu curvas secundi generis, quarum æquationes ad tres dimensiones ascendunt. Eam esse completam demonstravit STIRLINGIUS, simulque ostendit, quomodo, æquatione curvæ tertii ordinis data, inveniat locus, hoc est, species curvarum dignoscatur, ad quam eadem est. Enimvero hæc non sunt ad captum tyronum, in quorum usum conscripsimus Elementa nostra; neque adhuc ea ratione pertractata, ut eadem facilitate intelligantur, qua a nobis propo- sita capiuntur. Neque etiam opus est, ut hac doctrina sis instructus, ubi ea, quæ in sequentibus tradimus, intelligere volueris; immo eadem ignorata non impeditur progressus in Analyfi recentiorum, qua Geometria ad naturam applicatur. Hoc non eo fine monemus, ut præclaris inventis laudem suam detrahamus; sed ne tyrones remorentur progressum ad ulteriora; affectantes scientiam eorum, quorum ignorantia ei-

dem

dem minime obstat. Monitum igitur nostrum exigit præsens institutum. Ultra enumerationem linearum tertii ordinis, seu curvarum secundi generis, nemo adhuc progressus. Atque adeo doctrina de speciebus curvarum algebraicarum tanto adhuc intervallo distat a perfectione sua, quanto ab eadem distare Algebram monuimus. Abunde tyronibus ad altiora adspirantibus sufficiunt ea, quæ de locis geometricis tradidimus. Et ubi ad artificia, quibus in doctrina hac explananda utimur, animum attulerint attentum, ut eadem animo distincte comprehendant; iisdem plurimum juvabuntur in altioribus, quæ deinceps sequuntur. Hoc auxilio methodus comparationis æquationum particularium, in quibus coëfficientes indeterminatarum sunt determinati, cum assumptis, in quibus coëfficientes isti indeterminati sunt, familiaris redditur. Ejus autem in Analyfi multus est usus.

§. 218. Doctrinam de locis geometricis non solum proposuimus in usum constructionis problematum indeterminatorum, cujus ideo dedimus aliquot exempla; sed & in usum constructionis æquationum altiorum, præsertim cubicarum & biquadraticarum. Quamobrem capite septimo docemus primum in genere, quomodo æquationes superiores construantur, & mox in specie, quomodo construantur æquationes cubicæ & biquadraticæ. Methodus autem, qua

hic utimur, tota huc redit, ut construantur duo loca, quorum intersectione determinatur radix æquationis, seu linea recta, quæ eidem respondet. Invenit eandem SLUSIUS. Et si enim non desint, qui eam jam CARTESIO perspectam fuisse contendunt; certo tamen, quod affirmant, probare minime possunt; cum alia quoque via in regulam suam incidere potuerit, quam in Geometria pro construendis æquationibus cubicis & biquadraticis, per parabolam & circulum, præscribit. Quemadmodum vero inventa Veterum profuerunt Recentioribus ad inveniendâ suâ, quibus ad ulteriora progressuris usui sunt inventa anteriora; ita dubium non est, quia Veterum quoque inventa facem protulerint SLUSIO ad methodum suam construendi æquationes cubicæ & biquadraticas inveniendam. Etenim cum Veteres multum defudarent in duabus lineis EF, GH, mediis continue proportionabilibus inter duas datas AB, CD, inveniendis; MENECHMUS via vere analytica pervenit ad solutionem problematis tantopere celebrati, ope intersectionis duarum parabolarum. Atque in hac ipsa constructione continetur idea ejus methodi, quam SLUSIUS primus reperit: id quod ut appareat, analysis MENECHMI paulo disertius explicanda. Quoniam GH teria proportionalis ad AB & EF, itidemque CD tertia proportionalis ad EF & GH; habemus

Tab. III.
Fig. 29.

$$AB:EF=EF:GH \quad EF:GH=GH:CD$$

$$EF^2 = AB \cdot GH \quad GH^2 = CD \cdot EF$$

Patet itaque, quadratum primæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex data prima AB in quæsitam alteram, seu mediarum continuæ proportionalium secundam; quadratum vero secundæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex datarum altera in primam quæsitam seu continue proportionalium. Quoniam in parabola quadratum semiordinatæ est æquale rectangulo ex parametro in abscissam; igitur patet si, parametro data una AB, describatur parabola; secundam quæsitam GH fore in numero abscissarum, & eidem respondentem semiordinatam fore primam quæsitam EF: contra si, parametro data altera CD, describatur parabola; secundam quæsitam GH fore in numero semiordinatarum ejusdem, & eidem respondentem abscissam fore primam quæsitam. Quamobrem patet eandem rectam esse abscissam in parabola una & semiordinatam in altera, & quæ in una semiordinata est, eandem esse abscissam in altera. Obtinet hoc si duæ parabolæ, AMR & AMO, circa axes AD & AE, ad angulos rectos junctos, describantur; in puncto enim intersectionis semiordinata PM parabolæ AMR æqualis est abscissæ AQ parabolæ alterius AMO, & vicissim semiordinata QM parabolæ

AMO æqualis est abscissæ AP parabolæ AMR. Patet itaque si rectæ datæ sumantur pro parametris parabolæ AMR & AMO; rectas AP & PM fore duas medias continue proportionales inter duas istas rectas datas. Hic est modus inveniendi duas lineas medias continue proportionales inter duas datas. Quod si $AB = a$, $CD = b$, $EF = x$, $GH = y$; erit

$$x^2 = ay$$

$$y^2 = bx$$

Tab. III.
Fig. 29.

$$\frac{y^4}{b^2} = ay$$

$$\frac{y^2}{b} = x$$

$$y^4 = ab^2y$$

$$y^3 = ab^2$$

Unde liquet, æquationem cubicam $y^3 - ab^2 = 0$ construi per duos loca $x^2 - ay = 0$, & $y^2 - bx = 0$; quarum intersectione determinatur semiordinata PM, quæ radici æquationis $y^3 - ab^2 = 0$ respondet. Constructio adeo MENECHMI insinuat ideam methodi SLUSIANÆ.

§. 219. Inventum MENECHMI ansam quoque dare poterat inveniendæ regulæ *Cartesiana*, quæ æquationes cubicæ & biquadraticæ construuntur. Nimirum cum ex illo constet, æquationem cubicam construi per duas parabolæ, quarum mutua intersectione determinatur radix; in Arte inveniendi autem tentaminibus multa relinquuntur; facile animus subit cogitatio tentandi, num circulus

Tab. III.
Fig. 30.

culus quoque per verticem parabolæ ductus in puncto intersectionis extra verticem determinet radicem æquationis cubicæ. Sit itaque centrum circuli, per verticem parabolæ A descripti, in C; si ex eo in axem parabolæ demittatur perpendicularis CD, evidens est per rectas AD & DC determinari & centrum C, & radius AC. Sit itaque $PM = y$, parameter $= a$, $AD = b$, $DC = c$. Demittatur ex C perpendicularis CR ad semiordinatam PM; erit $RM = y - c$, & ex natura Parabolæ $AP = \frac{y^2}{a}$ (§.

391 *Analys.*), adeoque $DP = CR = \frac{y^2}{a} - b$. Quoniam $AC^2 = AD^2 + DC^2$ & $CM^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $AC^2 = b^2 + c^2$ & $CM^2 = \frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} + b^2 + y^2 - 2cy + c^2$, consequenter ob $CM^2 - AC^2 = 0$

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} - 2cy + c^2 = 0$$

$$y^3 - 2aby - 2a^2c = 0$$

Patet itaque, intersectione circuli per verticem parabolæ transeuntis & parabolæ, construi posse æquationem cubicam, in qua secundus terminus deficit.

Ut jam determinetur valor ipsius b , seu rectæ AD, & valor ipsius c ,

seu rectæ DC; sit æquatio alteri æquivalens

$$y^3 - py - q = 0$$

$$\text{erit } -2ab + a^2 = -p$$

$$b - \frac{1}{2}a = \frac{p}{2a}$$

$$AD = b = \frac{p}{2a} + \frac{1}{2}a$$

$$\text{Similiter } -2a^2c = -q$$

$$DC = c = \frac{q}{2a^2}$$

Quodsi cum CARTESIO sumas parametrum pro unitate, & fiat in axe AH = semiparametro, erit

$$HD = \frac{1}{2}p$$

$$DC = \frac{1}{2}q$$

hoc est, recta HD est æqualis coëfficianti dimidio termini tertii, & DC coëfficianti dimidio quarti, secundo deficiente; quemadmodum habet regula CARTESII.

Non aliis hic utimur artificiis, quam quibus usi sumus in determinanda tangente sectionum conicarum juxta methodum CARTESII (§. 410, 440, 491 *Analys.*). CARTESIO itaque constructio MENECHMI, qua utitur in inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas, ansam dare potuit inveniendi regulam construendi æquationes cubicæ, in quibus secundus terminus deficit; & artificia ipsi familiaria, quibus hic utitur, animum avertere potuerunt ab idea con-

structionis per combinationem duorum locorum in constructione MENECHMI contenta, ad quam eundem advertit SLUSIUS; ut adeo certo asseverari non possit, methodum *Slusianam* cognitam jam fuisse CARTESIO, & eadem hunc pervenisse ad regulam suam. Quicquid sit, utile tamen est tyronibus perpendisse, quomodo inventum MENECHMI analytice expensum, & ideam constructionis æquationum superiorum per combinationem duorum locorum, & ansam inveniendi regulam construendi æquationes cubicas, in quibus secundus terminus deficit, ad biquadraticarum constructionem deinceps extensam, præbere potuerit; siquidem ad tertium cognitionis gradum aspirant. Quoniam ex qualibet æquatione secundus terminus auferri potest (§. 343 *Analys.*) & hoc pacto æquationes cubicæ omnes reducuntur ad tres casus (§. 345 *Analys.*); regula CARTESII, quæ secundum terminum deficere supponit, omnibus omnino æquationibus cubicis construendis sufficit; etsi haud difficile sit eandem quoque extendere ad eas æquationes, quæ secundum terminum habent, quemadmodum operose ostendit BAKERUS; nos brevius docuimus (§. 622 *Anal.*). Cur vero methodum *Slusianam* præferamus regulæ *Cartesiana* a BAKERO extensæ, rationem reddimus in scholio probl. 245. (§. 608 *Analys.*).

§. 220. Notandum vero est, quod

constructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum vere analyticas tradiderimus; ut adeo in iis industriam suam utiliter exercent, qui ad tertium cognitionis gradum aspirant. Tanta autem perspicuitate doctrinam hanc exposuimus, ut, qui in anterioribus industriam suam desiderari non fuerunt passi, nihil prorsus difficultatis sentiant. Inprimis autem hinc discere licet, quomodo tollatur omnis difficultas, quæ ex nimis longa rerum meditandarum serie nascitur. Quamobrem huc animum advertant, quotquot meditationibus longis adulescere voluerint. Quod qui faciunt, hunc utique percipient fructum, ne longitudine meditationum defatigentur. Id tantummodo adhuc monemus tyrones, ut, ubi locus construendus, formula generalis, cum qua particularis data conferenda, ex superioribus excribatur, & eidem æquatio localis construenda subscribatur, ut termini comparandi sibi invicem respondeant. Ex. gr. in problemate 245 (§. 607 *Anal.*) locus ad circulum est $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Formulæ igitur generali ea ita subscribitur, quemadmodum hic factum esse vides:

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - ny + \frac{2mrx}{q} + n^2 = 0$$

$$+ \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} - m^2$$

$$y^2 * + x^2 - cy + bx * = 0$$

$$- ax$$

Loca vacua replentur stellula, ut appa-

appareat, quinam termini sint nihilo æquales in casu particulari dato. Hoc nimirum pacto statim videmus, quinam coëfficientes sint invicem comparandi, & quinam poni debeant nihilo æquales; ne ex confusione oriatur error. Quamvis vero, prolixitatis evitandæ gratia, non omnia combinavimus loca, quorum æquationes ex æquatione cubica vel bi-quadratica eliciimus; qui tamen ingenium & industriam suam exercere voluerint, hoc non inutiliter facient. Ubi vero, comparatione æquationum particularium, cum formula generali facta, valores omnes linearum ad constructionem loci requisitarum fuerunt determinati; oculi convertendi sunt in schema formulæ generali respondens & delendæ lineæ, quarum valores reperti sunt nihilo æquales: ita enim relinquitur schema æquationi particulari respondens. Quamobrem si lineis remanentibus adscribas valores modo repertos; statim videbis, quomodo locus sit construendus. Et ubi schemata duobus locis respondentia inter se confers; illico patebit, quomodo unum alteri sit imponendum, ut lineæ, quæ utrobique eadem sunt, sibi mutuo congruant; consequenter quomodo æquatio data sit construenda. Hac via si incedere volueris, non modo aberit molestia, quæ ex nimis diu continuanda meditatione suboritur; verum etiam constructione ad finem perducta voluptate perfundetur ani-

mus, quæ studium Matheseos continuo magis magisque tibi commendabit, & ardorem in eodem progrediendi accendet. Inprimis etiam sensum evidentia acquires; statim posthac animadversurus, ubi distincte perceptis quædam permiscetur, quæ adhuc confuse percipiuntur: id quod inprimis usui est extra Mathesin, ubi confuse perceptorum cum distincte perceptis commixtio magis nocet, quam in Mathesi; præsertim iis in casibus, in quibus intellectus ab imaginatione avocandus totus, ut veritatem liquidam perspicias. Hoc etiam obtinebis, ne nimia festinatione te præcipites; & ut inter multos strepitus attentionem conserves; eamque interrompere possis, quotiescunque volueris, certo semper tramite progressurus, quando visum fuerit; quemadmodum viator recta via incedens ab eadem minime aberrat, nec iter jam emensum repetere teneatur, ubi gradum sistit, quotiescunque libuerit. Neque verendum est, ut diuturna meditatione defatigetur animus & sanitati corporis insidia struantur. Non opus est, ut in hisce asserendis multum studii collocemus, quamvis ad singula demonstranda a priori principia suppeditet Psychologia nostra. Qui enim dictis obediens fuerit, in seipso experietur, veritati consentanea esse, quæ dicimus non loquentes nisi experta.

§. 221. Quoniam idem problema multis modis construi potest, cum

v. gr. eidem æquationi cubicæ satisfaciatur non modo cujufvis loci solidi cum loco ad circulum, verum etiam cujufvis loci solidi cum quovis loco solido combinatio; quæri omnino poterat, quanam curvæ sint ceteris præferendæ. CARTESIUS æquationes cubicas & biquadraticas non construit nisi per parabolam & circulum; etsi non ignoraverit, easdem quoque construï posse per ceteras sectiones conicas, atque circulum. Videtur utique hoc fecisse, quod æquatio parabolæ & circuli sit simplicior æquationibus ceterarum sectionum conicarum. Cum enim vitium *dyssymmetriæ* ipsi sit, si æquatio construatur per lineas superioris cujuscumque generis, quæ construï potest per lineas generis inferioris, veluti si æquatio cubica vel biquadratica construatur per curvas secundi generis, cum construï possint per curvas primi generis; ex ejusdem omnino generis curvis eas præferre debuit, quæ per æquationes simpliciores definiuntur. Recte autem monuit NEWTONUS, in constructione problematum geometricorum non respiciendum esse ad æquationes curvarum, sed potius ad earum descriptionem; ita ut hæ præferantur aliis, quæ sunt facilioris descriptionis. Unde ad construenda problemata solida adhibet conchoidem, etsi ea sit tertii generis. Immo non improbat, si quis addatum angulum in data ratione secandum utatur cycloide, quæ motu ro-

tæ, vel circuli, super recta facillimè describitur; etsi ea per nullam æquationem algebraicam definiri possit. Etsi autem æquationes cubicæ ac biquadraticæ omnes per circulum & parabolam construï possint; non tamen ideo consultum est, ut non aliis etiam sectionibus conicis in istis æquationibus construendis utamur. Etenim ubi problemata algebraice solvimus, haud raro incidimus in æquationes locales alterius sectionis conicæ, quam parabolæ; ut adeo sua veluti sponte sese offerat ad constructionem; cum parabola demum anxie quærenda esset; &, per aliam sectionem conicam quam parabolam, haud raro multo concinnius construï potest. Quædam adeo lineæ quibusdam problematis videntur quasi propriæ, ita ut destinentur eorundem constructioni; quia pariunt elegantem, & simpliciorē, si linearum rationem habeas, ex quibus datis quæsitæ determinanda; cum constructiones ceteræ evadant intricatiores, & schemata pariant confusa, si omnes constructiones subsidiariæ eidem simul inferendæ, nec curva supponatur tanquam data, nec lineæ ex coefficientibus terminorum repériundæ tanquam jam repertæ.

§. 222. Apud Veteres celebrabantur problemata, de inveniendis lincis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, & de trisectione anguli. Cum enim per Geometriam elementarem facillimè in-

venia-

veniat media proportionalis inter duas datas, & angulus non minus facile biseccetur, per solas rectas & circulum, seu per Geometriam elementarem; Veteres primum horum problematum solutiones interseccione rectarum & circuli quoque tentarunt, sed frustra. Unde ad constructiones per alias lineas curvas confugiendum tandem erat. Quamobrem nostrum quoque erat, ut, constructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum illustraturi, horum inprimis problematum rationem haberemus. Distinxerunt vero ideo Veteres problemata, in plana, solida, & linearia. Plana appellarunt, quæ per rectas & circulum construi possunt, quia hæ lineæ supponuntur in plano descriptæ; solida, ad quorum constructiones adhibendæ sunt sectiones conicæ, quæ, cum per conii dati sectionem prodeant, tanquam in solido datæ supponuntur. Cumque præter rectam, circulum, & sectiones conicas, lineas alias in Geometriam recipere nollent; problemata plana & solida sola geometrica appellarunt, quemadmodum etiam lineas istas solas geometricas dixerunt. Per alias vero lineas construenda problemata, mechanica vocarunt; ipsasque, quarum ope construuntur, lineas mechanicas nuncuparunt. Ast CARTESIUS, connubium Arithmeticæ cum Geometria introducens, cum videret sectiones conicas per æquationes definiri posse algebraicas, & præter

cas dari curvas innumeras alias, quæ per istiusmodi æquationes definiuntur; hasce omnes illis æquiparavit & in Geometriam recipiendas esse intulit; in numerum mechanicarum reiecit, quæ æquationes istiusmodi respuunt. Invento autem calculo differentiali; cum curvæ, CARTESIO mechanicæ dictæ, non minus per æquationes differentiales definiantur, quam ceteræ per ordinarias, & ad constructiones problematum utilissimorum adhibeantur, quemadmodum in Mechanicis videbimus; his quoque aditus, in Geometriam factus. Unde multo amplior evasit speculationum geometricarum campus, qui a Veteribus intra nimis arctos limites coerceretur. Sane inventa longe præclarissima ex Mathesi exularent, si recentiores Geometræ vestigiis, vel Veterum, vel CARTESII, insistere voluissent.

§. 223. Non omnia problemata per rectam & circulum construi posse, inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium inter duas datas, & triseccio anguli docuit; & ex æquationibus algebraicis, ad quas ducunt solutiones problematum, patet ratio. Quemadmodum enim æquationum quadraticarum constructio pendet ab invenienda una linea media proportionali inter duas alias quomodocunque datas; ita constructio cubicarum supponit duas medias continue proportionales.

tionales, constructio biquadraticarum tres inveniendas & ita porro. In æquationibus puris hoc ipsum obviū est; in affectis non minus ostendi potest. Sufficiat nobis in gratiam tyronum id ostendisse in æquationibus puris. Æquatio quadratica pura est $x^2 = ab$. Patet hic esse

$$a : x = x : b$$

adeoque constructurus æquationem invenire debet mediam proportionalem inter a & b .

Æquatio cubica pura est

$$x^3 = a^2 b$$

$$\text{adeoque } x^4 = a^2 b x$$

$$a^2 : x^2 = x^2 : b x$$

$$\text{Sit } b x = y^2$$

$$\text{erit } x : y = y : b$$

$$\& a^2 : x^2 = x^2 : y^2$$

$$a : x = x : y = y : b$$

Igitur a, x, y, b sunt continue proportionales. Æquationem ergo cubicam puram constructurus, invenire debet duas medias continue proportionales inter datas a & b , quarum prima x est radix æquationis cubicæ puræ

Similiter æquatio biquadratica pura est

$$x^4 = a^3 b$$

$$\text{Quare } a^3 : x^3 = x : b$$

$$= x^3 : b x^2$$

$$\text{Sit } b x^2 = y^3$$

$$\text{erit } a^3 : x^3 = x^3 : y^3$$

$$a : x = x : y$$

$$\& x^2 : y^2 = y : b$$

$$= y^2 : b y$$

$$\text{Sit } b y = x^2$$

$$\text{erit } x^2 : y^2 = y^2 : x^2$$

$$x : y = y : x$$

$$\& y : x = x : b$$

Habemus adeo

$$a : x = x : y = y : x : b$$

consequenter a, x, y, x, b sunt continue proportionales; & æquationem biquadraticam puram constructurus, invenire debet tres medias continue proportionales inter duas datas a & b , quarum prima x est radix æquationis. Intersectio rectæ & circuli nonnisi unam exhibet lineam mediam continue proportionalem inter duas. Quamobrem si plures inveniendæ supponuntur, sola rectæ ac circuli intersectione obtineri minime possunt. Hinc duarum inventio deduxit MENECHMUM ad intersectionem duarum parabolarum, quemadmodum vidimus supra (§. 218).

§. 224. Forſan autem non inutile erit, si hic exemplo aliquo ostendamus, quomodo inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium ad æquationes cubicas affectas deducat; ne quæ de extremis quomodocunque datis diximus obscura videantur, nec satis a tyronibus intelligantur. Sit igitur problema tale: Data quatuor quantitatum continue proportionalium prima & differentia quarta a secunda; invenire singulas. Resolutio hæc erit.

$$\text{Sit Quant. I} = a \quad \text{Quant. II} = x$$

$$\text{Differ. II \& IV} = b \quad \text{III} = y$$

$$\text{erit IV} = x - b$$

& per

& per conditionem problematis

$$\frac{a:x=x:y}{x^2=ay} \quad \frac{a:x=y:x-b}{xy=ax-ab}$$

$$\frac{x^2}{a}=y \quad y=\frac{ax-ab}{x}$$

adeoque

$$\frac{x^2}{a}=\frac{ax-ab}{x}$$

$$x^3=ax^2-a^2b$$

$$x^3-ax^2+a^2b=0$$

Videmus itaque constructionem æquationis cubicæ affectæ dependere ab inventione duarum mediarum proportionalium inter duas extremas, quarum prima simpliciter datur, altera autem per differentiam a prima mediarum. Ad constructionem vero sese offerunt æquatio ad parabolam $x^2-ay=0$, & æquatio ad hyperbolam intra asymptotos $xy-ax+ab=0$. Cum vero etiam sit $x:y=y:x-b$ adeoque $y^2=x^2-bx$, consequenter $y^2-x^2+bx=0$; loco hyperbolæ intra asymptotos offert etiam sese hyperbola æquilatera.

Eodem modo ex sequente problemate liquet, quomodo inventio unius mediæ proportionalis ducat ad æquationem quadraticam affectam. Scilicet, data quantitatum continue proportionalium prima & differentia tertiæ a secunda, inveniendæ sit secunda. Sit itaque

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Quantitas I = a Quant. II = x
Differ. II & III = b crit III = $x-b$
adeoque per conditionem problematis

$$\frac{a:x=x:x-b}{x^2=ax-ab}$$

$$x^2=ax-ab$$

$$x^2-ax+ab=0$$

Non sine ratione addimus exemplum æquationis quadraticæ affectæ, propterea quod harum æquationem constructionum reduximus ad inventionem linearum reciprocarum (§. 265 Anal.); ne existiment tyrones veritati consentaneum non esse, quod eadem pendeat ab inventionem mediæ proportionalis inter duas extremas quomodocunque datas. Poterant casus omnes æquationum cubicarum per inventionem duarum, casus vero omnes æquationum biquadraticarum per inventionem trium mediarum continue proportionalium illustrari; siquidem prolixioribus esse licuisset.

§. 225. Doctrina de numeris irrationalibus illustratur problemate 259 (§. 630 Anal.), in quo ostendimus, quomodo numerus irrationalis quicunque per lineam exprimitur; ut intelligatur, cur Veteres quantitates irrationales non in numeris, sed in continuo considerarent, unde oriuntur, adeoque eas ad Geometriam retulerint. Attentionem denique meretur usus constructionis æquationum ad curvas datarum, per combinationem locorum; cum hoc pacto,

pacto, ope curvarum inferioris generis, construi possint curvæ superioris; quemadmodum, ope parabolæ & circuli, construximus parabolam cubicam & circulum secundi generis. Etsi enim hæ constructiones sint molestiores, quam ut in usum recipiantur; sufficit tamen quod per eandem in curvâ, quæ descripta supponitur, quodvis punctum datum ad examen revocari possit, num rite fuerit determinatum; & saltem ex possibilitate constructionis pateat curvæ possibilitas.

§. 226. Satis ostendimus, quomodo in Elementis nostris Analyseos finitorum versari debeat, qui artem hanc intimius perspicere sibi quæ familiarem reddere voluerit; quamvis longe plura annotare poteramus, si singula accuratius perpendenda proponere visum nobis fuisset, nec acquiescere voluissimus in speciminibus, quæ in aliis imitari poterit attentione sufficiente usus. Restat igitur ut doceamus, quomodo in Analyseos infinitorum sit versandum. Initio tyrones non scrupulosiores esse debent in notione quantitatis infinite parvæ expendenda: modo notent eas non in se esse nihilum, sed tantummodo respectu aliarum pro nihilo haberi: quo facit scholion def. 2. (§. 5 *Analys. infin.*). Quod si enim difficultates quædam supersunt, quæ assensum remorantur: eadem in progressu evanescent: tollentur autem penitus, ubi ea perpenderit, quæ in

Metaphysicis de ente infinito Mathematicorum imaginario demonstrantur (§. 796 & seqq. *Ontol.*) Dudum Mathematici ex differentiis quæsiere quadrata & cubos; quemadmodum docuimus in applicatione calculi literalis ad Arithmeticam (§. 81 & seqq. *Anal.*). Inventum hoc ansam dedit LEIBNITIO investigandi methodum ex differentiis colligendi terminos seriei cujuscunque continue crescentis, vel decrescentis; cum ignoraret, id jam in literas fuisse relatum a D. MOUTON, Canonico Lugdunensi, ex observatione FRANCISCI REGNALDI, Lugdunensis; quemadmodum constat ex epistola LEIBNITII ad OLDENBURGIUM scripta, quæ legitur in *Commercio epistolico* D. JOANNIS COLLINS & aliorum de *Analyse promovata*, jussu Societatis Regiæ Britannicæ in lucem edito, p. 32. & seqq. Calculum adeo differentialem primum exercuit in numeris, ubi differentiæ sunt finitæ, seu assignabiles. Cum deinde opus præclarum de *Quadratura circuli & sectionibus conicis* GREGORII A S. VINCENTIO, ab HUGENIO sibi commendatum, legeret, in quo differentialem magnitudinum infinite parvæ considerantur, quarum summæ exhibent ipsas magnitudines; hæc observans in calculum differentialem incidit, de quo hic nobis sermo est; methodo *Cavalieriana*, qua felicissime usus GREGORIUS A S. VINCENTIO, ad calculum perducta. In hoc calculo

tulo omnia pendent a differentiatio-
ne rectanguli xy . Quamobrem ad
eam omnem attentionem afferre de-
bent tyrones; ne in ceteris supersit
ulla difficultas. Etenim si supponas,
quomodo differentiale rectanguli xy
inveniatur; nullo negotio cetera
erues per Algebram communem;
quemadmodum ostendimus tum in
ipso problemate primo *num. II. &*
seqq. tum in problemate secundo at-
que tertio. Constat lineam generari
motu continuo puncti ab uno termi-
no ad alterum, qualis est motus li-
quidi fluentis; unde a NEWTONO
appellatur *Fluxus*. Constat etiam
superficies istiusmodi motu linearum;
solida vero motu superficierum gigni.
Quodsi ergo ad genesis magnitudi-
num animum advertas; per ea, quæ
ab EUCLIDE & ARCHIMEDE
demonstrata sunt (§. 5 *Anal. infin.*),
animadvertes, magnitudines crescere
vel decrescere, per incrementa, vel
decrementa inassignabilia, quæ ipsæ
sunt quantitates infinite parvæ, cum
quibus hic nobis negotium est, a
NEWTONO, ad genesis magnitu-
dinum respiciente, *Fluxiones* ap-
pellatæ; quemadmodum ipsas mag-
nitudines, quæ hoc modo crescunt
vel decrescunt, *Fluentes* vocat. Un-
de quantitatem differentiari, stylo
Newtoniano, est invenire fluentis da-
tæ fluxionem. Ut hæc rectius intel-
ligantur; perpendant velim tyrones,
si recta quædam AB, juxta ductum
alterius rectæ AC, motu sibi semper

parallelo atque æquabili, moveatur
deorsum, dum interca punctum quod-
dam, motu quomodocunque accê-
lerato, in ipsa recta AB, a termino
A versus alterum B, progreditur;
punctum describet lineam curvam
AM, recta vero spatium curvilineum
APM. Quodsi ponamus rectam ex P
pervenire in p adeoque abscissam AP
augeri incremento Pp ; evidens est, eo-
dem quo hoc accidit momento, semi-
ordinatam PM augeri incremento mR ,
arcum AM incremento Mm , & spatium
curvilineum APM incremento $PpmM$.
Arcus adeo AM differt ab arcu Am , ar-
culo Mm ; semiordinata PM a semi-
ordinata pm , particula mR ; spatium cur-
vilineum, sive area APM, ab area
 Apm , particula $PpmM$; dum diffe-
rentia abscissæ AP ab abscissa Ap est
 Pp . Unde, stylo *Leibnitiano*, si in
tempusculo infinite parvo incremen-
tum Pp est inassignabile; hoc ipsum
incrementum Pp dicitur differentiale
abscissæ Ap , mR differentiale semi-
ordinatæ PM, Mm , differentiale arcus
AM, & tandem $PpmM$ differentiale
areæ APM: stylo autem *Newtonia-
no*, Pp abscissæ, mR semiordinatæ,
 Mm arcus, $PpmM$ areæ, fluxio est.
Atque adeo patet, cur calculus dif-
ferentialis seu methodus fluxionum in
Geometria sublimiori tantæ sit utilita-
tis: id quod ex ejus applicatione
clarius elucescet. Incrementa ab-
scissæ Pp generantur motu æquabili;
adeoque æquali tempore, sive tem-
pusculo, æqualia sunt: at cum in-
cremen-

crementa semiordinatæ mR eodem tempusculo generentur motu inæquali; & incrementa lineæ curvæ sive arcus Mm , atque areæ $PpmM$, motu mixto ex æquali & inæquali, singula inæqualia esse debent. Unde liquet in hoc calculo magnitudinis unius incrementum sumi ut æquale, dum reliqua inæqualia sunt, quæ simul generantur. Non autem necesse est, ut abscissa ponatur crescere per incrementa æqualia; sed sumi etiam possunt momentanea incrementa magnitudinis alterius tanquam æqualia, quo casu abscissa crescit per inæqualia incrementa. Ponamus enim rectam AC æqualiter moveri, motu sibi semper parallelo, juxta ductum rectæ AB ; dum interea punctum motu continuo accelerato in illa descendit; patet incrementa Qq , sive Rm , eodem tempusculo æqualia esse debere; dum interea incrementa Sm , sive Pp , inæqualia gignuntur. Hactenus dicta qui perpendit, is non modo animadvertet calculum differentialem niti methodo genetica, & rigorem acquirere ex demonstratis ab EUCLIDE & ARCHIMEDE (§. 5. *Anal. infin.*); verum etiam, in applicatione hujus calculi ad Geometriam sublimiorem, nihil deprehendet obscuritatis.

§. 227. Ope calculi differentialis, tangentes curvarum facillime determinantur; hancque methodum, non modo ad omnes curvas algebraicas extendi patet ex formula generali,

quam dedimus (§. 32 *Anal. infin.*), verum etiam eandem ad alias curvas, quæ mechanicæ non sunt, applicari posse, exemplo spiraliū, cycloidis, logarithmicæ & quadratricis DINOSTRATIS docuimus. Non opus hic est perplexis longisque calculis; nec methodum hanc irrationales quantitates remorantur; ut adeo nihil in eadem desiderari possit. Tota nititur ratione differentialium semiordinatæ ac abscissæ, quæ sunt inter se in ratione semiordinatæ ad subtangente, quemadmodum in resolutione probl. 4 (§. 20 *Anal. infin.*) demonstravimus. Quoniam enim quantitibus proportionalibus infinite parvis substitui possunt aliæ finitæ; valor subtangente, qua tangens determinatur, ex quantitibus assignabilibus componitur. Artificio hoc usus est BARROWIUS in sua Tangentium methodo: quod ut appareat, exemplo parabolæ *Apoloniana* perfacili docere lubet. Sit ^{Tab. III. Fig. 3b.} $QN=y$, $AQ=x$, $PT=t$. Sit semiordinata alia PM , & ei respondens abscissa AP , differentia earundem semiordinatarum adeo exigua, quantum desideratur, & differentia abscissarum MR exiguæ parvitat. Sit $PQ=MR=e$, $NR=a$; erit $PM=y-a$, $AP=x-e$. Si parameter parabolæ fuerit p ; habebimus

$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$

$$\& \quad y^2 = px$$

$$\text{adeoque } -2ay + a^2 = -ep$$

$$2ay = ep, \text{ ob } a^2 = 0$$

Est

$$\begin{aligned} \text{Est vero } e : a &= t : y \\ &\& e : a &= 2y : p \end{aligned}$$

$$\text{adeoque } t : y = 2y : p$$

$$t = 2y^2 : p$$

Nemo non videt, si pro a substituas dy , & pro e ponas dx ; prodire

$$2ydy = p dx \text{ \& } t = \frac{ydy}{dx}. \text{ Unde resul-}$$

$$\text{tat } t = \frac{2y^2}{p} : \text{Methodus itaque Bar-}$$

rowiana tangentium a præfenti, quam proponimus, non differt; & calculus, quo utitur BARROWIUS, non differt a calculo differentiali, nisi característica. Hæc sane ratio est, cur JACOBUS BERNOULLI primum existimaret calculum differentialem LEIBNITII non differre a *Barrowiano*; & DN. DE TSCHIRNHAUSEN contenderet, calculum differentialem *Barrowiano* ortum suum debere; præsertim cum LEIBNITIUS, ubi eundem in Actis Eruditorum primum publicavit, non nisi ad methodum de maximis & minimis, quæ specialis casus est methodi tangentium, applicaret. Enimvero cum usus calculi differentialis in problematis magis arduis solvendis conspiceretur; aliter de eodem sentire cœperunt Geometræ, ipse etiam HUGENIUS, qui sibi persuadebat, aliis methodis detecta tantummodo aliter exprimi hoc calculo.

Tab. III. §. 228. Methodus *Barrowiana*
Pg. 35. nititur artificijs CARTESII in deter-

minanda tangente curvarum, & principiis Geometriæ indivisibilium CAVALLERII, atque Algebræ ordinariæ. Etenim si curva AMNO secatur recta TO, erit NR. MR=PM: TP, quemadmodum demonstravimus in resolutione probl. 4. (§. 20). Quamobrem si sit NR=a, MR=e, PM=y, TP=t; crit $a : e = y : t$, & ex. gr. ex natura parabolæ, cujus parameter p ,

$$\begin{aligned} y^2 &= px \\ y^2 - 2ay + a^2 &= px - ep \end{aligned}$$

$$- 2ay + a^2 = 0 - ep$$

Quodsi semiordinatæ PM & QN continuo propius ad se invicem accedant, ut differentię semiordinatarum NR & abscissarum MR, sive PQ, tandem degenerent in partes infinite parvas, seu momentanea incrementa; recta MN degenerat in arcum cognominem, TN degenerat in tangentem & TP in subtangentem. Tum vero ex principiis Geometriæ indivisibilium $a^2 = 0$ respectu $2ay$, & ep ; & $y - a$ atque y habentur pro æqualibus in contactu. Unde habemus:

$$- 2ay = - ep$$

$$\text{seu } 2ay = ep$$

$$\& a : e = (y : t) p : 2y$$

quemadmodum ante (§. 227).

Ad methodum *Barrowianam* si applicatur vera característica infinitesimalum, seu quantitarum infinite parvarum, sine qua algorithmus infinitesimalis non subsistit, qui est ipse sic dictus calculus differentialis;

prodit methodus tangentium, quam hic applicamus. Ope autem hujus calculi, non modo expedita redditur, verum etiam extenditur, ut ultimum suum complementum ab eodem accepisse dicenda sit. Obiter hic annotamus, quando quæstio est de inventore calculi differentialis, id potissimum quæri, quinam primus Algorithmum quantitatum infinite parvarum invenerit, & in solvendis problematis exercuerit; cum antea adhiberetur calculus literalis communis, & vi principiorum Geometriæ indivisibilium, termini quidam expungerentur respectu ceterorum evanescentes. Similis quodammodo est hæc quæstio alteri communi, qua quæritur, quinam sit inventor veræ characteristicæ numerorum & Algorithmi communis, quo hodie utimur in Arithmetica, tanta calculi commoditate & amplitudine. Habuere Veteres numerorum signa, sed parum apta. Usi iisdem sunt in Arithmetica practica. Non tamen ideo dici potest, quod habuerint veram numerorum characteristicam, & Arithmeticam practicam talem, qualem nunc habemus; nec quisquam hodie inventis notis numericis, quorum significatus ex ipsa numerorum natura deductus, aliis quam hisce signis uti vult: quemadmodum nec hodie inventa vera characteristica quantitatum infinite parvarum, qua calculus infinitesimalis in Analysin introductus, ut per modum Algorithmi exerceri

possit, quisquam calculum literalem communem adhibere mavult in solvendis problematis, quorum solutio a quantitativis infinite parvis pendet. Equidem ex ore ipsius Dn. DE TSCHIRNHAUSEN hausi, quod contenderet, se per Algebram communem eadem præstare posse, quæ per calculum differentialem adeo feliciter eruantur; nec calculum hunc esse veram methodum, sed tantummodo veræ methodi compendium; qualia complura, immo, ut ipse confidenter admodum loquebatur, infinita excogitari possint, hocque sese ostensurum in secunda parte Medicinæ Mentis; nunquam tamen didis fidem fecit, quin potius morti vicinus Schedas suas Manuscriptas Vulcano tradidit, ne publicum statueret, quo successu in vera, quam pollicebatur, methodo detegenda fuerit versatus, & quousque fuerit progressus. Constat autem ex iis, quæ dedit in Actis Eruditorum, quod nimia in se ipsum confidentia de iis, quæ animo versabatur, locutus fuerit, quasi a se jam essent inventa; etsi re penitus examinata impossibilia deprehenderentur. Ostendi in Arithmetica, calculum numerosum institui posse, ut conservetur universalitas, quemadmodum in literali, & hoc pacto inveniri per calculum numerosum, quæ per literalem eruantur. Ostendi superius, quomodo Algebra numerosa ad solvenda problemata geometricæ applicari possit, ut prodeant formulæ algebraicæ geometricæ

metricæ construendæ (§. 194). Immo ostendi, quomodo, retenta communi linearum designatione, regulæ Algebræ ad solutiones problematum geometricorum applicari potuerint (§. cit.). Ecquis vero dixerit, si quis hoc fecisset, ante inventam Arithmetica litteralem, eum jam habuisse Algorithmum universalem & Algebram speciosam? Immo si hanc methodum ad tractandas curvas adhibuisset; ecquis dixerit, eum habuisse methodum CARTESII tractandi curvas per æquationes algebraicas? Habuisset similem quandam methodum, sed non eandem; ut adeo in multis paria præstare potuisset, ast non eadem facilitate. Ars characteristica differt a methodo, & pro illius diversitate, hæc prorsus aliam induit formam; ita ut non modo facilius præstentur, quæ fieri debent, verum etiam plura in potestate sint, quam si alia characteristica adhiberetur. Patebunt hæc clarius, ubi Ars inveniendi ad formam artis fuerit redacta, quemadmodum Logica; & qui ad diversitatem methodorum, prouti hæ per Artem characteristicam modificantur, animum adverterit, prouti in hac commentatione inculcamus, eadem perspiciet. Talia autem observasse non tantum proderit ei, qui Artem inveniendi ad formam artis reducere voluerit; sed etiam ei, qui in Mathesi addiscenda ad tertium cognitionis gradum adspirat; ut methodos, quæ ipsi innotuerunt, limare,

iisdemque omnem suam amplitudinem tribuere possit, quam suscipere valent; ne a casu expectandum sit, quod artis est, usu facultatum huic requisito non occasione sponte oblata, sed ex scientia determinato; nec tentaminibus subjiçatur, quod certa lege regitur. Nihil hic asserimus, quod non obvium sit ei, qui in Mathesi addiscenda præscripto a nobis modo fuerit versatus. Multa hic annotare poteramus, siquidem prolixioribus esse liceret, nec a præsentis instituto digressio longior videretur aliena.

§. 229. Notandum vero est, formulas algebraicas, quæ pro subtangente prodeunt, geometricæ esse construendas, siquidem tangentem curvæ actu ducere volueris. Omitimus istas constructiones, brevitatis gratia; propterea quod in Analysis finitorum satis perspicue docuimus, quomodo istiusmodi formulæ construantur. Tyronibus tamen, quorum est exercere artem, eadem negligendæ non sunt. Ex. gr. subtangens ellipsis est $\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$ (§. 25 Anal. infin.). Est itaque

$$\frac{1}{2}a - x : a - x :: x : PT$$

$$h. e. PC : PB = AP : PT$$

Quodsi ergo fiat $PQ = PC$ & $PR = PB$, ductæque rectæ AQ agatur parallela TR ; erit

$$PQ : PR = AP : PT$$

$$h. e. PC : PB = AP : PT$$

adeo

Tab. III.
Fig. 36.

adeoque subtangens PT rite determinata, consequenter TM tangens quæsitæ.

Quoniam subtangens pro omnibus ellipibus in infinitum

$$\frac{(m+n)(ax-x^2)}{ma-mx-nx} = \frac{ax-x^2}{ma:(m+n)-x}$$

habemus:

$$\frac{ma}{m+n} - x : a - x = x : PT$$

Patet itaque non absimili modo tangentem pro omnibus ellipsis in infinitum determinari posse. Et quia pro circulo eadem subtangentis formula reperitur, quæ pro ellipsi *Apolloniana*; & pro infinitis circulis eadem formula, quæ pro ellipsis infinitis; nisi quod isthic $n=1$; eodem etiam modo tangens omnium circulorum in infinitum determinatur. Immo cum formula subtangentis hyperbolarum a formula subtangentis ellipseos non differat nisi signis; tangens etiam hyperbolarum in infinitum non absimili modo determinatur. Subtangens curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$, est

$$\frac{3y^3 - axy}{3x^2 + ay} = \frac{y^3 - \frac{1}{3}axy}{x^2 + \frac{1}{3}ay}.$$

Habemus itaque

$$x^2 + \frac{1}{3}ay : y^2 - \frac{1}{3}ax = y : PT$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x = y : PT$$

Tab. III. Quantitates $\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$ & $\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$ concinna
Fig. 37.

admodum constructione reperiuntur

hunc in modum. Fiat $CA = \frac{2}{3}a$; sitque $AP = x$, $PM = y$. Erigatur in A perpendicularis AN ipsi PM æqualis, seu construatur parallelogrammum rectangulum APMN. Ducta recta CN erigatur ad eandem perpendicularis NR. Erit $PR = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$.

Est enim

$$CA : AN = AN : AR$$

$$\frac{2}{3}a : y = y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } PR = AR - AP = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x.$$

Fiat porro $AO = CA$, ductaque OP erigatur PS ad eandem perpendicularis occurrens ipsi NA ultra rectam

CP continuatæ in S. Erit $NS = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$. Est enim $AO : AP = AP : AS$

$$\frac{1}{3}a : x = x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } NS = SA + AN = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y.$$

Quodsi curva supponatur data seu in plano descripta, datis jam NS & PR subtangens nullo negotio determinatur.

§. 230. Quoniam normalis ad tangentem perpendicularis; tangens quoque determinatur per normalem; consequenter etiam per subnormalem, per quam normalis determinatur. Subinde subnormalis per constructionem faciliorem reperitur; adeoque præstat tangentem determinare

minare per normalem, quam per subtangentem. Exemplum habemus in circulo, ubi radius ad tangentem perpendicularis; quemadmodum per præsentem quoque methodum calculo eruitur (§. 38 *Anal. infin.*); vi cuius subnormalis reperitur distantia semioridinata a centro æqualis; adeoque datur, data abscissa, cum subtangens eandem requirat constructionem, quam Ellipsis exigit (§. 229). Enimvero subinde etiam subnormalis postulat constructionem magis compositam quam subtangens; subinde utraque eadem simplicitate gaudet. Illius exemplum præbet ellipsis; hujus vero curva, ad quam est æquatio $y^3 - x^3 = axy$. Etenim in Ellipsi est (§. 40 *Anal. infin.*).

$$ax - x^2 : y^2 = \frac{1}{2}a - x : PH$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}a - x : PH$$

Fiat itaque $AQ = PM = y$, & in Q erigatur perpendicularis QN rectæ per A & M ductæ in N occurrens; erit $QN = \frac{y^2}{x}$.

Est enim

$$AP : PM = AQ : QN$$

$$x : y = y : \frac{y^2}{x}$$

Continuetur PM in O, donec PO = QN, & ex centro C ducatur recta RC ipsi OB parallela, erit PR subnormali æqualis. Est enim

$$PB : PO = PC : PR$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}a - x : PR$$

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Quare si fiat $PH = PR$, habebis subnormalem, eritque HM normalis quaesita. Hanc constructionem si cum ea conferre volueris, quam pro subtangente dedimus (§. 229); patebit eam esse magis compositam. Subnormalis curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$ reperitur

$$= \frac{x'y + \frac{1}{2}ay^2}{y^2 - \frac{1}{2}ax}$$

Habemus itaque

$$y^2 - \frac{1}{2}ax : x^2 + \frac{1}{2}ay = y : PH$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}a} - x : \frac{x^2}{\frac{1}{2}a} + y = y : PH$$

Analogia hæc ab altera, quam pro subtangente eliciimus (§. 229), non differt, nisi quod termini in ratione priori invertantur; consequenter constructio eadem fere manet, nec simplicior est pro subnormali, quam pro subtangente.

§. 231. Methodus determinandi asymptotos curvarum nititur principio reductionis. Asymptoti enim considerantur instar tangentium in puncto a vertice infinito intervallo distante, ut abscissa eidem respondens sit infinita; consequenter axis a habeat ad eandem rationem inassignabilem; adeoque fiat respectively nihilum. Hanc suppositionem a veritate non recedere, tyrones inde intelligunt, quod in hac hypothese errantur eadem quantitates linearum, per quas asymptoti determinantur, quas supra in Analyfi finitorum aliter demonstravimus. Novarum enim me-

P p

thodo-

rhodorum examina haberi debent, si applicentur ad jam nota. Ceterum attendant tyrones ad differentiam, quæ inter absolute nihilum, seu nihilum verum, & inter respectivé nihilum, seu quod respectu quantitatis alterius pro nihilo habetur, intercedit. Etenim si qua quantitas per absolute nihilum multiplicatur, nihilum æqualis est: sed quæ ducitur in respectivé nihilum non evadit nihilum æqualis. Hinc (§. 47 *Anal. infin.*) in valore ax : ($a+2x$), recta a non quidem auget valorem rectæ $2x$, ut adeo sit $a+2x=2x$; attamen non efficit ax nihilum æquale; sed hoc factum spectatur tanquam quantitas a infinites sumta, quia a quantitas finita, x infinita. Idem patet in æquatione $ay^2=bx(a+x)$, quæ, quia a respectivé nihilum, reducitur ad æquationem $ay^2=bx^2$. Unde simul liquet, si sumatur $ay^2=abx+bx^2$, cur infinitum primi gradus abx habeatur pro nihilo, respectu infiniti secundi gradus ay^2 & bx^2 ; quippe quod infinitum primi gradus infinites superat, quemadmodum infinitum primi gradus quantitatem finitam. Non nego, hæc in numerum fictionum referenda esse; sunt tamen toleranter vera, ut cum JUNGIO loquamur, & in calculo, quemadmodum fictiones aliæ, utiliter adhibentur. Cavendum itaque, ne in præjudicium veritatis talia in Physicam inferantur principia, ex qua imaginaria exulare debent; quippe ubi in veras phenomenon causas inquirimus.

§. 232. Attentionem quoque peculiarem meretur problema 7 (§. 49 *Anal. infin.*) in quo subtangens & subnormalis in conchoide determinatur. Curva hæc ex numero algebraicarum est: unde semiordinatæ ejus sumi possunt ad axem AB normales. Habet vero eadem etiam ^{Tab. I. Anal. infin. Fig. 5.} polum C: unde pro semiordinatis quoque haberi possunt rectæ CM ex polo C ad punctum curvæ M ductæ. Quamobrem duplicem explicamus methodum determinandi ejus tangentem & normalem. Prima eadem est, qua utimur in curvis algebraicis ceteris; nisi quod valor ipsius dx non ex æquatione ad curvam, sed aliis artificiis eruatur; ne formulæ pro subtangente & subnormali prodeant nimis perplexæ, constructionem minus concinnam parientes. Formula autem pro subnormali expeditior est, quam pro subtangente, adeoque in constructione præferenda. Cum enim sit subnormalis = t

$$+ \frac{z^2 - az}{v} = t + \frac{(z-a)z}{v}; \text{ crit}$$

$$v : z = z - a : \frac{z^2 - az}{v}$$

$$PB : MC = QC : \frac{z^2 - az}{v}$$

cui si addatur $PC = t$; prodibit subnormalis. Formula subtangentis

$$\frac{v(z^2 - t^2)}{z^2 - az + tv} = \frac{z^2 - t^2}{\frac{z^2 - az}{v} + t}$$

resolv.

resolvitur in hanc analogiam :

$$\frac{z^2 - az}{v} + t : z + t = z - t : PT$$

Atque adeo patet, si formula subtangens construenda, ante invenientiam esse subnormalem. Data autem subnormali, datur etiam tangens, ut adeo ulteriori constructione non habeamus opus. Altera methodus nititur hypothesi semiordinatarum in puncto quodam concurrentium, quam ideo addere visum est, ut idea ejus animo ingeneretur ad alia profutura.

§. 233. Notanda vero sunt artificia, quibus subtangens determinatur in iis curvis, quarum semiordinata in puncto quodam coeunt. Nimirum quia, in curvis algebraicis, subtangens intercipitur inter tangentem & semiordinatam; in puncto communi concursus excitatur perpendicularis, tangentem, cui occurrat, secans, quemadmodum videre est in methodo altera pro conchoide & in methodo pro spiralibus. In cycloide subtangens determinatur per intersectionem tangentis cycloidis & tangentis circuli genitoris; quia portio illa tangentis intercipitur inter semiordinatam & tangentem cycloidis, etsi ad illam non sit perpendicularis; ut adeo hic a significato termini tantisper recedatur, quem in curvis algebraicis habet, quemadmodum etiam non retinetur significatus prorsus idem semiordinate, ubi eadem in

puncto quodam concurrent. Nimirum definitiones terminorum inventæ sunt pro curvis algebraicis; deinceps per analogiam quandam aptantur ad curvas alias termini, ut in iisdem proprias sibi nanciscantur definitiones. Absit itaque, ut tibi persuadeas, ipsos Geometras alere significatum terminorum vagum. Ita subtangentem cycloidis definire licet per portionem tangentis circuli, in puncto intersectionis circuli & semiordinate cycloidis, inter semiordinatam & tangentem cycloidis interceptam; & cum definitiones nominales sint arbitrariæ, utique hoc facere licet. Nec ideo dicere licet; quod vocabulum *Subtangens* varios habeat significatus. Subtangens enim cycloidis non est subtangens curvarum simpliciter ita dicta. In quadratrice *DINOSTRATIS*, abscissa sumitur in circulo genitore, & portio radii quadratricem secantis pro semiordinata. Quoniam hic recta ad semiordinatam perpendicularis cum tangente in puncto contactus concurrat, quæ adeo extra ipsum eam non secat, ideo necessarium fuit, ut eo, quem explicavimus (§. 55 *Anal. infin.*) modo determinaretur. Ad hoc animum probe advertere debent tyrones, ne notione subtangentis confundantur, ubi ipsimet tangentes in curvis non algebraicis determinare voluerint.

§. 234. Methodus de maximis & minimis nititur principio reductionis: maximæ enim & minimæ applicatæ

reducuntur ad casum tangentium. Et similiter applicatio hujus methodi ad problemata particularia eodem principio nititur; quatenus quantitarum series ad certum quendam terminum continuo crescentium vel decrecentium, deinceps rursus decrecentium vel crescentium exponitur per semiordinatas curvæ cujusdam algebraicæ, in qua semiordinatæ eandem constantem relationem habent ad abscissas, quæ convenit quantitatibus crescentibus vel decrecentibus. Ex. gr. Si linea recta ita secanda, ut rectangulum ex segmentis sit maximum eorum, quæ hac ratione construï possunt; constans relatio quantitatis continuo crescentis usque ad terminum maximum exprimitur per factum segmentorum in se invicem. Quamobrem si segmentum minus sumas pro abscissa; problema hoc reducitur ad circulum, in quo maxima semiordinata determinanda.

Tab.III.
Fig. 32.
§. 235. Ut ideam calculi summatorii, qui vulgo integralis dicitur, animo concipiant tyrones; repetendum est ex superioribus, magnitudines crescere per momentanea incrementa. Nimirum si tempusculo quodam abscissa augetur incremento Pp , semiordinatæ accedit incrementum mR , arcui incrementum Mm & areæ incrementum $PpmM$. Unde si abscissa $AP = x$, constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis successivis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dx , ita ut

summa omnium dx sive $\int dx = x$; Similiter semiordinata $PM = y$ constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dy , ita ut summa omnium dy sive $\int dy = y$; Arcus $AM = v$ constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis, quorum unumquodque dv , ita ut $\int dv = v$; & area APM constare concipitur ex innumeris istiusmodi areolis, quarum unaquæque, quemadmodum ostendimus, exprimitur per ydy , ita ut summa omnium istarum areolarum sive $\int ydy$ sit areæ æqualis. Calculo adeo summatorio quæritur summa omnium incrementorum momentaneorum, ut habeatur magnitudo, cujus incrementum indefinite datur. Quamobrem si valor incrementi exprinatur per relationem, quam habet semiordinata ad abscissam; per summationem reperitur valor semiordinatæ, arcus, & areæ curvæ datæ. Ex. gr. in parabola $dy = \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx$. Quare $\int \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx = a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$ est semiordinata parabolæ. Similiter in circulo $dy = \frac{1}{2} (a - 2x) dx (ax - x^2)^{-1:2}$. Quare $\int \frac{1}{2} (a - 2x) (ax - x^2)^{-1:2} dx = (ax - x^2)^{1:2} = \sqrt{ax - x^2}$ est semiordinata circuli. Et in hyperbola intra asymptotos $dy = ax^{-2} dx$. Qua-

re $ax^{-1} = \frac{a}{x}$ est semiordinata hy-

perbolæ intra asymptotos. Patet adeo per calculum summatorium restitui quantitatem variabilem, cujus differentia

rentiatione prodiit magnitudinis elementum, seu momentaneum in ejus generis incrementum. Unde Angli methodum fluxionum inverſam vocant, quia ex data fluxione reperitur fluens, quemadmodum per directam ex fluente fluxio. Regreſſus autem iſte non ubivis obviuſ eſt. Unde hodiernum Mathematicorum ingenia exercet. Conſtabit autem ex problematis phyſico-mechanicis, qualia exempli loco in Mechanica dabimus, ſolutiones problematum ſæpe nos deducere ad æquationes differentiales, quarum integratione detegitur natura curvæ; vel, ubi hoc fieri nequit, ope æquationum differentialium curvæ conſtruuntur. Ope igitur hujus calculi multa in poteſtate ſunt; ad quæ alias non pateret aditus. Ceterum tyrones ad exemplum trianguli, quod primo loco (§. 101 *Anal. infin.*) exhibuimus, animum probe attendant; ut non modo idea methodi quadrandi curvas in eodem naſcatur, verum etiam dubium evaneſcat, quaſi ex neglectu trianguli characteriſtici oriri debeat in ſummatione error aſignabilis: quod ubi fieret, impoſſibile erat, ut prodiret area trianguli tanta, quantam eſſe debere demonſtratur in Elementis Geometriæ. Præſtantia autem hujus calculi inde eluſcit, quod paucis lineis non modo exhibeatur quadratura parabolæ *Apolloniæ*, ſed & omnium parabolæ, & curvarum ipsis agnatarum in infinitum; cum methodo *Ar-*

chimedæ difficillime eruatur tantummodo prior.

§. 236. Cum nobis propoſuerimus exemplis potius docere regulas, quam earum multitudine obruere memoriam tyronum, præceptis omnibus in unum locum congeſtis, antequam ad exempla accedatur; quæ de quantitate in ſummatione adjicienda tenenda ſunt, exemplo quadraturæ ſegmenti parabolici inculcare libuit (§. 107 *Anal. infin.*): ita enim ratio, cur adjicienda veniat, clariuſ percipitur, maniſeſtior in caſu particulari, quam ſi generalis detur. Ratio nimirum generalis eſt, quod in differentiatione, cum differentiale quantitatum conſtantium ſit $= 0$; quantitates conſtantes in compoſita variabilibus adjectæ evaneſcant; ita ut idem ſit differentiale quantitatum $x + a$ atque x , & quantitatum $x - a$ atque x . Eſt enim & $d(x + a) = dx$; & $d(x - a) = dx$ & differentiale ipsis $x = dx$. Unde in ſummatione, ſummæ adjiciendum, quod in differentiatione evanuit. Quomodo vero appareat, utrum aliqua quantitas conſtans ſit adjicienda, nec ne; & nam ea, quæ adjicienda venit, ſignum habere debeat poſitivum, an privativum; in exemplo particulari multo clariuſ elucet, quam ſi idem generaliter doceri deberet. Vidimus in doctrina de locis geometricis, Tab. III. Fig. 22. initium abſciſſæ non modo ſtatui poſſe in vertice A, ubi cum abſciſſa evaneſcit etiam ſemiordinata,

evanescit arcus, evanescit spatium curvilineum, abscissa, semiordinata, & arcu contentum; verum etiam in puncto L infra verticem, vel in puncto N ultra eundem. Per hoc ipsum vero non variatur elementum abscissæ Pp , quod in omni casu idem est. Ne igitur in summatione obscurum sit, quod de quantitate adjicienda hic præcipitur; probe perpendant velim tyrones, quæ in scholio (§. 108 *Anal. infin.*) habentur. Inventores talia non animadvertent, nisi ubi animum ad solutionem particularium applicarunt; neque enim methodi repertæ sunt, nisi dum solutiones problematum tentatæ ad eandem deduxerunt inventores. Quamobrem qui Analyfi, tertii cognitionis gradus acquirendi gratia, operam navat, eadem via incedere debet, quam calcarunt Inventores; utut evitentur avia, in quæ haud raro inciderunt, cum in terris adhuc incognitis versarentur, antequam in viam regiam pervenirent. Ea quoque de causa, non dedimus nisi particularium problematum solutiones; etsi facillimum fuisset generales huc transcribere. Neque enim existimandum est, generales solutiones fuisse particularibus priores; sed illæ potius ex his enatæ sunt. Plerumque majoris artis est solvere problemata in casu particulari, quam universaliter.

§. 237. Quadraturam parabolarum omnium, immo curvarum aliarum eisdem agnatarum in infinitum,

nullo negotio dari per calculum integram patet (§. 103, 105 *Anal. infin.*). Curvæ autem ceteræ, quas deinceps quadramus, tum etiam segmenta parabolica, quæ quadrantur, reducuntur ad parabolas; sive elementum per se non integrabile, juxta canones generales, reducat ad integrabile, terminis finitis aut nonnisi uno constans; sive resolvatur in feriem infinitam, quæ terminos numero infinitos habet. Etenim in casu priore, area curvæ reducitur ad areas tot parabolarum, quot sunt termini; in casu posteriori autem ad areas parabolarum infinitarum; quemadmodum, in Geometria elementari, figurarum rectilinearum, & ipsius circuli area reducuntur ad areas triangulorum. Ex. gr. ubi segmentum parabolicum, cujus elementum est $dx \sqrt{ab+ax}$ quadrare jubemur, $dx \sqrt{ab+ax}$ reducimus ad $2v^2 dv : a$. Quodsi dv sumatur pro differentiali abscissæ & v pro abscissa, erit $\frac{2v^2}{a} = z$,

adeoque $v^2 = \frac{1}{2}az$. Unde liquet segmentum parabolicum quadrantum reduci ad parabolam externam, cujus parameter est $\frac{1}{2}a$, seu dimidio parametri parabolæ æqualis, cujus segmentum quadrantum. Similiter patet aream curvæ CARTESII (§. 111 *Anal. infin.*) esse differentiam arearum parabolæ externæ *Apolloniæ*, ad quam $x^2 = bz$, & parabolæ externæ secundi generis, ad quam $x^3 = b^2v$. Non absimili modo patet, in elemen-

elemento hyperbolæ intra asymptotos $dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx$ &c. in termino primo semiordinatam esse $= 1$, in secundo $= x$, in tertio, si $1 = a$, esse $x^2 = ay$, in quarto $x^3 = a^2y$, in quinto $x^4 = a^3y$ &c. consequenter terminum primum esse elementum parallelogrammi rectanguli, secundum elementum trianguli æquicruri, tertium parabolæ externæ *Apollonianæ* seu primi generis, quartum elementum parabolæ externæ secundi generis, quintum elementum parabolæ externæ tertii generis & ita porro in infinitum. Quadratura igitur hyperbolæ reducitur ad quadraturam parallelogrammi rectanguli, trianguli æquicruri & infinitarum parabolarum. Inde est quod hyperbolæ & circuli quadraturam per infinitas parabolas demonstraverit GUIDO GRANDUS. Equidem, data hyperbolæ area intra asymptotos, datur etiam area interna inter axem & curvam interjacens; placuit tamen (§. 123 *Anal. infin.*) etiam ostendere, quomodo area interna quadratur. Enimvero patet quadraturam areæ intra asymptotos esse simpliciore[m] quadratura internæ; in qua \sqrt{ax} du-cenda est in seriem infinitam.

§. 238. Exemplo circuli docuimus (§. 124 *Anal. infin.*) quadraturam non uno modo absolvi posse. Quædravimus enim circulum, ex dato sinu verso, ex dato sinu complementi, & ex tangente. Notanda hic sunt

artificia, quibus progressus terminorum in infinitum redditur conspicuus: id quod inprimis ostendimus in quadratura *Newtoniana*. Artificia etsi eadem sint, quibus jam in *Analysi infinitorum* usi sumus; scilicet ut in numeris conservetur universalitas calculi, & ut terminus sequens efficiatur dependens ab antecedente; applicatio tamen eorundem non statim cuivis succurrit. Unde memini quosdam seriem *Leibnitianam*, aut, si mavis, *Gregorianam*, pro circulo prætulisse *Newtonianam*; quæ tamen citius convergit, seu celerius appropinquat; quod illa constantem servet legem, in hac vero termini nulla certa lege progrediantur; etsi *Newtoniana* non modo manifestam legem admittat, qua termini in infinitum progrediuntur, verum etiam hoc habeat, ut terminus quilibet sequens ex proxime antecedente inveniri possit. Id potius attentionem tyronum meretur, quod quadratura *Newtoniana* exhibeat quadraturam segmentorum circuli, *Leibnitiana* vero quadriaturam sectorum; atque adeo hæc infinituet ideam quadriandi sectores curvarum, quæ centrum habent, animo jam obversata ARCHIMEDI, dum circuli aream ad aream trianguli reduxit; quemadmodum clarissime docuit KEPLERUS in *Stereometria dolii Austriaci*. Notandum porro est, quod docuit LEIBNITIUS in *Actis Eruditorum* An. 1682, p. 45, cum termini $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \frac{1}{104}, \frac{1}{105}, \frac{1}{106}, \frac{1}{107}, \frac{1}{108}, \frac{1}{109}, \frac{1}{110}, \frac{1}{111}, \frac{1}{112}, \frac{1}{113}, \frac{1}{114}, \frac{1}{115}, \frac{1}{116}, \frac{1}{117}, \frac{1}{118}, \frac{1}{119}, \frac{1}{120}, \frac{1}{121}, \frac{1}{122}, \frac{1}{123}, \frac{1}{124}, \frac{1}{125}, \frac{1}{126}, \frac{1}{127}, \frac{1}{128}, \frac{1}{129}, \frac{1}{130}, \frac{1}{131}, \frac{1}{132}, \frac{1}{133}, \frac{1}{134}, \frac{1}{135}, \frac{1}{136}, \frac{1}{137}, \frac{1}{138}, \frac{1}{139}, \frac{1}{140}, \frac{1}{141}, \frac{1}{142}, \frac{1}{143}, \frac{1}{144}, \frac{1}{145}, \frac{1}{146}, \frac{1}{147}, \frac{1}{148}, \frac{1}{149}, \frac{1}{150}, \frac{1}{151}, \frac{1}{152}, \frac{1}{153}, \frac{1}{154}, \frac{1}{155}, \frac{1}{156}, \frac{1}{157}, \frac{1}{158}, \frac{1}{159}, \frac{1}{160}, \frac{1}{161}, \frac{1}{162}, \frac{1}{163}, \frac{1}{164}, \frac{1}{165}, \frac{1}{166}, \frac{1}{167}, \frac{1}{168}, \frac{1}{169}, \frac{1}{170}, \frac{1}{171}, \frac{1}{172}, \frac{1}{173}, \frac{1}{174}, \frac{1}{175}, \frac{1}{176}, \frac{1}{177}, \frac{1}{178}, \frac{1}{179}, \frac{1}{180}, \frac{1}{181}, \frac{1}{182}, \frac{1}{183}, \frac{1}{184}, \frac{1}{185}, \frac{1}{186}, \frac{1}{187}, \frac{1}{188}, \frac{1}{189}, \frac{1}{190}, \frac{1}{191}, \frac{1}{192}, \frac{1}{193}, \frac{1}{194}, \frac{1}{195}, \frac{1}{196}, \frac{1}{197}, \frac{1}{198}, \frac{1}{199}, \frac{1}{200}, \frac{1}{201}, \frac{1}{202}, \frac{1}{203}, \frac{1}{204}, \frac{1}{205}, \frac{1}{206}, \frac{1}{207}, \frac{1}{208}, \frac{1}{209}, \frac{1}{210}, \frac{1}{211}, \frac{1}{212}, \frac{1}{213}, \frac{1}{214}, \frac{1}{215}, \frac{1}{216}, \frac{1}{217}, \frac{1}{218}, \frac{1}{219}, \frac{1}{220}, \frac{1}{221}, \frac{1}{222}, \frac{1}{223}, \frac{1}{224}, \frac{1}{225}, \frac{1}{226}, \frac{1}{227}, \frac{1}{228}, \frac{1}{229}, \frac{1}{230}, \frac{1}{231}, \frac{1}{232}, \frac{1}{233}, \frac{1}{234}, \frac{1}{235}, \frac{1}{236}, \frac{1}{237}, \frac{1}{238}, \frac{1}{239}, \frac{1}{240}, \frac{1}{241}, \frac{1}{242}, \frac{1}{243}, \frac{1}{244}, \frac{1}{245}, \frac{1}{246}, \frac{1}{247}, \frac{1}{248}, \frac{1}{249}, \frac{1}{250}, \frac{1}{251}, \frac{1}{252}, \frac{1}{253}, \frac{1}{254}, \frac{1}{255}, \frac{1}{256}, \frac{1}{257}, \frac{1}{258}, \frac{1}{259}, \frac{1}{260}, \frac{1}{261}, \frac{1}{262}, \frac{1}{263}, \frac{1}{264}, \frac{1}{265}, \frac{1}{266}, \frac{1}{267}, \frac{1}{268}, \frac{1}{269}, \frac{1}{270}, \frac{1}{271}, \frac{1}{272}, \frac{1}{273}, \frac{1}{274}, \frac{1}{275}, \frac{1}{276}, \frac{1}{277}, \frac{1}{278}, \frac{1}{279}, \frac{1}{280}, \frac{1}{281}, \frac{1}{282}, \frac{1}{283}, \frac{1}{284}, \frac{1}{285}, \frac{1}{286}, \frac{1}{287}, \frac{1}{288}, \frac{1}{289}, \frac{1}{290}, \frac{1}{291}, \frac{1}{292}, \frac{1}{293}, \frac{1}{294}, \frac{1}{295}, \frac{1}{296}, \frac{1}{297}, \frac{1}{298}, \frac{1}{299}, \frac{1}{300}, \frac{1}{301}, \frac{1}{302}, \frac{1}{303}, \frac{1}{304}, \frac{1}{305}, \frac{1}{306}, \frac{1}{307}, \frac{1}{308}, \frac{1}{309}, \frac{1}{310}, \frac{1}{311}, \frac{1}{312}, \frac{1}{313}, \frac{1}{314}, \frac{1}{315}, \frac{1}{316}, \frac{1}{317}, \frac{1}{318}, \frac{1}{319}, \frac{1}{320}, \frac{1}{321}, \frac{1}{322}, \frac{1}{323}, \frac{1}{324}, \frac{1}{325}, \frac{1}{326}, \frac{1}{327}, \frac{1}{328}, \frac{1}{329}, \frac{1}{330}, \frac{1}{331}, \frac{1}{332}, \frac{1}{333}, \frac{1}{334}, \frac{1}{335}, \frac{1}{336}, \frac{1}{337}, \frac{1}{338}, \frac{1}{339}, \frac{1}{340}, \frac{1}{341}, \frac{1}{342}, \frac{1}{343}, \frac{1}{344}, \frac{1}{345}, \frac{1}{346}, \frac{1}{347}, \frac{1}{348}, \frac{1}{349}, \frac{1}{350}, \frac{1}{351}, \frac{1}{352}, \frac{1}{353}, \frac{1}{354}, \frac{1}{355}, \frac{1}{356}, \frac{1}{357}, \frac{1}{358}, \frac{1}{359}, \frac{1}{360}, \frac{1}{361}, \frac{1}{362}, \frac{1}{363}, \frac{1}{364}, \frac{1}{365}, \frac{1}{366}, \frac{1}{367}, \frac{1}{368}, \frac{1}{369}, \frac{1}{370}, \frac{1}{371}, \frac{1}{372}, \frac{1}{373}, \frac{1}{374}, \frac{1}{375}, \frac{1}{376}, \frac{1}{377}, \frac{1}{378}, \frac{1}{379}, \frac{1}{380}, \frac{1}{381}, \frac{1}{382}, \frac{1}{383}, \frac{1}{384}, \frac{1}{385}, \frac{1}{386}, \frac{1}{387}, \frac{1}{388}, \frac{1}{389}, \frac{1}{390}, \frac{1}{391}, \frac{1}{392}, \frac{1}{393}, \frac{1}{394}, \frac{1}{395}, \frac{1}{396}, \frac{1}{397}, \frac{1}{398}, \frac{1}{399}, \frac{1}{400}, \frac{1}{401}, \frac{1}{402}, \frac{1}{403}, \frac{1}{404}, \frac{1}{405}, \frac{1}{406}, \frac{1}{407}, \frac{1}{408}, \frac{1}{409}, \frac{1}{410}, \frac{1}{411}, \frac{1}{412}, \frac{1}{413}, \frac{1}{414}, \frac{1}{415}, \frac{1}{416}, \frac{1}{417}, \frac{1}{418}, \frac{1}{419}, \frac{1}{420}, \frac{1}{421}, \frac{1}{422}, \frac{1}{423}, \frac{1}{424}, \frac{1}{425}, \frac{1}{426}, \frac{1}{427}, \frac{1}{428}, \frac{1}{429}, \frac{1}{430}, \frac{1}{431}, \frac{1}{432}, \frac{1}{433}, \frac{1}{434}, \frac{1}{435}, \frac{1}{436}, \frac{1}{437}, \frac{1}{438}, \frac{1}{439}, \frac{1}{440}, \frac{1}{441}, \frac{1}{442}, \frac{1}{443}, \frac{1}{444}, \frac{1}{445}, \frac{1}{446}, \frac{1}{447}, \frac{1}{448}, \frac{1}{449}, \frac{1}{450}, \frac{1}{451}, \frac{1}{452}, \frac{1}{453}, \frac{1}{454}, \frac{1}{455}, \frac{1}{456}, \frac{1}{457}, \frac{1}{458}, \frac{1}{459}, \frac{1}{460}, \frac{1}{461}, \frac{1}{462}, \frac{1}{463}, \frac{1}{464}, \frac{1}{465}, \frac{1}{466}, \frac{1}{467}, \frac{1}{468}, \frac{1}{469}, \frac{1}{470}, \frac{1}{471}, \frac{1}{472}, \frac{1}{473}, \frac{1}{474}, \frac{1}{475}, \frac{1}{476}, \frac{1}{477}, \frac{1}{478}, \frac{1}{479}, \frac{1}{480}, \frac{1}{481}, \frac{1}{482}, \frac{1}{483}, \frac{1}{484}, \frac{1}{485}, \frac{1}{486}, \frac{1}{487}, \frac{1}{488}, \frac{1}{489}, \frac{1}{490}, \frac{1}{491}, \frac{1}{492}, \frac{1}{493}, \frac{1}{494}, \frac{1}{495}, \frac{1}{496}, \frac{1}{497}, \frac{1}{498}, \frac{1}{499}, \frac{1}{500}, \frac{1}{501}, \frac{1}{502}, \frac{1}{503}, \frac{1}{504}, \frac{1}{505}, \frac{1}{506}, \frac{1}{507}, \frac{1}{508}, \frac{1}{509}, \frac{1}{510}, \frac{1}{511}, \frac{1}{512}, \frac{1}{513}, \frac{1}{514}, \frac{1}{515}, \frac{1}{516}, \frac{1}{517}, \frac{1}{518}, \frac{1}{519}, \frac{1}{520}, \frac{1}{521}, \frac{1}{522}, \frac{1}{523}, \frac{1}{524}, \frac{1}{525}, \frac{1}{526}, \frac{1}{527}, \frac{1}{528}, \frac{1}{529}, \frac{1}{530}, \frac{1}{531}, \frac{1}{532}, \frac{1}{533}, \frac{1}{534}, \frac{1}{535}, \frac{1}{536}, \frac{1}{537}, \frac{1}{538}, \frac{1}{539}, \frac{1}{540}, \frac{1}{541}, \frac{1}{542}, \frac{1}{543}, \frac{1}{544}, \frac{1}{545}, \frac{1}{546}, \frac{1}{547}, \frac{1}{548}, \frac{1}{549}, \frac{1}{550}, \frac{1}{551}, \frac{1}{552}, \frac{1}{553}, \frac{1}{554}, \frac{1}{555}, \frac{1}{556}, \frac{1}{557}, \frac{1}{558}, \frac{1}{559}, \frac{1}{560}, \frac{1}{561}, \frac{1}{562}, \frac{1}{563}, \frac{1}{564}, \frac{1}{565}, \frac{1}{566}, \frac{1}{567}, \frac{1}{568}, \frac{1}{569}, \frac{1}{570}, \frac{1}{571}, \frac{1}{572}, \frac{1}{573}, \frac{1}{574}, \frac{1}{575}, \frac{1}{576}, \frac{1}{577}, \frac{1}{578}, \frac{1}{579}, \frac{1}{580}, \frac{1}{581}, \frac{1}{582}, \frac{1}{583}, \frac{1}{584}, \frac{1}{585}, \frac{1}{586}, \frac{1}{587}, \frac{1}{588}, \frac{1}{589}, \frac{1}{590}, \frac{1}{591}, \frac{1}{592}, \frac{1}{593}, \frac{1}{594}, \frac{1}{595}, \frac{1}{596}, \frac{1}{597}, \frac{1}{598}, \frac{1}{599}, \frac{1}{600}, \frac{1}{601}, \frac{1}{602}, \frac{1}{603}, \frac{1}{604}, \frac{1}{605}, \frac{1}{606}, \frac{1}{607}, \frac{1}{608}, \frac{1}{609}, \frac{1}{610}, \frac{1}{611}, \frac{1}{612}, \frac{1}{613}, \frac{1}{614}, \frac{1}{615}, \frac{1}{616}, \frac{1}{617}, \frac{1}{618}, \frac{1}{619}, \frac{1}{620}, \frac{1}{621}, \frac{1}{622}, \frac{1}{623}, \frac{1}{624}, \frac{1}{625}, \frac{1}{626}, \frac{1}{627}, \frac{1}{628}, \frac{1}{629}, \frac{1}{630}, \frac{1}{631}, \frac{1}{632}, \frac{1}{633}, \frac{1}{634}, \frac{1}{635}, \frac{1}{636}, \frac{1}{637}, \frac{1}{638}, \frac{1}{639}, \frac{1}{640}, \frac{1}{641}, \frac{1}{642}, \frac{1}{643}, \frac{1}{644}, \frac{1}{645}, \frac{1}{646}, \frac{1}{647}, \frac{1}{648}, \frac{1}{649}, \frac{1}{650}, \frac{1}{651}, \frac{1}{652}, \frac{1}{653}, \frac{1}{654}, \frac{1}{655}, \frac{1}{656}, \frac{1}{657}, \frac{1}{658}, \frac{1}{659}, \frac{1}{660}, \frac{1}{661}, \frac{1}{662}, \frac{1}{663}, \frac{1}{664}, \frac{1}{665}, \frac{1}{666}, \frac{1}{667}, \frac{1}{668}, \frac{1}{669}, \frac{1}{670}, \frac{1}{671}, \frac{1}{672}, \frac{1}{673}, \frac{1}{674}, \frac{1}{675}, \frac{1}{676}, \frac{1}{677}, \frac{1}{678}, \frac{1}{679}, \frac{1}{680}, \frac{1}{681}, \frac{1}{682}, \frac{1}{683}, \frac{1}{684}, \frac{1}{685}, \frac{1}{686}, \frac{1}{687}, \frac{1}{688}, \frac{1}{689}, \frac{1}{690}, \frac{1}{691}, \frac{1}{692}, \frac{1}{693}, \frac{1}{694}, \frac{1}{695}, \frac{1}{696}, \frac{1}{697}, \frac{1}{698}, \frac{1}{699}, \frac{1}{700}, \frac{1}{701}, \frac{1}{702}, \frac{1}{703}, \frac{1}{704}, \frac{1}{705}, \frac{1}{706}, \frac{1}{707}, \frac{1}{708}, \frac{1}{709}, \frac{1}{710}, \frac{1}{711}, \frac{1}{712}, \frac{1}{713}, \frac{1}{714}, \frac{1}{715}, \frac{1}{716}, \frac{1}{717}, \frac{1}{718}, \frac{1}{719}, \frac{1}{720}, \frac{1}{721}, \frac{1}{722}, \frac{1}{723}, \frac{1}{724}, \frac{1}{725}, \frac{1}{726}, \frac{1}{727}, \frac{1}{728}, \frac{1}{729}, \frac{1}{730}, \frac{1}{731}, \frac{1}{732}, \frac{1}{733}, \frac{1}{734}, \frac{1}{735}, \frac{1}{736}, \frac{1}{737}, \frac{1}{738}, \frac{1}{739}, \frac{1}{740}, \frac{1}{741}, \frac{1}{742}, \frac{1}{743}, \frac{1}{744}, \frac{1}{745}, \frac{1}{746}, \frac{1}{747}, \frac{1}{748}, \frac{1}{749}, \frac{1}{750}, \frac{1}{751}, \frac{1}{752}, \frac{1}{753}, \frac{1}{754}, \frac{1}{755}, \frac{1}{756}, \frac{1}{757}, \frac{1}{758}, \frac{1}{759}, \frac{1}{760}, \frac{1}{761}, \frac{1}{762}, \frac{1}{763}, \frac{1}{764}, \frac{1}{765}, \frac{1}{766}, \frac{1}{767}, \frac{1}{768}, \frac{1}{769}, \frac{1}{770}, \frac{1}{771}, \frac{1}{772}, \frac{1}{773}, \frac{1}{774}, \frac{1}{775}, \frac{1}{776}, \frac{1}{777}, \frac{1}{778}, \frac{1}{779}, \frac{1}{780}, \frac{1}{781}, \frac{1}{782}, \frac{1}{783}, \frac{1}{784}, \frac{1}{785}, \frac{1}{786}, \frac{1}{787}, \frac{1}{788}, \frac{1}{789}, \frac{1}{790}, \frac{1}{791}, \frac{1}{792}, \frac{1}{793}, \frac{1}{794}, \frac{1}{795}, \frac{1}{796}, \frac{1}{797}, \frac{1}{798}, \frac{1}{799}, \frac{1}{800}, \frac{1}{801}, \frac{1}{802}, \frac{1}{803}, \frac{1}{804}, \frac{1}{805}, \frac{1}{806}, \frac{1}{807}, \frac{1}{808}, \frac{1}{809}, \frac{1}{810}, \frac{1}{811}, \frac{1}{812}, \frac{1}{813}, \frac{1}{814}, \frac{1}{815}, \frac{1}{816}, \frac{1}{817}, \frac{1}{818}, \frac{1}{819}, \frac{1}{820}, \frac{1}{821}, \frac{1}{822}, \frac{1}{823}, \frac{1}{824}, \frac{1}{825}, \frac{1}{826}, \frac{1}{827}, \frac{1}{828}, \frac{1}{829}, \frac{1}{830}, \frac{1}{831}, \frac{1}{832}, \frac{1}{833}, \frac{1}{834}, \frac{1}{835}, \frac{1}{836}, \frac{1}{837}, \frac{1}{838}, \frac{1}{839}, \frac{1}{840}, \frac{1}{841}, \frac{1}{842}, \frac{1}{843}, \frac{1}{844}, \frac{1}{845}, \frac{1}{846}, \frac{1}{847}, \frac{1}{848}, \frac{1}{849}, \frac{1}{850}, \frac{1}{851}, \frac{1}{852}, \frac{1}{853}, \frac{1}{854}, \frac{1}{855}, \frac{1}{856}, \frac{1}{857}, \frac{1}{858}, \frac{1}{859}, \frac{1}{860}, \frac{1}{861}, \frac{1}{862}, \frac{1}{863}, \frac{1}{864}, \frac{1}{865}, \frac{1}{866}, \frac{1}{867}, \frac{1}{868}, \frac{1}{869}, \frac{1}{870}, \frac{1}{871}, \frac{1}{872}, \frac{1}{873}, \frac{1}{874}, \frac{1}{875}, \frac{1}{876}, \frac{1}{877}, \frac{1}{878}, \frac{1}{879}, \frac{1}{880}, \frac{1}{881}, \frac{1}{882}, \frac{1}{883}, \frac{1}{884}, \frac{1}{885}, \frac{1}{886}, \frac{1}{887}, \frac{1}{888}, \frac{1}{889}, \frac{1}{890}, \frac{1}{891}, \frac{1}{892}, \frac{1}{893}, \frac{1}{894}, \frac{1}{895}, \frac{1}{896}, \frac{1}{897}, \frac{1}{898}, \frac{1}{899}, \frac{1}{900}, \frac{1}{901}, \frac{1}{902}, \frac{1}{903}, \frac{1}{904}, \frac{1}{905}, \frac{1}{906}, \frac{1}{907}, \frac{1}{908}, \frac{1}{909}, \frac{1}{910}, \frac{1}{911}, \frac{1}{912}, \frac{1}{913}, \frac{1}{914}, \frac{1}{915}, \frac{1}{916}, \frac{1}{917}, \frac{1}{918}, \frac{1}{919}, \frac{1}{920}, \frac{1}{921}, \frac{1}{922}, \frac{1}{923}, \frac{1}{924}, \frac{1}{925}, \frac{1}{926}, \frac{1}{927}, \frac{1}{928}, \frac{1}{929}, \frac{1}{930}, \frac{1}{931}, \frac{1}{932}, \frac{1}{933}, \frac{1}{934}, \frac{1}{935}, \frac{1}{936}, \frac{1}{937}, \frac{1}{938}, \frac{1}{939}, \frac{1}{940}, \frac{1}{941}, \frac{1}{942}, \frac{1}{943}, \frac{1}{944}, \frac{1}{945}, \frac{1}{946}, \frac{1}{947}, \frac{1}{948}, \frac{1}{949}, \frac{1}{950}, \frac{1}{951}, \frac{1}{952}, \frac{1}{953}, \frac{1}{954}, \frac{1}{955}, \frac{1}{956}, \frac{1}{957}, \frac{1}{958}, \frac{1}{959}, \frac{1}{960}, \frac{1}{961}, \frac{1}{962}, \frac{1}{963}, \frac{1}{964}, \frac{1}{965}, \frac{1}{966}, \frac{1}{967}, \frac{1}{968}, \frac{1}{969}, \frac{1}{970}, \frac{1}{971}, \frac{1}{972}, \frac{1}{973}, \frac{1}{974}, \frac{1}{975}, \frac{1}{976}, \frac{1}{977}, \frac{1}{978}, \frac{1}{979}, \frac{1}{980}, \frac{1}{981}, \frac{1}{982}, \frac{1}{983}, \frac{1}{984}, \frac{1}{985}, \frac{1}{986}, \frac{1}{987}, \frac{1}{988}, \frac{1}{989}, \frac{1}{990}, \frac{1}{991}, \frac{1}{992}, \frac{1}{993}, \frac{1}{994}, \frac{1}{995}, \frac{1}{996}, \frac{1}{997}, \frac{1}{998}, \frac{1}{999}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \frac{1}{1003}, \frac{1}{1004}, \frac{1}{1005}, \frac{1}{1006}, \frac{1}{1007}, \frac{1}{1008}, \frac{1}{1009}, \frac{1}{1010}, \frac{1}{1011}, \frac{1}{1012}, \frac{1}{1013}, \frac{1}{1014}, \frac{1}{1015}, \frac{1}{1016}, \frac{1}{1017}, \frac{1}{1018}, \frac{1}{1019}, \frac{1}{1020}, \frac{1}{1021}, \frac{1}{1022}, \frac{1}{1023}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{1025}, \frac{1}{1026}, \frac{1}{1027}, \frac{1}{1028}, \frac{1}{1029}, \frac{1}{1030}, \frac{1}{1031}, \frac{1}{1032}, \frac{1}{1033}, \frac{1}{1034}, \frac{1}{1035}, \frac{1}{1036}, \frac{1}{1037}, \frac{1}{1038}, \frac{1}{1039}, \frac{1}{1040}, \frac{1}{1041}, \frac{1}{1042}, \frac{1}{1043}, \frac{1}{1044}, \frac{1}{1045}, \frac{1}{1046}, \frac{1}{1047}, \frac{1}{1048}, \frac{1}{1049}, \frac{1}{1050}, \frac{1}{1051}, \frac{1}{1052}, \frac{1}{1053}, \frac{1}{1054}, \frac{1}{1055}, \frac{1}{1056}, \frac{1}{1057}, \frac{1}{1058}, \frac{1}{1059}, \frac{1}{1060}, \frac{1}{1061}, \frac{1}{1062}, \frac{1}{1063}, \frac{1}{1064}, \frac{1}{1065}, \frac{1}{1066}, \frac{1}{1067}, \frac{1}{1068}, \frac{1}{1069}, \frac{1}{1070}, \frac{1}{1071}, \frac{1}{1072}, \frac{1}{1073}, \frac{1}{1074}, \frac{1}{1075}, \frac{1}{1076}, \frac{1}{1077}, \frac{1}{1078}, \frac{1}{1079}, \frac{1}{1080}, \frac{1}{1081}, \frac{1}{1082}, \frac{1}{1083}, \frac{1}{1084}, \frac{1}{1085}, \frac{1}{1086}, \frac{1}{1087}, \frac{1}{1088}, \frac{1}{1089}, \frac{1}{1090}, \frac{1}{1091}, \frac{1}{1092}, \frac{1}{1093}, \frac{1}{1094}, \frac{1}{1095}, \frac{1}{1096}, \frac{1}{1097}, \frac{1}{1098}, \frac{1}{1099}, \frac{1}{1100}, \frac{1}{1101}, \frac{1}{1102}, \frac{1}{1103}, \frac{1}{1104}, \frac{1}{1105}, \frac{1}{1106}, \frac{1}{1107}, \frac{1}{1108}, \frac{1}{1109}, \frac{1}{1110}, \frac{1}{1111}, \frac{1}{1112}, \frac{1}{1113}, \frac{1}{1114}, \frac{1}{1115}, \frac{1}{1116}, \frac{1}{1117}, \frac{1}{1118}, \frac{1}{1119}, \frac{1}{1120}, \frac{1}{1121}, \frac{1}{1122}, \frac{1}{1123}, \frac{1}{1124}, \frac{1}{1125}, \frac{1}{1126}, \frac{1}{1127}, \frac{1}{1128}, \frac{1}{1129}, \frac{1}{1130}, \frac{1}{1131}, \frac{1}{1132}, \frac{1}{1133}, \frac{1}{1134}, \frac{1}{1135}, \frac{1}{1136}, \frac{1}{1137}, \frac{1}{1138}, \frac{1}{1139}, \frac{1}{1140}, \frac{1}{1141}, \frac{1}{1142}, \frac{1}{1143}, \frac{1}{1144}, \frac{1}{1145}, \frac{1}{1146}, \frac{1}{1147}, \frac{1}{1148}, \frac{1}{1149}, \frac{1}{1150}, \frac{1}{1151}, \frac{1}{1152}, \frac{1}{1153}, \frac{1}{1154}, \frac{1}{1155}, \frac{1}{1156}, \frac{1}{1157}, \frac{1}{1158}, \frac{1}{1159}, \frac{1}{1160}, \frac{1}{1161}, \frac{1}{1162}, \frac{1}{1163}, \frac{1}{1164}, \frac{1}{1165}, \frac{1}{1166}, \frac{1}{1167}, \frac{1}{1168}, \frac{1}{1169}, \frac{1}{1170}, \frac{1}{1171}, \frac{1}{1172}, \frac{1}{1173}, \frac{1}{1174}, \frac{1}{1175}, \frac{1}{1176}, \frac{1}{1177}, \frac{1}{1178}, \frac{1}{1179}, \frac{1}{1180}, \frac{1}{1181}, \frac{1}{1182}, \frac{1}{1183}, \frac{1}{1184}, \frac{1}{1185}, \frac{1}{1186}, \frac{1}{1187}, \frac{1}{1188}, \frac{1}{1189}, \frac{1}{1190}, \frac{1}{1191}, \frac{1}{1192}, \frac{1}{1193}, \frac{1}{1194}, \frac{1}{1195}, \frac{1}{1196}, \frac{1}{1197}, \frac{1}{1198}, \frac{1}{1199}, \frac{1}{1200}, \frac{1}{1201}, \frac{1}{1202}, \frac{1}{1203}, \frac{1}{1204}, \frac{1}{1205}, \frac{1}{1206}, \frac{1}{1207}, \frac{1}{1208}, \frac{1}{1209}, \frac{1}{1210}, \frac{1}{1211}, \frac{1}{1212}, \frac{1}{1213}, \frac{1}{1214}, \frac{1}{1215}, \frac{1}{1216}, \frac{1}{1217}, \frac{1}{1218}, \frac{1}{1219}, \frac{1}{1220}, \frac{1}{1221}, \frac{1}{1222}, \frac{1}{1223}, \frac{1}{1224}, \frac{1}{1225}, \frac{1}{1226}, \frac{1}{1227}, \frac{1}{1228}, \frac{1}{1229}, \frac{1}{1230}, \frac{1}{1231}, \frac{1}{1232}, \frac{1}{1233}, \frac{1}{1234}, \frac{1}{1235}, \frac{1}{1236}, \frac{1}{1237}, \frac{1}{1238}, \frac{1}{1239}, \frac{1}{1240}, \frac{1}{1241}, \frac{1}{1242}, \frac{1}{1243}, \frac{1}{12$

$\frac{1}{11}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}$, &c. progrediantur in progressionem harmonica; arcum circuli esse differentiam duarum serierum progressionis harmonicæ. Præterea, si binos quosque terminos ad eandem denominationem reducas; quia $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$, $\frac{1}{7} - \frac{1}{11} = \frac{2}{77}$, $\frac{1}{11} - \frac{1}{17} = \frac{2}{187}$, $\frac{1}{17} - \frac{1}{19} = \frac{2}{323}$ &c. area circuli, quadrato diametri existente 1, erit $\frac{2}{3} + \frac{2}{21} + \frac{2}{77} + \frac{2}{187} + \frac{2}{323}$ &c. in infinitum. Jam si diameter circuli = 1, erit semidiameter = $\frac{1}{2}$, adeoque quadratum inscriptum = $\frac{1}{4}$ (§. 21 *Trigon.*). Quoniam itaque quadratum circumscriptum est inscripti duplum, si quadratum inscriptum fuerit $\frac{1}{4}$, erit circumscriptum $\frac{1}{2}$, adeoque area circuli $\frac{1}{2} + \frac{1}{35} + \frac{1}{35} + \frac{1}{155} + \frac{1}{155} + \frac{1}{323}$ &c. in infinitum (§. 181 *Arihm.*). Statim patet 3, 35, 99 esse numeros quadratos unitate multiplicatos, nempe 4 - 1, 36 - 1, 100 - 1; & inter quadratum 4 & 36 interjacere tres numeros quadratos 9, 16, 25; similiterque inter 36 & 100 interjacere tres 49, 64, 81. Quodsi seriem pro circulo continues, & cum numeris in Tabula quadratorum numerorum compares; videbis eam constante hac lege progredi, ut denominator fractionis sit quartus quisque numerus excerptus ex serie numerorum quadratorum unitate multiplicatorum, numeratore semper existente unitate. Quando vero quadratum inscriptum $\frac{1}{4}$, radius est $\sqrt{\frac{1}{8}}$ (§. 21 *Trigon.*), adeoque diameter = $2\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Hæc ideo monemus, ut discant tyro-

nes dari etiam artificia particularia legem progressionis terminorum in infinitum detegendi, præter generalia, de quibus diximus ante: quamvis istiusmodi quoque artificii jam usi fuerimus in inveniendi generali theoremate pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Anal. infin.*). Neque enim inutile est eadem artificia variis exemplis illustrari.

§. 239. Quemadmodum vero quadraturæ curvarum per series infinitas reducuntur ad quadraturam infinitarum parabolarum; ita quoque curvarum aliarum quadratura ad quadraturam circuli atque hyperbolæ reduci solent: id quod non uno modo fieri solet. Exemplum habemus in ellipsi (§. 126 *Anal. infin.*), ubi ratio areæ ellipticæ ad aream circuli sua veluti sponte sese offert. Exempla alia præbent cyclois, cissois, spiralis *Archimedeæ*. Non sine ratione addidimus hanc reductionem, cum eadem utamur in altioribus; prouti suo loco constabit in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvuntur. Probe autem notandæ sunt hæ reductiones iis, qui ad tertium cognitionis gradum aspirant, ut vim principii reductionis per omnem Artem inveniendi utilissimi rectius percipiant. Ceterum eodem instituto, (§. 147 *Anal. infin.*) rectificationem parabolæ reducimus ad quadraturam hyperbolæ: id quod ideo attentionem meretur, ut discamus subinde summationem

nem

nem ejusdem elementi dependere, & a quadratura curvæ, & a rectificatione arcus cujusdam. Habet enim hoc usum non contemnendum in methodo tangentium inversa, ubi æquationes differentiales construere jubemur, supposita curvæ cujusdam quadratura, vel rectificatione arcus. Exempla occurrunt in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvimus. Quodsi enim tempestive animum advertamus ad talia, quæ in progressu usum præclarum habent; quæ alias difficilia videntur, facilia evadunt, nec perturbatur animus, quando applicantur ea, quorum idea nobis jam familiaris evasit; præsertim cum haud raro insolita, nondumque perspecta videantur, quæ ex anterioribus nota esse poterant, si attentione sufficiente in iisdem usi fuissimus.

§. 240. Rectificatio curvarum, perinde ac inventio sectorum ellipticorum & hyperbolicorum, interdum requirit calculos admodum prolixos. Ne igitur prolixitate tyrones redderentur perplexi, & a solutione problematis deterrerentur, calculos integros admodum distincte explicatos exhibuimus. Consulunt autem sibi tyrones, si initio generalem quandam ideam solutionis animo concipiant; veluti quod in rectificatione arcus elliptici (§. 172 *Anal. infin.*) primum quæratuur valor ex æquatione ad curvam, deinde tam ex numeratore, quam denominatore, in

valore isto emergente, extrahatur radix per theorema *Newtonianum*, & tandem series pro numeratore emergens dividatur per seriem, quæ emergit pro denominatore. Hoc pacto enim, in usum solutionis problematis, problema unum resolvitur quasi in plura, quorum unumquodque sigillatim solvi potest. Circa divisionem attentionem meretur artificium, quo calculus a perplexitate liberatur; ut distincte singula ipsis oculis exhibeantur: quod non modo facit ad facilius evitandum errorem, qui in calculum perplexum facile irrepit, defectu attentionis; verum etiam omnem molestiam aufert, qua attentio turbatur. Distincta perceptio intellectus est: unde qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navant, non modo nostro more singula distincte sibi repræsentare, verum etiam ad diversa artificia, quibus eo sine hinc inde utimur, animum sollicitè advertere tenentur. Ceterum ne quis aliorum libros evolvens, in quibus eorundem Problematum solutio occurrit, existimet, paucis ibidem explicari, quæ a nobis tanta prolixitate expediuntur; monendum esse duco, autores plerosque scribere peritis, non tyronibus, quorum utilitati nos velificamur; adeoque multa omittere, quæ a lectore suppleenda sunt, siquidem veritatem assequi voluerit. Unde non modo tyrones, verum etiam haud raro exercitatiores multum temporis

fallunt, antequam multo labore ab altero dicta assequantur. Nobis vero, qui tempus rerum omnium pretiosissimum existimamus, propositum est, ut sine omni temporis dispendio sciendi cupidos ad scientiam perducamus; cumque aliorum felicitati omni modo studere nos jubeat philosophia nostra, id quoque agendum esse arbitramur, ut in discendo omnem a discendis molestiam arceamus.

§. 241. In primis autem in doctrina de rectificatione curvarum attentionem meretur methodus, qua, ex quantitate per seriem data, invenitur series pro quantitate variabili, ex qua formantur seriei prioris termini; veluti dum ex arcu dato sinus queritur. Etenim arcus datur per seriem infinitam, cujus termini formantur ex sinu, & sinus queritur in serie, cujus termini formantur ex arcu. Nititur ea methodo extrahendi radicem ex serie infinita, quam eum in finem explicavimus in *Analyfi finitorum*. Inventa est a NEWTONO; quemadmodum constat ex literis ad LEIBNITIIUM datis, quæ leguntur apud WALLISIUM, volumine tertio *Operum*, diciturque Regressus serierum. Subinde tamen artis est applicare methodum extrahendi radicem ex æquatione infinita in regressu serierum. Exempli loco est problema 56, (§. 163 *Anal. infin.*), quo ex dato arcu invenitur sinus versus. Solutio igitur problematis istius attentionem meretur, ut artificium, quo hic

utimur, in aliis casibus similibus adhiberi possit. Neque enim sufficit, ut intelligantur, quæ docentur, si quis ad tertium cognitionis gradum adspirat; sed artificia quoque analytica addiscenda in usum futurum, cum regulas doceamus per exempla. Ad hæcenus dicta qui animum attendit, in ceteris sese satis attentum atque acutum præbebit, ut plura moneri non sit opus. Immo si quis ea attentione in discenda Mathesi uti voluerit, quam tantopere inculcavimus; acumen singulare acquireret, quo facile, nullo quasi negotio, discernet artificia in solutionibus problematum adhibita, eorundemque a se invicem dependentiam animadvertet: id quod utile erit iis, qui, studio Matheseos ac in specie Algebrae, in Arte inveniendi generali proficere student ad recte philosophandum necessaria.

§. 242. Circuli rectificatio etiam deduci potest ex quadratura circuli. Quoniam enim area circuli prodit ducta peripheria in quartam diametri partem (§. 429 *Geom.*), peripheria prodit, si seriem, quæ exprimit arcum circuli, dividās per $\frac{1}{4}$. Inde est, quod, si diameter fuerit 1, pro quadrante eadem prodeat series $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ &c. (§. 158 *Anal. infin.*), quam pro circuli area repereramus, quadrato diametri existente 1. Etenim si seriem per $\frac{1}{4}$ dividere volueris, Numeratores terminorum ducendi sunt in 4, (§. 243 *Arithm.*).

Notant

Notandum adhuc est, ex formulis indefinitis erui posse adhuc alias formulas pro circulo integro, vel ejus peripheria integra, si valor ipsius x non explicetur per diametrum 1, sed per sinum, sinum versum, cosinum, vel tangentem alicujus arcus: quo in casu sapius prodit series magis convergens, cum priori modo inventa minus convergeret & contra. Ex. gr. Si tangens fuerit x , pro arcu prodit $x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^7 + \frac{1}{2}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c.

Tab. III. Fig. 39. Ponamus arcum x esse 30° . Si fuerit radius $CA = CB = 1$, crit sinus $BI = \frac{1}{2}$ (§. 15 *Trigon.*), consequenter ob $IC^2 = BC^2 - BI^2$ (§. 417 *Geom.*) $IC^2 = \frac{3}{4}$. Quamobrem cum sit

$IC:IB = CA:AD$ (§. 26 *Trigon.*) & $IC^2:IB^2 = CA^2:AD^2$ (§. 124 *Anal.*) crit $\frac{3}{4}:\frac{1}{4} = 1:AD^2$ five $3:1 = 1:AD^2$ (§. cit.) Unde reperitur $AD = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Quodsi hunc valorem pro x substituas, cum sit

$$\begin{array}{ll} x^2 = \frac{1}{3} & \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{9} \\ x^4 = \frac{1}{9} & \frac{1}{9}x^4 = \frac{1}{81} \\ x^6 = \frac{1}{27} & \frac{1}{27}x^6 = \frac{1}{729} \\ x^8 = \frac{1}{81} & \frac{1}{81}x^8 = \frac{1}{6561} \\ x^{10} = \frac{1}{243} & \frac{1}{243}x^{10} = \frac{1}{59049} \end{array}$$

series $x(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^8 - \frac{1}{11}x^{10}$ &c.) degenerat in sequentem $\sqrt{\frac{1}{3}}(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{81} - \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} - \frac{1}{59049}$ &c.) quæ exprimit arcum 30 graduum. Si vero diameter fuerit 1, eadem exprimit arcum 60 graduum. Quamobrem si seriem hanc ducas in 6,

hoc est, si $\sqrt{\frac{1}{3}}$ multiplices per 6, cum sit $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; pro area circuli habebis

$$2\sqrt{3}(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{81} - \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} - \frac{1}{59049} \text{ &c.})$$

Quodsi porro binos quosque terminos reducere volueris ad eandem denominationem, erit

$$\begin{array}{r} \frac{1}{1} - \frac{1}{9} = \frac{-45 + 9}{405} = \frac{-36}{405} = \frac{-12}{135} \\ \frac{-12}{135} + \frac{1}{81} = \frac{-729 + 189}{189 \cdot 729} \\ = \frac{-81 + 21}{21 \cdot 729} \\ = \frac{-60}{21 \cdot 729} \\ = \frac{-20}{7 \cdot 729} \\ = \frac{-20}{5103} \end{array}$$

Si adhuc addas terminum seriei sequentem $+\frac{1}{9477}$; eodem modo reperies

$$-\frac{1}{5103} + \frac{1}{9477} = -\frac{28}{104247}$$

Unde series pro circulo refultat $2\sqrt{3}(1 - \frac{12}{135} - \frac{20}{5103} - \frac{28}{104247}$ &c.)

Quodsi eandem seriem divides per 4, & factorem $2\sqrt{3}$ per 4 multiplices; habebis pro circulo

$$8\sqrt{3}(\frac{1}{4} - \frac{1}{35} - \frac{1}{5103} - \frac{1}{104247} \text{ &c.})$$

seu $\sqrt{192}(\frac{1}{4} - \frac{1}{35} - \frac{1}{5103} - \frac{1}{104247} \text{ &c.})$

$$\text{Est vero } 135 = 15 \cdot 9$$

$$5103 = 63 \cdot 81$$

$$= 63 \cdot 9^2$$

$$104247 = 143 \cdot 729$$

$$= 143 \cdot 9^3$$

Qq 2

Quam-

Quamobrem series pro circulo

$$\sqrt{192} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{15 \cdot 9} - \frac{5}{63 \cdot 9^2} - \frac{7}{143 \cdot 9^3} \&c. \right)$$

Unde patet lex progressionis in infinitum. Etenim numeratores progrediuntur secundum numeros impares; denominatores componuntur ex binis factoribus, quorum unus sumitur ex progressionem geometrica, cujus terminus primus 9, & exponens rationis eidem æqualis; alter vero per saltum excerpitur ex serie numerorum quadratorum unitate multiplicatorum, quorum radices sunt 4. 8. 12. &c. hoc est, progrediuntur in progressionem arithmetica, cujus terminus primus est 4 & differentia terminorum eidem æqualis.

Nisi formulam abbreviare voluissimus reductione binorum terminorum diversis signis præditorum ad eandem denominationem; lex progressionis in infinitum manifestari quoque poterat in formula

$2\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} \&c. \right)$
resolvendo denominatores in suos factores. Cum enim sit

$$45 = 5 \cdot 9$$

$$189 = 7 \cdot 27$$

$$729 = 9 \cdot 81$$

$$2673 = 11 \cdot 243$$

erit pro circulo series, si diameter = 1

$$\sqrt{12} \left(\frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \frac{1}{9 \cdot 81} - \frac{1}{11 \cdot 243} \&c. \right)$$

Una hic series factorum progreditur secundum numeros impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. altera vero in progressionem geometrica, cujus exponens rationis 3, nimirum 1. 3. 9. 27. 81. 143.

§. 243. Patet hinc non temere esse judicandum, utrum series aliqua citius appropinquet altera, nec ne, & num constante quadam lege progrediatur. Neque enim eadem formula indefinita in omni casu particulari æque appropinquat, & lex progressionis sæpius latet, atque in casu particulari non eadem est, quæ in universalis. Liquet etiam ad detegendam legem progressionis facere Arithmeticam, seu numerorum scientiam, quæ subinde etiam compendia summationis quotlibet terminorum seriei subministrat; ut adeo inutile existimare minime debeat studium; quod in speciebus numerorum certa lege progredientibus & in iis summandis collocatur; sit ita quod hodie Geometria magis excolatur Arithmetica, immo Geometriæ ad Mechanicam applicatæ magis habeatur ratio, quam puræ. Apparet etiam usui formularum minime ob stare, quod irrationalitati obnoxia sint; & in casu particulari formulam ab irrationalitate liberam eidem implicari posse citra ullum incommodum, immo usum ejus per hoc fieri posse expeditiorem. Hæc probe notanda sunt, ne judicium de formulis diversis præcipitemus, quando de
unius

unius præ altera prærogativa agit. Efti itaque jam in superioribus (§. 238) de transmutatione seriei *Leibnitiana*, seu *Gregoriana*, pro circulo in alias quædam monuerimus; non tamen piguit plura in eam rem dicere (§. 241), tum ut intelligatur, ex eadem formula, per transmutationem communi Arithmetica nixam, varias deduci posse alias, tum ut constet, hoc non inutiliter fieri, ubi eadem ad praxin sunt transferendæ; tum ut excitaremus attentionem eorum, & juvaremus eorundem acumen, qui de seriebus infinitis ad usum aptandis forsân commentari decreverint. Neque enim inutilem operam sumeret, si quis hoc argumentum pro dignitate tractaret; ne inanes viderentur speculationes, quæ certum sui pollicentur usum. Nec est quod excipias talia peritis nullum facere negotium. Nam quibus sese commendat usus, ii non semper, immo rarissime adeo periti sunt, ut talia per se assequantur.

§. 244. Ut hæc rectius intelligantur; lubet exemplo quodam docere, quomodo per series infinitas inveniantur approximationes in numeris quantalibet exactitudine, prouti plures vel pauciores terminos summare libuerit. Resolvuntur autem termini singuli in fractiones decimales per divisionem; quemadmodum fecimus in extractione radicum ex æquationibus per approximationem (§. 363 *Anal. finit.*). Ne autem

in numero cyphrarum quoto præfigendis aberres; tenendum est, tot præfigendas esse cyphas, quot numeratori cyphræ adjiciendæ, ut prima divisio succedat. Ex. gr. si fractio fuerit $\frac{1}{3}$, divisio non succedit nisi unitati adjecta cyphra. Quoto igitur præfigitur cyphra una, ut constet deficere integra, seu locum integrorum esse vacuum, & fractionem incipere a partibus decimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{40}$, divisio inchoari nequit, nisi numeratori 1 adjectis duabus cyphris. Unde liquet quoto præfigendas esse duas cyphas: id quod indicio est, fractionem decimalem incipere a partibus centesimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{112}$, divisio non potest inchoari, nisi tribus cyphris numeratori 1 adjectis: quoto igitur præfiguntur tres cyphræ, & fractio decimalis incipit a millesimis. Similiter si fractio fuerit $\frac{5}{1152}$; quoto denuo adjiciendæ sunt cyphræ tres & fractio incipit itidem a millesimis. In casu tamen particulari dantur compendia singulos terminos per divisionem in fractiones decimales resolvendi; quando scilicet alii ex aliis jam inventis inveniri possunt. Quamobrem sumamus seriem pro circulo

$$\sqrt{192} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{15.9} - \frac{5}{63.9^2} - \frac{7}{143.9^3} \&c. \right)$$

quam ex *Leibnitiana* deduximus (§. 242). Patet ex 192 extrahendam

esse radicem in fractionibus decimalibus (§. 274 *Aritlm.*), continuata operatione ad tot loca, quot visum fuerit. Quodsi hanc divides per 4, habebis $\frac{1}{4}\sqrt{192}$, consequenter numerum, a quo summa terminorum signo negativo affectorum subtrahenda venit. Dividatur jam eadem radix per 9, 9^2 sive 81, 9^3 sive 729, &c. ut habeatur $\frac{1}{9}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^3}\sqrt{192}$, &c. aut, quod perinde est, quotus anterior semper per 9, pro obtinendo proxime sequente. Porro numerus $=\frac{1}{9}\sqrt{192}$ multiplicetur per 3, & factum dividatur per 15, ita prodibit numerus respondens $\frac{3}{15.9}$

$\sqrt{192}$. Similiter numerus $=\frac{1}{9^2}$

$\sqrt{192}$ multiplicetur per 5 & factum dividatur per 63, ut prodeat numerus $=\frac{5}{63.9^2}\sqrt{192}$; atque ita porro. Quodsi enim terminos hosce, in unam summam collectos, subtrahas a numero $=\frac{1}{4}\sqrt{192}$, relinquetur numerus peripheriæ circuli respondens, posita diametro 1. Cum sit $\sqrt{192}=13.856406460551018348219$; erit $\frac{1}{4}\sqrt{192}=3.464101615137754587055$ & porro, $\sqrt{192}$ per R designata & $\frac{1}{9}R$ per A, $\frac{1}{9^2}R$ per B, $\frac{1}{9^3}R$ per C, $\frac{1}{9^4}R$ per D & ita porro, sive $\frac{1}{9}R=A$, $\frac{1}{9}A=B$, $\frac{1}{9}B=C$, $\frac{1}{9}C=D$ & ita porro,

I.	5	3	9	6	0	0	7	1	7	8	3	9	0	0	2	0	3	8	6	9	1	=	A	
	1	7	1	0	6	6	7	4	6	4	2	6	5	5	5	7	8	2	0	7	6	=	B	
		1	9	0	0	7	4	1	6	2	6	9	6	1	7	3	0	9	1	1	9	=	C	
			2	1	1	1	9	3	5	1	4	1	0	6	8	5	8	9	9	0	2	=	D	
				2	3	4	6	5	9	4	6	0	1	1	8	7	3	2	2	1	1	=	E	
					2	6	0	7	3	2	7	3	3	4	6	5	2	5	8	0	1	=	F	
						2	8	9	7	0	3	0	3	7	1	8	3	6	2	0	0	=	G	
							3	2	1	8	9	2	2	6	3	5	3	7	3	5	5	=	H	
								3	5	7	6	5	8	0	7	0	5	9	7	0	6	=	I	
									3	9	7	3	9	7	8	5	6	2	1	8	9	=	K	
										4	4	1	5	5	3	1	7	3	5	7	6	=	L	
											4	9	0	6	1	4	6	3	7	3	0	=	M	
												5	4	5	1	2	7	3	7	4	8	=	N	
													6	0	5	6	9	7	0	8	3	=	O	
														6	7	2	9	9	6	7	6	=	P	
															7	4	7	7	7	4	1	=	Q	
																8	3	0	8	6	0	=	R	
																	9	2	3	1	8	=	S	
																		1	0	2	5	7	=	T
																			1	1	3	9	=	V
																				1	2	6	=	X
																					1	4	=	Y

Quodsi jam sit $a = \frac{3}{15}, b = \frac{5}{63}, c = \frac{7}{143}, d = \frac{9}{255}, e = \frac{11}{399}$ &c. continuata
 ferie juxta legem progressionis, ut porro inveniantur valores $f, g, h,$ &c.
 sitque A. $a = \frac{3}{15 \cdot 9} \sqrt[3]{192}$, B. $b = \frac{5}{63 \cdot 9^2} \sqrt[3]{192}$, C. $c = \frac{7}{143 \cdot 9^3} \sqrt[3]{192}$
 &c. prodibit

3	0	7	9	2	0	1	4	3	5	6	8	7	0	0	4	0	7	7	3	8	=	A. <i>a</i>
1	3	5	7	6	7	2	5	9	0	6	8	6	9	5	0	6	5	1	4	=	B. <i>b</i>	
	9	3	0	4	3	2	9	6	4	2	4	7	0	0	1	1	4	5	=	C. <i>c</i>		
	7	4	5	3	8	8	8	7	3	3	1	8	3	2	5	8	4	=	D. <i>d</i>			
	6	4	6	9	3	0	8	4	2	4	3	2	5	9	5	0	=	E. <i>e</i>				
		5	8	9	4	8	2	7	0	1	7	4	7	5	3	9	=	F. <i>f</i>				
			5	5	4	9	8	6	6	6	1	2	7	1	3	0	=	G. <i>g</i>				
				5	3	4	9	1	3	8	2	9	9	2	5	2	=	H. <i>h</i>				
					5	2	4	7	4	9	2	9	2	7	6	8	=	I. <i>i</i>				
						5	2	1	9	1	0	8	8	0	5	8	=	K. <i>k</i>				
							5	2	4	8	4	3	5	6	5	4	=	L. <i>l</i>				
								5	3	2	5	8	2	1	0	7	=	M. <i>m</i>				
									5	4	4	5	2	2	3	5	=	N. <i>n</i>				
										5	6	0	2	9	3	9	=	O. <i>o</i>				
											5	7	9	6	8	5	=	P. <i>p</i>				
												6	0	2	6	0	=	Q. <i>q</i>				
													6	2	9	0	=	R. <i>r</i>				
														6	5	9	=	S. <i>s</i>				
															6	9	=	T. <i>t</i>				
																7	=	V. <i>v</i>				
																	9	=	X. <i>x</i>			
																		+	Y. <i>y</i>			

3	2	2	5	0	8	9	6	1	5	4	7	9	6	1	3	4	8	5	9	2	Summa,
3	4	6	4	1	0	1	6	1	5	1	3	7	7	5	4	5	8	7	0	5	5
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4	6	3
																				Periph. Circ.	

Series hæc cum numeris LUDOLPHI prorsus consentit: notæ enim ultimæ non habetur ratio, quia accurata non est, saltem dubia, propterea quod ignoratur, qualis sit proditurus, si calculus produceretur. Equidem calculus hic videtur admodum prolixus; quod si tamen quis eundem conferre voluerit cum calculo LUDOLPHI in Libro *de circulo & adscriptis*, facile intelligit, quanto *Ludolphinus* sit operosior & molestior. Immo

si quis seriem *Leibnitianam* in fractiones decimales resolvere vellet, multo prolixiore calculo haberet opus, antequam peripheriam circuli ad tot loca produceret.

§. 245. Quamvis autem ex allato exemplo abunde perspiciatur, quomodo seriebus infinitis sit utendum; non inconsultum tamen existimamus alterum adhuc addere exemplum. Si sinus arcus sit y , sinus totus seu radius circuli 1; erit arcus

$\Rightarrow y$

$$30792 = A. a$$

$$1357 = B. b$$

$$93 = C. c$$

$$7 = D. d.$$

$$32249 \text{ Summa}$$

$$346410 = \frac{1}{4} \sqrt{192}$$

314161 Peripheria circuli, in qua quatuor numeri 3141, ut ante, cum *Ludolphinis* consentiunt.

§. 246. Quod si resolutio serierum infinitarum hic data probe perpendatur; nullus dubito fore ut, in seriebus ad usum aptandis, nihil posthac supersit difficultatis. Inprimis autem hinc perspicitur, quantum interfit, ut lex progressionis in infinitum fit manifesta; ne multo labore demum investigandi sint termini, quibus habemus opus, & ut termini sequentes inveniuntur ex antecedentibus; sive id fiat per dependentiam eorundem a se invicem in formula generali, quemadmodum in exemplo altero (§. 245), sive id singulari quadam ratione contingat in casu particulari, quemadmodum in exemplo primo (§. 244). Intelligimus etiam quanta, in tractandis altioribus, attentione opus sit ad maxime vulgaria, ne ea eidem sese subducant, & per ambages incedamus, ubi brevior ducit ad scopum via. Ex. gr. notissimum est ex communi Algorithmo fractorum, si $\frac{1}{2}$ dividas per 9, quotum esse $\frac{1}{2^2}$; si $\frac{1}{2^2}$ porro dividas per

9, quotum esse $\frac{1}{9^3}$ & sic porro in in-

finitum. Enimvero, si in exemplo primo huc animum minime advertas, & $\sqrt{192}$ sive 13. 8564064605510 18348219 dividere velis per 9, per 9^2 sive 81, per 9^3 sive 279 & ita porro, operoso calculo invenies numeros A, B, C, D &c. qui, continua divisione antecedentis per 9, multo facilius eruuntur. Immo si quis una divisione terminum quemcunque resolvere vellet, v. gr. secundum $\frac{3}{15.9} \sqrt{192}$ sive

$$\frac{3}{135} \sqrt{192}, \text{ multiplicando scilicet}$$

13. 85640 &c. per 3, & factum dividendo per 135; in ambages multo longiores incideret; adhuc longiores futuras, si terminus quilibet reduceretur ad pure irrationalem & ex eo extraheretur radix, veluti si fieret $\frac{3}{135}$

$$\sqrt{192} = \sqrt{\frac{1728}{18225}} \text{ atque inde ex}$$

traheretur radix. Non existimandum est, talia inutiliter moneri: nisi enim ad ea animum reflectamus, ubi obvia sunt, attentioni nostrae sese subducent, ubi magis latent. Illustraria dare poteramus exempla, nisi nostrum foret ab invidiosis abstinere, quae nulla necessitas imperat. Ad vitandam itaque *αἰσχυρίαν* sedato opus est animo; ne appetitus influat in determinationem operationum intellectus, in qua nullae ipsius sunt partes. Distinctae notiones nullibi

nullibi negligendæ sunt, ubi earum participes fieri possumus; præsertim si quis philosophari constituit, & ad vitæ perfectionem tanquam ad scopum tendit. Diximus insuper, quam difficile sit de prærogativa formulæ unius præ altera statuere, nisi utriusque resolutione observatis omnibus, quæ observari possunt, facta. Sane si formula posteriore utaris pro circulo, & terminos resolutos sibi invicem legitime subordinas, & idem facias cum priori; videbitur posterior priori longe anteposenda. Enimvero si totam operationem in casu priori conferas cum tota in altero; præsertim ubi divisionem per novenarium transmutas in subtractionem (§. 116 *Aritlm.*); longe aliter senties. Nolo addere plura, ne videar in levioribus commendandis nimius; præsertim iis, qui, cum in calculis confesescere decreverint, nec studii Mathematicos utilitatem extra Mathesin quarant, illorum fructum prospicere nequeant.

§. 247. In capite de cubatione solidorum & complanatione superficierum tantummodo notandum est, quomodo elementa solidorum & superficierum eorundem inveniantur; & quomodo per calculum summatorum, eruta soliditate vel superficie corporis rotundi, investigentur per calculum literalem theorematum praxi inservientia. Inprimis hic attentionem meretur, quomodo solidum unum transformetur in aliud ipsi æquale. Ea cum facilia sint, pauca tantummodo

speciminis loco exhibuimus; cum unusquisque per se plura addere possit.

§. 248. Methodus tangentium inversa maximæ utilitatis est in sublimioribus, atque ideo maximam quoque meretur attentionem. Ejus saltem primas lineas duximus; ut nascatur methodi hujus idea in animis tyronum; ne hæsitent in problematis, quæ in Mechanica traduntur. Duo autem hic præ ceteris notanda sunt; primum quomodo constructio æquationum reducatur ad quadraturam curvarum simpliciorum & earundem rectificationem, ut appareat, quomodo solvantur problemata, supposita quadratura curvæ vel rectificatione arcus; deinde quomodo ex æquatione differentiali ad logarithmicam deducatur modus differentianti quantitates, quas logarithmi ingrediuntur (§. 243 *Anal. infin.*). Hujus enim usus insignis est in inveniendis logarithmis, tam numerorum vulgariū, quam sinuum, atque tangentium; quemadmodum capite sexto docetur. Eodem quoque artificio nititur calculus exponentialis, quem integra sectione tertia exposuimus, & constructio curvarum exponentialium, ope logarithmicæ, atque quantitatum, quas logarithmi ingrediuntur; cujus exempla dedimus capite altero hujus sectionis. Hinc vero elucet insignis lineæ logarithmicæ utilitas, quam nemo prævidere poterat, iis probe notanda, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Ratio-

nem jam dedimus in superioribus (§. 176).

§. 249. Artificia, quibus utimur in investigando modo differentiandi differentialia (§. 297 *Anal. infin.*), eadem sunt, quæ ante adhibuimus ad investigandas regulas differentian-di quantitates finitas, & quæ jam nobis innotuere in calculo literali, ubi algorithmum fractionum ex algorithmo integrorum, & algorithmum irrationalium ex algorithmo rationalium deduximus; ut adeo hinc appareat, quomodo quæ vulgaria videntur, hand raro profint ad altiora; & quam utile sit ad artificia, quibus utimur in facilioribus, animum attendere, ne impervia nobis videantur magis ardua. Cum Methodus determinandi puncta flexus contrarii curvarum non minus utilis sit, ad ductum curvarum repræsentandum, quarum præter æquationem nihil novimus, quam methodus de maximis & minimis, & methodus determinandi puncta, in quibus curva rectam positione datam secat, quam in superioribus illustravimus; illa vero a calculo differentiali pendeat; eandem quoque exemplis nonnullis illustrare lubuit. Etsi enim curva integra nondum construi possit; ope tamen punctorum, quæ per eas methodos determinantur, ductum ejus imaginari licet. Exempla occurrent in Mechanica.

§. 250. In doctrina de evolutione curvarum, quam capite tertio

proponimus, notatu maxime dignum est, quod cyclois sua evolutione se ipsam describat (§. 350 *Anal. infin.*); cum hoc faciat ad perfectionem motus penduli, quo horologia automata ad maximam perfectionem perduntur, quemadmodum in Mechanicis demonstratur. Sane ea ipsa permovit HUGENIUM, ut de evolutione curvarum cogitaret, sicuti ex egregio Mathematici summi *Tractatus de horologio oscillatorio* intelligitur. Notandum præterea, quod inserviat rectificationi curvarum, & ipsam curvedinem curvæ discernat; ut arcus circuli osculatoris pro arcu curvæ alterius in praxi substitui possit (§. 331 *Anal. infin.*). Applicatio calculi differentialis in hoc argumento nihil habet, quod non sit ex anterioribus manifestum. Hoc tamen adhuc attentionem meretur, quod determinatio radii osculi, seu evolutæ, interdum faciat ad theoremata selecta eruenda, quemadmodum exemplo logarithmicæ docemus (§. 332 *Anal. infin.*).

§. 251. Arithmetica infinitorum, invento calculo differentiali & summatorio, non amplius eum habet usum quem habere poterat, si is nondum fuisset inventus. Eam tamen prætermittendam esse non duximus; ne quod sit inventum, celebre inter recentiores Mathematicos nomen adeptum, quod a nobis non illustretur. Etsi autem pauca tantummodo de ea tradidisse videamur, plura ta-

men

men dedimus, quam in prolixo opere ISMAELIS BULLIALDI continentur. Eam illustrare voluerat JOANNES CHRISTOPHORUS STURMIUS in *Mathesi enucleata*; sed cum esset artificiorum recentiorum ignarus, quod sibi proposuerat non perfecit. Quæ de termino ultimo seriei continuatæ evanescente notanda sunt, satis perspicue exposuimus (§. 345 *Anal. infin.*), ut plura eam in rem annotari minime sit opus. Ratio, cur usum Arithmeticæ infinitorum extendi quasi in infinitum licuerit ultra terminos, intra quos a BULLIALDO coërcetur, in summatione

potentiarum & numerorum pyramidalium consistit, quam in Analyfi finitorum universali quadam ratione absolvimus (§. 200 & *seqq.* & §. 216). In Arithmetica enim infinitorum semiordinatæ curvarum spectantur tanquam in certa numerorum serie progredientium, veluti potentiarum dati cujusdam gradus in curvis parabolici generis (§. 349, 350 *Anal. infin.*). Unde analyfi ad analysin Veterum propius accedente, quadraturæ curvarum quadrabilium deducuntur in Arithmetica infinitorum. Atque hoc artificium heuristicum notari meretur.

CAPUT V.

De Studio Mechanicæ.

§. 252. **M**echanica a Veteribus inventa fuit in usum machinarum: Veteres enim laudabili exemplo in theoria semper respiciebant ad usum in praxin; quippe cum in omni theoriæ genere intendenda sit praxis, quemadmodum in Philosophia sedulo inculcamus. Primas ejus lineas duxit ARCHIMEDES in libris de æquiponderantibus, nec ultra eos terminos progressi sunt Mathematici usque ad GALILÆUM. Quoniam machinæ omnes ex paucis quibusdam machinis simplicibus componuntur, quas potentias mechanicas appellare solent, nos machinas

simplices diximus; in Mechanicâ non considerarunt nisi machinas simplices, vectem, axem in peritrochio, trochileam, cochleam, planum inclinatum & cuneum, quarum theoriam amplissimam, sed nimis diffusam dedit VARIGNONIUS in opere posthumo. Considerarunt autem machinas hæc simplices in statu æquilibrii, in quo nonnisi adest conatus ad motum, quam vim mortuam vocat LEIBNITIUS; propterea quod sublato æquilibrio, dum potentia motrix augetur, nascitur motus diversæ celeritatis, pro diverso illius incremento, seu excessu potentie

motricis supra pondus movendum. Inde est quod, in agitandis machinis, non modo potentia motrices conferantur cum pondere movendo; verum etiam ipsamet ad pondus ipsi æquale, & resistentia in motu machinarum superanda ad pondus æquivalens reducuntur; quatenus potentia cuilibet motrici, quoad effectum, substitui potest aliquod pondus, vi gravitatis, qua ad descensum urgeatur in machinam agens, seu eandem animans; & resistentiis superandis substituere licet pondus eandem potentiam motricem requirens, si elevari debet. Atque hæc probe notanda sunt tyronibus, ut & mentem Veterum plenius assequantur, & in applicatione theoriæ machinarum simplicium ad praxin, hoc est, ad machinas compositas explicandas nihil sentiant difficultatis. Patet hinc, quod LEIBNITIUS asseruit, Veteres nonnisi vis mortuæ notionem habuisse. GALILÆUS in *Dialogis de motu* ulterius primum progressus, & motum gravium descendendum, & projectorum explicare cœpit, non infeliciter: cum vero in finem præmiserit theoriā motus æquabilis. Attingit etiam nonnulla de motu pendulorum, sed quasi obiter. Accuratus vero, & data opera, in eundem inquisivit HUGENIUS in Tractatu *de Horologio oscillatorio*, & theoriā inprimis centri oscillationis superaddidit. Occasione motus pendulorum idem incidit in vim cen-

trifugam, quam in circulo ad examen revocavit, adjectis in fine Tractatus de horologio oscillatorio theorematibus de vi centrifuga, quorum demonstrationes demum publici juris factæ sunt in posthumis. Inde NEWTONUS vires centrales, tam centripetas, quam centrifugas considerare cœpit etiam in curvis aliis, præsertim centripetis, & ad explicandum motum Planetarum theoriā transtulit, in *Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis*. CARTESIUS, in *Principiis Philosophiæ*, leges motus ex percussione explicare aggrediebatur, sed non satis feliciter, cum ad veritatem liquidam pertingere non potuerit. Postea vero WALLISIO, CHRISTOPHORO WREN & HUGENIO negotium feliciter cessit; quorum ille leges motus corporum non elasticorum, hi vero corporum elasticorum bene explicarunt. Quoniam autem motus corporum diminuuntur propter resistentiam mediæ, in quo moventur; in eandem quoque inquirere cœpit WALLISIUS; deinde vero hoc argumentum ulterius profecutus est NEWTONUS in *Principiis* modo laudatis. Denique, cum calculus differentialis esset inventus, & a Geometris præclaris, quos inter eminent BERNOULLII fratres, ad solutionem problematum physico-mechanicorum transferretur; descensus & ascensus corporum in lineis curvis expendi cœpit. Atque sic tandem latissimus evasit

evasis Mechanicæ campus, qui arctis nimium limitibus a Veteribus includebatur. Nos igitur Elementa Mechanicæ daturi, quæ satisfacerent, non minus inventorum antiquorum, quam recentiorum rationem habuimus. Hæc probe notanda sunt, ut idea quædam Mechanicæ animo concipiatur, definitio rectius intelligatur, nec quisquam miretur, ubi viderit, in Elementis nostris Mechanicæ longe alia pertractari, quam quæ vulgo in libellis hujus nominis reperiuntur.

§. 253. Qui solam praxin mechanicam curæ cordique habent, ii, prætermisiss ceteris omnibus, ad caput decimum quintum statim digrediantur: in eo enim & sequentibus continentur, quæ ad machinarum intellectum faciunt. Quoniam nobis theoriam cum praxi semper conjungere proposuimus, potentiarum quoque motricium ad machinas applicationem, & machinarum usitatorum constructionem explicare voluimus: quæ duo vulgo in libellis mechanicis negliguntur. A potentiarum motricium ad machinas applicatione pendet structura externa machinarum, quæ absque illa intelligi nequit; quemadmodum structura interna non intelligitur absque notitia machinarum simplicium. Libellatio vulgo in Geometria practica docetur: sed cum nos Geometriam practicam a theoretica non separaverimus; libellationis vero indispensabilis usus

fit in construendis molendinis, quæ aquarum vi agitantur; eandem quoque hic explicare visum fuit, ubi de applicatione potentiarum ad machinas agitur. Quoniam tamen ad machinas applicantur, quæ de æquilibrio solidorum c. 3, quod de centro gravitatis agit, demonstrantur in prima ejus parte, & quæ c. 4, de quiete & lapsu corporum gravium docentur; expensis definitionibus machinarum simplicium, addendæ sunt definitiones ac propositiones horum capitum, eo modo, qui ad primum cognitionis gradum acquirendum sufficit. Ubi vero animo satis comprehenderit, quæ ad machinas, tam simplices, quam compositas spectant; non inutile fuerit, si ceterorum quoque theorematum notitiam quandam tibi compares ex anterioribus, prætermisiss tantummodo problematis, quæ analytice solvuntur per calculum; ne ignores principia, quæ in praxi accuratiori usui sunt.

§. 254. Qui praxin mechanicam demonstratam expetit, ad secundum cognitionis gradum adspirans; cum addere debere demonstrationes per se patet. Non tamen ideo necesse est, ut omnis theoriæ campum emetatur; sed sufficiunt ea, quæ ad intellectum machinarum faciunt. Quænam vero ea sint, facta demonstrationum cap. 15, contentarum analysis, eo quidem modo, quam in Logica (§. 922.) satis distincte explicavimus, & exemplis illustravimus, docet.

docet. Quod si quis praxin ante haurerit, quam ad theoriam accedat, quemadmodum modo (§. 253) inculcavimus; ei haud difficile fuerit ea, quæ sibi usui sunt, discernere a ceteris, quæ insuper habere potest. Nec nocet, si vel maxime quædam addiscat, quorum in machinis usum nullum perspicit: neque enim solum fieri potest, ut in posterum usus quidam sese offerat, qui prævideri haud quaquam poterat; verum etiam omnis theoriæ tractatio certissimam spondet in firmandis ratiociniis mechanicis utilitatem, & menti acumen quoddam conciliat, ut perspicacius videamus aliis, in iis quæ ad machinas spectant. Acumen vero mechanicum, & prompta de machinis ratiocinatio, non nullius censeri debet momenti.

§. 255. Qui denique ad tertium cognitionis gradum aditum sibi parare gestit, is nihil eorum prætermittere debet, quæ in Elementis nostris Mechanicæ continentur; sed omnia potius accurata industria persequi tenetur; quemadmodum in superioribus in genere præcepimus. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, intendit habitum ex iis, quæ cognovit, inveniendi alia sibi adhuc incognita. Opus igitur habet principiis, quibus in ratiocinando utatur; opus habet artificiiis heuristiceis, quæ data occasione imitetur. Quæ a nobis demonstrantur, vel analytice eruuntur, sunt principia, per quæ aditus

patet ad ulteriora. Resolutiones analyticae problematum, quas damus, continent artificia heuristica a lectore attento annotanda, vi perspicacia quam inculcavimus, cum de studio Algebræ ageremus. Atque ea ratio est, cur problemata physico-mechanica in casu particulari solverimus, in quo soluta a primis inventoribus; etsi subinde quoque docuerimus, quomodo problemata particularia ad universalitatem reducantur. Plus enim artis plerumque deprehenditur in solutionibus particularibus, quam in universalibus; multoque difficilius fuit primis inventoribus dare solutiones particulares, quam deinceps aliis, qui iisdem omnem universalitatem conciliare voluerunt. Quamobrem qui non ad pompam scripsimus, (levitate quadam animi in ambitionem adducti, quæ cum condonanda sit homini in lineis & calculis ætatem omnem consumenti, ob egregia in scientiam merita, in Philosopho tamen ferenda non est, qui non minus appetitum, quam intellectum, seu facultatem cognoscitivam perficere tenetur;) sed utilitatem discantis unice respicimus, ad quam tanquam ad metam contendimus; eundem quoque a via regia deducere non debuimus, quam calcarunt, qui ad inaccessible aditum pararunt; ut appareat, quomodo quæ impervia videntur, humano ingenio pervia reddantur. In imprimis cognitu utilissimum, si non necessarium, dicendum

his qui Artem inveniendi extra Mathesin exercere sibi propositum habent. Postquam enim abunde convicti sumus, quam necessarium sit, studio Matheseos etiam sublimioris, perficere intellectum, ut extra ejus pomœria inoffenso pede progrediaris; hanc quoque utilitatem, vulgo non satis animadversam, etsi a multis commendatam, in conscribendis Elementis nostris intendimus, operamque dedimus, ne vana spe lactaremus lectoris animum.

§. 256. Enimvero non opus est, ut ad particularia descendamus: necque enim alia re opus est, quam ut ea, quæ superius de studio Matheseos in genere, & de studio præsertim Algebrae in specie, præcipimus, ad lectionem Mechanicæ transferantur. Quamvis enim hinc inde nonnulla scitu non inutilia annotari poterant; tantam tamen prolixitatem non fert præsens institutum; & qui per superiora ad ea, quæ sunt methodi, sufficientem attentionem, cum acumine, ubivis asserre didicit, perspicillis propriis usus animadvertet, quæ eum subterfugere non debent, nec manu ductione alterius indiget, qui firmo pede incedere valet. De duobus tamen artificiis, quibus utimur in Mechanicis, prorsus silere nefas est; propterea quod in Mathesi pura iisdem locus non est, in Philosophia tamen naturali, & in ipsa quoque morali, maximam utilitatem habent. Ut facilius intelli-

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

gantur, quæ dicenda sunt; sumamus casum particularem. Gravia moventur in rerum natura per medium resistens, veluti per aërem, aut aquam. Enimvero in Mechanicis consideramus primo motum gravium in medio non resistente; qualis nempe foret, si nihil adesset, quod motum ejus quomodocunque impediret; seu quatenus a sola gravitate tanquam causa dependet. Ubi enim constat, qualis sit per se, nec difficile est postea quoque definire, quid per resistantiam medii detrahatur; ut intelligatur, qualis sit in medio resistente. Similiter in æquilibrio solidorum, pondera primum consideramus tanquam lineis gravitatis expertibus applicata; ut quale in se sit pateat. Deinde vero idem applicamus ad pondera ex gravibus suspensa, veluti longurione aut hasta quadam ferrea. Eodem prorsus modo, in Philosophia morali, appetitus sensitivus consideratur in se, independenter a rationali; deinde vero etiam, quatenus ab eodem dependet, & vice versa. Similiter appetitus spectatur ut dependens a solo sensu, deinde vero ut simul dependens ab imaginatione. Qui concursum plurium facultatum ad eandem actionem non distincte expendunt, ut sigillatim inquirant, quid ab unaquaque proficiatur; nunquam ad veritatem liquidam pertinent; sed summa imis miscent; aut cœcutientes hæsitant, quid statuere debeant; & veritatem, vel nullam

S s

agno-

agnoscunt, vel eam rationi humanae imperviam temere pronunciant. Deinde probe quoque notandum venit artificium, quo problemata physico-mechanica reducuntur ad Geometriam puram, ut per eandem solutionem in potestatem redigatur: id quod imprimis locum habet in transitu Geometriæ ad Physicam; ut tractare naturam mathematice liceat. Utile est hoc artificium in omni cognitione mathematica, qualis etiam locum habet in Psychologia, & in variis Philosophiæ practicæ capitibus; etsi hæcenus de ea non cogitarint Mathematici; quippe principiorum philosophicorum ignari, nec Philosophi, qui subtilitates mathematicas a se alienas existimarunt. Erit autem tempus, quo, Philosophia nostro more magis exculsa, cognitionem mathematicam ultra eos, intra quos hæcenus coarctatur, terminos etiam ad talia provehent, in quibus quod locum habeat, hæcenus vix sibi persuadere patiuntur. Quæ hic speciminis loco in medium afferuntur, excitare debent attentionem lectoris ad ea artificia, quibus methodus amplificatur, & quæ pauci in Mathesi imitantur in casu simili; extra eandem vero ut adhibeat nemo cogitat.

S. 257. In resolutione problematum physico-mechanicorum, id quoque considerandum est, utrum solvantur in hypothese naturæ, an vero in aliena. Illud obtinet, si quod sumitur in rerum natura, revera ita

fese habet; hoc autem, si minus. Exempli loco esto acceleratio gravium. Motum gravium continuo accelerari, experientia constat; nec minus liquet, naturæ conveniens esse, ut certa lege acceleretur. Quodsi, in solutionibus problematum de motu gravium, lex accelerationis sumatur, qualis obtinet in rerum naturæ, eadem in hypothese naturæ solvuntur. Si vero alia sumatur, quam quæ in rerum natura obtinet; eadem solvi dicimus in hypothese aliena. Geometriæ perinde est, in quacunque hypothese problema solvat, modo hypothesis non sit impossibilis, libera nimirum a contradictione. Enimvero in Physica non sunt usus nisi solutiones, quæ hypothese naturæ nituntur. Hinc qui nonnisi Geometram agit, problema solvit in omni hypothese possibili; Physico relinquens ut hypothese naturæ definiat, & ad eandem solutionem generalem applicet, vel ex pluribus particularibus eam feligat, quæ instituto suo convenit. Quod si dicas, solutiones in hypothese aliena nullius esse utilitatis; lubens concedo, si non de alia utilitate sermo fuerit, quam quæ in Physica locum habet; nego autem, si de utilitate simpliciter sermo fuerit. Neque enim destituitur suo in Mathesi pura usu; qualis est incrementum Artis analyticæ magni omnino faciendum. Non igitur contemnenda sunt magna Geometrarum molimina, quæ per se ad cognitionem natu-

ræ mathematicam nil conferunt. Sufficit enim detegi methodos, per quas ea in potestate nostra constituitur, quam primum hypotheses naturæ innotuerunt. Quid quod solutiones problematum, in alienis hypothesebus factæ, conducant ad illas investigandas; quatenus ad experimenta ducunt, de quibus alias non cogitare daretur. Quoniam principia Philosophiæ naturalis mathematica cognitioni naturæ mathematicæ inservire debent; rigorose loquendo talia non sunt, nisi quæ hypothesebus naturæ nituntur. Et si certam desideres cognitionem, hypotheses naturæ evinci debent, ne de earum veritate ullum superfit dubium. Quoniam tamen indirecte ad cognitionem naturæ mathematicam profunt, quæ ex alienis quoque hypothesebus ducuntur, quemadmodum modo annotavimus; & in Physicam quoque admittuntur hypotheses philosophicæ, etsi nondum certæ, probabilitate tamen non destitutæ, quatenus ad veritatem liquidam inveniendam viam sternunt (§. 127 *Disc. prelim.*); sit ita, quod non ingredi debeant, tanquam principia, demonstrationem propositionum, quæ in Physicam tanquam dogmata admittuntur (§. 128 *Disc. prelim.*); imprudens reprehenderit, quod principia Philosophiæ naturalis mathematica dicantur, quæ ex hypothesebus alienis, & ex aliis, quas naturæ hypotheses esse nondum certo constant, deducuntur.

Ecquis propterea invideret titulum *Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum* celebratissimo operi Viri summi ISAACI NEWTONI; quo magno suo merito tantam nominis celebritatem consecutus? Cauti tamen ac circumspecti esse debemus; ne quæ, ob usum quem indirecte habent, principia Philosophiæ naturalis mathematica tolerando sensu dicuntur, pro principiis proprie ac rigorose dictis habeantur: hoc enim cederet in detrimentum scientiæ philosophicæ. Nemo igitur Philosophus probaverit, si qui hypotheses *Newtonianas*, eas præsertim, quibus nonnisi in Mathesi locus conceditur, pro principiis Philosophiæ naturalis sumunt, & nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpunt; non modo Physicam cum Philosophiâ, hoc est, cum genere speciem, verum etiam cognitionem mathematicam cum philosophica confundentes. Etsi in Virorum magnorum meritis extollendis liberales simus; non tamen eorum laudes in præjudicium veritatis producimus: id quod ne quidem in adulate ferendum. Valet hic quam maxime tritissimum illud; Amicus Socrates, amicus Plato, amicus Aristoteles, sed magis amica veritas. Ceterum notandum est, inter hypotheses alienas & hypotheses naturæ, dari genus quoddam earum intermedium, quæ non invita experientia, ob commoditatem praxeos, in locum

hypothesium naturæ assumi possunt, immo debent; ne præter necessitatem difficultatibus praxin immergas, quam simplicem ac expeditam esse oportet; & quas adeo convenienter admodum *Vicarias* dixeris. Exemplum habemus in motu gravium. Cum gravia vi gravitatis ferantur ad centrum terræ, in motu projectorum directiones sunt convergentes, utpote in centro Terræ concurrentes. Hypothesis adeo directionum convergentium, naturæ hypothesis est. Hoc tamen non obstante, recte cum GALILÆO in ejus locum surrogatur hypothesis directionum parallelarum; propterea quod in iis distantis, in quibus experimenta sumere licet, lineæ convergentes pro parallelis citra errorem assignabilem, in praxi inde metuendum, haberi possunt. Referendæ sunt hypotheses istæ vicariæ ad ea, quæ sunt toleranter vera; & quorum plurima in Mathesi occurrunt exempla, ex ea in Philosophiam minime inferenda.

§. 258. Quoniam in rerum natura nulla nisi motu contingit mutatio; Mechanica vero motus scientia est; ad quam etiam recte refertur status æquilibrii, quo sublato, oritur motus; dubium superesse potest nullum, quod Mechanicæ principia in explicandis naturæ phænomenis usum habeant. Quamobrem qui in usum Physicæ Mechanicam addiscit; definitiones ac theoremata de motu, & æquilibrio solidorum, cognita atque

perfecta sibi reddere debet. Quodsi demonstrationes difficiliiores videantur, quam ut eas capere possit; vel si tantum temporis impendere nolit, quantum iis percipiendis sufficit; satis erit, si historicam saltem cognitionem sibi acquisiverit, in eo cognitionis gradu acquiescens, quem supra primum diximus. Quando enim principia mechanica in Physica applicantur, non attenta demonstratione, sumuntur tanquam vera; adeoque quoad applicationem perinde est, sive demonstrationem animo comprehendis, sive eam non attigeris. Absit autem, ut quis sibi persuadeat, nos Philosophum a demonstrationibus mathematicis arcere velle; quas non modo necessarias agnoscimus, ne sine convictione tanquam verum sumas, quod ad reddendam rationem phænomenorum naturæ applicas, consequenter ut certa tibi sit rerum naturalium cognitio; verum etiam quia habitus demonstrandi, omni modo perficiendus, ad recte philosophandum in Physica conducit; immo nec in eadem demonstrationibus geometricis semper supersedere licet, etsi cognitionem mathematicam a philosophica separaveris. Ceterum non inutile est præcipua theoremata mechanica, in eorum gratiam qui demonstrationes capere, vel non possunt, vel nolunt, experimentis comprobari; ut veritatem a posteriori agnoscant, quam a priori agnoscere minime valent: id quod in Physica tanto

tanto magis satisfaciunt, quanto plura in eadem assumenda sunt, nonnisi experientiæ fide. Profunt autem experimenta mechanica etiam Mathematicis, ut constet de rationis cum experientia consensu, tantoque magis exploratum sit, quod ratiocinando veritatem fuerint affectuti. Eadem commendanda sunt iis, qui solam praxin Mechanicæ curant, ne in reddendis rationibus sumere teneantur, sola auctoritate aliena confisi, quæ nullo modo vera perspiciunt.

§. 259. Qui ad Mathesin sublimiorem aspirant, iis imprimis commendanda sunt, quæ in capite primo, usque ad decimum quartum inclusive, leguntur. Etenim iis familiaria esse debent theoremata de motu, quemadmodum theoremata de ratione quantitatum, & theoremata Geometriæ elementaris familiaria experiri debet, qui in Mathesi inoffenso pede progredi voluerit. Dedimus præterea problematum physico-mechanicorum solutiones, quæ Analyseos applicationem insinuant, qualis in Mathesi sublimiori requiritur; ut adeo artem doceamus per exempla, quemadmodum in Algebra fecimus. Quemadmodum adeo, cum de studio Algebrae ageremus, docuimus quomodo annotanda sint artificia in futurum usum, & hinc inde memoriæ insigenda theoremata, quæ analytice eruuntur; ita utrumque etiam quoad problemata in Mechanica soluta notandum. Proluxum nimis fo-

ret, si eadem industria, qua in explicando Algebrae studio usi sumus, hic quoque singula perlustrare vellemus. Quamobrem hoc propriæ lectoris ad superiora satis attentæ meditationi relinquimus.

§. 260. Denique demonstrationes syntheticas analyticis miscuimus; cum ad utrumque genus præparare voluerimus lectorem nostrum. In demonstrationibus autem syntheticis accuratam servavimus formam, quam vi regularum logicarum habere debent: id quod facile experietur, qui easdem eodem modo resolvere voluerit, quo supra geometricas resolvere docuimus. Proposuimus quoque demonstrationes completas, ne quid divinandum lectori relinquatur; quemadmodum faciunt qui peritis scribunt; ac ideo citamus, quæcunque ex Arithmetica & Geometria elementari sumuntur; ne a studio Mechanicæ arceantur, qui Mathesin puram nondum adeo familiarem experiuntur, ut per se assequantur, quæ ex anterioribus supponuntur. Ac idem observamus in problematum analytica resolutione; ne quid desit, quod ad facilitandum eorum intellectum conducere possit. Neque enim hoc pacto solum consequimur, ut lector nostrorum Elementorum, absque multo laboris ac temporis dispendio, addiscat quæ discenda sunt; verum etiam ut meditationibus consummatis adfuescat, quibus in Philosophia, & superioribus, quæ dicuntur, Facultatibus opus habet.

CAPUT VI.

De Studio Hydrostaticæ, Aërometriæ & Hydraulicæ.

§. 261. **H**Ydrostatica tota cognitu utilis iis, qui praxi Mechanicæ student. Sufficit autem iisdem primus cognitionis gradus. Enimvero ne sensus theorematum videatur obscurus, singula exemplis numericis illustranda. Ex. gr. Theorema 14, §. 55, hujus tenoris est: *Corpus specificè gravius, in fluido leviori, eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.* Ponatur itaque corpus specificè gravius, quod aquæ immergitur, esse cubum, cujus latus unitus pedis. Cum juxta MORLANDUM (§. 65) pes cubicus aquæ sit 70 librarum, cum 2 unciis; quodlibet corpus, aqua specificè gravius, amittet pondus 70 librarum & 2 unciarum. Quodsi ergo totum pondus fuerit 100 librarum; intra aquam suspensum non erit nisi 29 librarum, 14 unciarum. Siquidem veritatem principiorum hydrostaticorum a posteriori cognoscere volueris; facillime singula experimentis comprobari possunt, qualia descripsi Tomo primo Experimentorum idiomate patrio evulgatorum. Theoremata, quæ capite primo de corporum gravitate & levitate specifica leguntur, solis exemplis numericis illustrari suffi-

cit. Ex. gr. Theorema 1, §. 17; tale est: *Si duo corpora eandem densitatem habuerint; massæ sunt ut volumina.* Sumamus adeo duos dari globos plumbeos, quorum unus 5, alter 9 librarum. Quoniam massæ, seu quantitates materiæ, æstimantur pondere, quemadmodum in vulgus notum est; erunt etiam volumina, seu magnitudines horum globorum, ut 5 ad 9; nempe si magnitudo minoris divisa concipiatur in partes quinque æquales, istiusmodi partium 9^a erit magnitudo majoris. Quodsi ergo magnitudo unius constiterit in mensura absoluta, veluti si detur in digitis cubicis Rhenanis; per regulam trium invenietur in eadem mensura alteræ. Istiusmodi exempla simul ostendunt theorematum usum, quem facere possunt, qui praxi operam dant. Erunt autem tanto utiliora, & tanto certiorum spondent usum in praxi, si fuerint vera, numeris per experimenta definitis.

§. 262. Multum quoque usum habet Hydrostatica in Philosophia naturali; cum multorum phænomenorum inde reddatur ratio. Quamobrem si quis Mathematum imperitus ad Physicam accedit, principiorum tamen hydrostaticorum ignarus esse

esse non debet. Consultum igitur est, ut primum saltem cognitionis gradum acquirat, eadem observans, quæ modo præcepimus (§. 258). In primis autem qui Physicæ operam navare decrevit, principia hydrostatica, experimentorum fide, tanquam vera amplecti, sibi quæ familiaria reddere debet. Experimenta huc facientia dabimus suo loco, quando ordo in Philosophia nos ad experimenta physica describenda, & principia quæ in scientia naturali usui sunt, inde stabilienda deducet. Quinam vero sit horum principiorum in Philosophia naturali usus, suo patebit loco, ubi eandem eadem methodo trademus, quæ hactenus in Metaphysica usi sumus, & nunc in Philosophia practica utimur. Quod si quis in omni Mathesi fuerit prorsus peregrinus ac hospes, historicam tamen propositionum hydrostaticarum cognitionem acquirere valet, observans ea quæ de primo cognitionis gradu supra, capite primo docuimus, & breviter præcedente paragrapho annotavimus; modo sibi terminos quosdam perspectos reddat: id quod facile fieri poterit, si indicis auxilio evolvat definitiones, quibus explicantur; veluti quid sibi velit ratio composita, quid directæ, quid reciproca, qui termini in Arithmetica explicantur. Sane etiam Mathematicum imperitus terminis tamen mathematicis uti debet, quoties aliis verbis mentem suam commode ex-

primere non licet, seu quoties loquendum de iis quæ ad objectum Mathematicorum spectant; quemadmodum Physicus terminis Medicorum utitur, si de rebus ad Medicinam pertinentibus ipsi dicendum. Qui enim de re quadam loqui vult, nosse quoque debet nomen ejus.

§. 263. Equidem demonstrationes hydrostaticæ nihil prorsus habent difficultatis; præsertim si quis in anterioribus, multo difficilioribus, jam fuerit versatus; negandum tamen non est, quod, cum subsidio figurarum destituamur, quæ imaginationem juvant, termini generales, quibus hic utimur, eas reddant captu difficiliores, quemadmodum ipsas propositiones intellectu. Consultum igitur est, ut demonstratio applicetur ad casum particularem, quemadmodum fecimus in theoremate 14, §. 55, ubi pro corpore specificè graviori sumimus cubum pollicarem plumbeum, pro fluido leviori aquam; adeoque pro volumine cubum pollicarem seu digitum cubicum. Hoc pacto enim idea imaginationi suggeritur, qualem in Geometria sistit figura. Immo si ita visum fuerit, schema quoque delineari potest, quod cubum intra aquam in vase vitreo suspensum repræsentat. Neque vero verendum est, demonstrationibus hoc pacto detrahi suam universalitatem, & probato casu particulari, argumentando a particulari ad universale, colligi veritatem theorematis univer-

saliter

saliter enunciati. Etsi enim idea, ad quam dirigitur demonstratio, repræsentet casum maxime particularem; cum tamen in demonstrando non sumamus nisi universalia, quæ insunt, ut eodem successu particulare quodcunque aliud in illius locum surrogari possit; quod ex universalibus concluditur utique universale est. Sane in Geometria quoque, figura ad quam refertur demonstratio, singulare quid est, cujus idea particulare refert, v. gr. triangulum, cujus anguli sunt datae magnitudinis, & latera in data quadam ratione. Enimvero cum non ex particulari, sed universali, quod ideæ inest, procedat demonstratio; universalitati non officit, quod, dum intellectus concipit universale, in imaginatione hæret idea quædam singularis, quæ casum quandam particularem repræsentat, quoad ea quæ ipsius vi facile distinguuntur, nudo reflexionis actu accedente. Quamdiu in ratiocinando nonnisi vocabulis utimur, universalia ab imaginibus separare non licet; quippe quæ non intelliguntur, nisi quatenus universalia in singularibus, seu imaginibus, intuemur. Hæc satis aperta sunt iis, qui in Psychologia nostra fuerunt versati. Ceterum eodem artificio utendum est in Physica, siquidem demonstrationes facilitare volueris, quales hætenus dare neglexerunt Physici. Etsi enim hoc intenderit HONORATUS FABRY, qui in præfatione methodum sibi

optime perspicuam, immo tritam affirmat; si tamen in iis, quæ mathematica non sunt, prætensas demonstrationes examines; quantum diffideant a genuina earum forma, superiorum gnarus facile deprehendet. Eidem quoque artificio locus est in ipsa Philosophia practica, si casum theorematis, vel problematis, exemplo quodam, sive vero, sive ficto, explices, quod imaginem quandam imaginationi præsentem sistit; & ad idem demonstrationem referas, quemadmodum in Geometria ad figuras; quatenus nempe in imagine, quæ exemplum repræsentat, attentionem non dirigis nisi ad universalia, quæ hypothesis theorematis vel resolutionis problematis continet. Immo in ipsis Metaphysicis idem imitari licet; quidni debemus? quamdiu desideratur Characteristica generalis, vi cujus notationes abstractæ qualitatum ab imaginibus separantur, & calculus qualitatum a calculo magnitudinum utique diversus, quem literalem vulgo vocamus, ut characterum combinationes in locum ratiociniorum succedant. In hisce enim continetur Algebra philosophica, cujus aliam prorsus ideam sibi finxit ROBERTUS HOOKE in Posthumis, & quam speciosam generalem appellavit LEIBNITIUS. Sed de hac dixi, quæ sufficiunt, ut intelligantur termini, in Psychologia empirica.

§. 264. Elementa Aërometriæ eo fine conscripsimus, ut specimine quodam

dam non admodum difficili docere-
mus, quomodo Mathesis ad experi-
menta applicetur; & ideam quan-
dam cognitionis mathematicæ in Sci-
entia naturali animo legentium insi-
nuaremus; simulque usum Algebræ
in Physica, exemplis non nimis dif-
ficilibus, demonstraremus. Cum
postea Elementa Matheseos universæ
ederemus, Aërometriam in numerum
disciplinarum mathematicarum refer-
re nulli dubitavimus; præsertim quia
principiis ejus opus habemus in Hy-
draulica, quæ dudum inter discipli-
nas mathematicas locum obtinuit.
Eodem nimirum jure, quo Hydro-
statica, & Mechanica, immo etiam
Optica, pro partibus Matheseos ha-
bentur; Aërometria quoque pars
eiusdem habetur. Quamobrem fa-
cile patet, hanc Matheseos partem
inprimis commendandam esse iis, qui
Scientiæ naturali operam navare de-
creverunt; maxime ubi in cogniti-
onē philosophica subsistere non volue-
rint, sed ad mathematicam ascenden-
di animum habuerint. Supponit au-
tem Hydrostaticam, cujus principia
ad aërem, tanquam fluidum grave, ap-
plicantur. Quamobrem illi studere
ante debes, quam ad Aërometriam
accedas. Supponuntur etiam pauca
ex Mechanica, quemadmodum ex
citationibus videre est. Etsi autem
Aërometria potissimum ad cogni-
tionem naturæ mathematicam ma-
nudit tyrones; in genere ta-
men docet, quomodo Physica me-
- *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. V.

thodo demonstrativa tractari debeat;
quatenus in ea etiam continentur, quæ
absque principiis mathematicis de-
monstrantur. Discimus præterea ex ea,
quamvis in reliqua Philosophia co-
gnitio philosophica a mathematica se-
parari possit, in Physica tamen, nisi
certitudini deesse velis, fieri non posse,
quin subinde nonnulla ex principiis
mathematicis demonstrantur.

§. 265. Quibus sola praxis satis-
facit, illis inservient problemata de
antiæ pneumaticæ, barometrorum,
thermometrorum, & hygroscopio-
rum constructionibus, una cum scho-
liis, quibus horum instrumentorum
usus dilucidatur. Non tamen negli-
genda sunt theoremata & corollaria,
quibus tum fabrica, tum usus isto-
rum instrumentorum perfectius intel-
ligitur. Definitiones quoque expen-
dendas esse per se patet. Cum in
Elementis Matheseos Germanicis ea
potissimum tradiderimus, quæ ad
praxin faciunt, etsi oculatam, non
omissis scilicet demonstrationibus;
ex Aërometriæ quoque Elementis
ea excerpimus, quæ praxin propius
respiciunt, & ad theoriam uberiores
præparant lectorem ex Latinis dein-
ceps hauriendam.

§. 266. Inprimis autem Aërome-
tria inservire potest illis, qui ad ter-
tium cognitionis gradum contendunt.
Si enim animum ad ea attendunt,
quæ sunt methodi; ideam quandam
exemplarem applicationis Matheseos
puræ, Algebræ præsertim, ad ex-
peri-

perimenta & observationes inde haurient; ut in cognitione rerum naturalium certo tramite progrediantur. Multo enim clarius etiam tyrones hinc perspiciunt utilitatem cognitionis mathematicæ, tum ad certitudinem in Scientia naturali consequendam, tum ad praxin accuratissime exercendam, quam ex sublimibus istis problematis Physico-mechanicis, qualia in Mechanica complura explicavimus. Quamobrem cum pauca sint, quæ ex mechanicis in Hydrostatica & Aërometria sumuntur, demonstrandi principia, non inconsultum erit, si qui ex Mechanica tantummodo principium de æquilibrio solidorum perspexerunt, sepositis ceteris, ad Hydrostaticam & Aërometriam statim se conferant. Quod si enim, in hisce disciplinis intellectu non adeo difficilibus, applicationem Matheseos puræ, & Algebræ inprimis, ad Naturæ cognitionem didicerint; minus difficultatis experientur in sublimioribus, quæ in Mechanica traduntur. Non est quod objicias, Elementa Matheseos cum sint in tyronum gratiam conscripta, ut scientiam inde hauriant, in iis quoque faciliora difficilioribus fuisse præmittenda, adeoque Elementa Hydrostaticæ & Aërometriæ Elementis Mechanicæ fuisse anteponenda. Etenim methodus studendi non per omnia consentit cum methodo tradendi disciplinas, & eas sibi mutuo subordinandi, atque in singulis veri-

tati unicuique locum suum assignandi. Nimirum qui in scientiis operam navat a facilioribus incipit, & inde continuo ad difficiliora progreditur; quam legem præscribit methodus studendi. Ast disciplinæ integræ, & in iis veritates singulæ eo ordine collocandæ, ut sequentia ex antecedentibus intelligi & demonstrari possint. Non autem semper contingit ut disciplina, quæ continet intellectu faciliora, non dependeat ab alia, in qua occurrunt multo difficiliora. Unde methodo studendi convenit, ut difficilia initio seponantur, & ad faciliora properetur. Immo hac de causa, in gratiam primorum tyronum, conscribuntur compendia; in quibus nonnisi facillima & scitu maxime necessaria continentur; ut animus imbuatur principiis, & ad profundiora haurienda præparent. Memini me olim cum disciplinis operam navarem, iis quæ captu difficilia videbantur non immoratum fuisse, sed ad sequentia progressum, si vel maxime eorum veritas ab istis penderet: quando enim postea, sequentibus intellectis, ea denuo expendebam, sine ulla mora obvium erat, quod antea impervium videbatur. Nec ignoro rationes, cur hoc contigerit, quippe quas Psychologia supeditat, quas tamen hic commemorari parum refert. Absit itaque, ut, ubi quædam a te percipi non posse tibi videtur, de viribus tuis desperans, efficiaris studii desertor.

Nocet

Nocet non minus desperatio, quam nimia de viribus suis confidentia; nec ardor sciendi, qui accendere debet cupiditatem discendi, producendus in nocumentum.

§. 267. Hydraulica olim machinarum hydraulicarum & fontium salientium constructione tota absolvebatur, atque adeo non erat nisi pars Matheseos practica. Enimvero, postquam theoria Mechanicæ ad omnem motum solidorum fuit extensa; in Hydraulica quoque in motum fluidorum inquirere cœperunt Geometra. Unde hæc Matheseos pars longe aliam induit formam; qua etiam sese commendat Theoristis, quibus nauseam movet praxis; ne quid commune habere videantur cum hominibus, quibus natura manus loco ingenii dedisse censetur. Nos & theoriam, & praxin æstimamus; quamvis non eodem, sed suo unamquamque pretio, ut utrique suus habeatur honor. Quamobrem in Hydraulica quoque praxin cum theoria copulavimus, nec hanc illa dehonestari opinamur. Et si enim Mathematicus, Geometra præsertim profundus, qui arduis meditationibus sufficit, longo intervallo post se relinquat machinarum fabrum, & hic perperam pro Mathematico habeatur; non tamen ideo praxis contemnenda; quin potius Geometra profundis suis meditationibus hunc fructum deberi agnoscere debet, ut illa perficiatur. Ex Hydraulica facillime perspicere

licet, quod auxilio Geometrarum indigeant, qui praxi operam navant. Exempli loco esto determinatio situs alarum molendini vi venti agitandi (§. 316 & seqq. *Hydraul.*). Quod si non desissent, qui inventa Geometrarum profunda ad praxin communem aptarent, illud adhuc magis pateret. Dolendum vero, quod nemo ea de re cogitare velit.

§. 268. Qui soli praxi operam navant, iis sufficit, ut distincta notione constructionem machinarum hydraulicarum & fontium salientium animo concipiant. Non tamen inconsultum est, ut theoremata quoque, sive synthetice demonstrata, sive analytice investigata, percurrant; visuri num in iis quid contineatur, quod praxin juvet. Idem quoque facere tenentur, ubi praxin desiderant oculatam, hoc est, rationem quandam eorum perspicere volunt, quæ faciunt; ne subinde cœcutientes in praxi aberrant. Exemplum illustre habemus in siphonibus, quos aquis per montium vertices in oppositam planitiem deducendis sufficere existimarunt, qui causam ascensus in crure breviori ignorarunt (§. 68 *Hydraul.*). Istiusmodi exemplis convincendi sunt, qui theoriam omnem contemnunt, quantum sibi noceant, si ne historicam quidem ejus notitiam sibi comparare velint. Quamobrem in genere suademus, ne illi, quos praxis juvat, theoriam Matheseos

profus negligent, sed primum cognitionis gradum suum esse credant. Ipso nimirum usu experientur, quænam hinc utilitas in eos sit redundatura.

§. 269. Theoria non modo Hydraulicæ, verum etiam praxis multa continet, quæ usui esse possunt in Physica. Quamobrem si quis, vel maxime se minus aptum sentiat ad demonstrationes & resolutiones analyticas capiendas, qui Scientiæ naturali incumbere decrevit; ei tamen maxime commendanda est historica saltem Hydraulicæ cognitio. Enimvero quia in Scientia quoque naturali methodo demonstrativa utendum, si certitudinis metam attingere velis, quantum datur; consultius omnino est, ut demonstrationes quoque expendat. Et qui Mathesin ad Physicam applicare voluerit; ei huic instituto non minus inservire poterit Hydraulica, quam Aërometria; ut, quæ paulo ante de hac dicta sunt, ad hanc quoque applicanda veniant.

§. 270. Hydraulica autem, sive theoriam, sive praxin spectes, attentionem eorum meretur, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Ubivis enim annotare licet artificia heuristicæ, quibus felicissime usi sunt, aut uti saltem potuerunt inventores veritatum tam theoreticarum, quam practicarum. Cum de Algebrae stu-

dio ageremus, ad nauseam forsitan inculcavimus; quæ attentione artificia ista sint detegenda, ut in casu simili posthac iisdem utaris. Quamobrem nolumus hic ad particularia descendere; sed nobis sufficit monito generali excitasse attentionem, quam afferre debent, qui Artem invenienti curæ cordique habent. Ne tamen quis existimet, laudari artificia, quæ in Hydraulica non reperiuntur, singularia; exempli loco ad unum provocare licet; nimirum quæ ad mensuram reducantur, quæ mensuram respuere videntur. Obtinet hoc in doctrina de cursu fluminum; ubi, cum aqua omnis per totam sectionem non eadem celeritate fluit, aquæ per eandem fluenti tribuitur celeritas quædam media, qua si per totam sectionem fluere, eodem tempore tantundem per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur; & quomodo media ista celeritas inveniri possit docetur. Ceterum ex superioribus abunde constat, nos ubique in studio Matheseos urgere distinctam eorum cognitionem, quæ actu reflexo intellectus detegenda præcipimus; cum id maxime conducatur ad recte philosophandum: quem finem intendimus, dum in studio Matheseos, intellectus perficiendi causa, versamur.

C A P U T VII.

De Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ.

§. 271. **I**N Optica strictiori sensu sumta pauca occurrunt, quæ ad praxin faciunt. Præter ea enim, quæ de camera obscura (§. 79 *Opt.*) & de quadrato geometrico ejusque usu (§. 172 & *segg. Opt.*) & reflexatis imaginibus construendis (§. 312 *Opt.*) docentur, nonnisi problemata nonnulla de magnitudine visa *cap.* 5. & theorematata nonnulla de lumine Solis per foramen angustum radiante *cap.* 6, praxin directe respiciunt. Palmaria praxis Opticæ directæ in Perspectiva continetur. Quoniam tamen indirecte omnia, quæ de visu demonstrantur, usui esse possunt, qui praxi catoptrica & dioptrica delectantur, & quos exercitia Perspectivæ juvant; non male sibi consulant, qui, si non omnium, præcipuorum tamen theorematum opticorum cognitionem historicam acquirere student.

§. 272. Qui ad Physicam animum appellant, iis studium Opticæ maxime commendandum. Non tamen sufficit nuda ejus cognitio historica, quam iis commendavimus, qui praxi student (§. 271); sed requiritur scientifica, quæ non sine accurata demonstrationum evolutione acquiritur. Visus phænomenon na-

turæ est; ad objectum adeo Physicæ, rerum naturalium scientiam, referendum. Nec minus lumen, umbra, & colores ad idem spectant, quæ hic tanquam visibilia considerantur. Et si enim, in Mathesi, potissimum ratio habeatur cognitionis mathematicæ; ut tamen hæc in potestate sit, multa declarantur, quæ explicare Physici est; quemadmodum & modum visionis Physicus explicare debet. Quod si ergo, in Optica, ea animi attentione utaris, quam hæcenus in ceteris disciplinis mathematicis commendavimus; ex hac Matheseos parte discere licebit, quomodo res naturales sint explicandæ, ut certam earum cognitionem acquiras. Dum vero Geometria elementaris applicatur ad phænomena visus accurate determinanda; Optica prima & facillima cognitionis mathematicæ rerum naturalium exempla exhibet. Quamobrem si quis nullam adhuc hujus cognitionis habeat ideam, is omnium facillime ex Optica eandem hauriet. Unde suademus, ut, quamprimum principiis Arithmeticæ, Geometriæ elementaris, ac Trigonometriæ planæ imbutum habet animum, ad lectionem Opticæ accedat, intellectu multo faciliorem, quam Mechanica, Hydro-

drostatica, Aërometria, & Hydraulica, ac præterea jucunditate sua animum lectoris in se trahentem. Accedit quod ex Optica etiam innotescant fallaciæ visus, a quibus sibi cavere debet Naturæ scrutator, ab observationibus inquisitionem omnem exordiens.

§. 273. Cum Perspectiva sit praxis Opticæ directæ, qua docetur delineatio objecti cujuslibet in tabula, quale, ad datam distantiam, & in data altitudine oculi, super tabula transparente inter ipsum & objectum ad horizontem perpendiculariter erecta, apparet (§. 1 *Perspect.*); qui solam praxin curant, schemata juxta ea, quæ in singulis problematis præcipiuntur, delineare, & deinceps in aliis figuris delineandis imitari debent. Quodsi quis in Architectura fuerit versatus, exempla quoque inde petere potest, ac debet. Exercitia hæc facilitabis, si Anonymi Galli *Perspectivam practicam*, cujus supra in recensione Autorum c. 8, §. 23 mentionem injecimus, in subsidium adhibeas, & deinde exempla ex ANDRÆA PUTEI *Architectura Pictorum & Sculptorum* (§. 24 *cap. cit.*) petas. Satisfacient ubivis regulæ, quas dedimus. Hic labor continuandus, donec habitum consequaris. Nemo autem non videt, Artem pictoriam cum praxi Perspectivæ esse conjungendam. Hæc enim ad illam perficiendam unice tendit. Qui vero nonnisi scientiam expetunt, iis sufficit demon-

strationes praxium percepisse, quas in usum potissimum Philosophorum addidimus; quorum cum sit rationem reddere eorum quæ sunt atque sunt, rationem quoque perspicere debent delineationum objecti cujuscunque juxta regulas Perspectivæ factarum. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, iis notandum est artificium, quo tota Perspectiva in potestatem Geometræ redacta (§. 2 *Perspect.*), & praxin mechanicam eodem fundamento nixam, quam problemate primo exposuimus, conferant cum regulis geometricis, quæ in sequentibus problematis exponuntur; ut applicatione Geometriæ praxis perficiatur, & certa scientia eorum acquiratur, quæ nonnisi confuse percipiuntur. Eodem fine conducunt, quæ de anamorphosis capite ultimo proponuntur.

§. 274. Catoptrica phænomena visionis reflexæ demonstrat, quæ fit ope speculorum. Specula communissima sunt plana, quorum ideouusus cetetis præfertur, quia objectum ea forma & magnitudine spectandum exhibent, quale & quantum est; ut adeo teipsum videre ac contemplari possis. Visio reflexa variat pro diversitate superficiæ reflectentis: unde alia sunt speculorum planorum, alia concavorum, alia convexorum, alia ex hisce compositorum phænomena. Cumque figuræ concavæ ac convexæ in infinitum varient, phænomena quoque in infinitum variare debent.

debent. Artifices hætenus parare nequeunt nisi specula plana, convexa sphaerica, cylindrica, & conica, concava-sphaerica, & cylindrica; prismatica enim & pyramidalia ex planis componuntur. Quamobrem contenti sumus horum speculorum phaenomena demonstrasse, quæ ante experientia innotuisse, quam via demonstrationis in eadem inquisiverint Mathematici, facile largior. Fuere tamen artifices, qui specula parabolica conficere conati sunt. Unde horum quoque mentionem quandam injicere voluimus. Etsi autem specula plana sint quòtidiani usus, ex eorum tamen combinatione, pro diverso ad se invicem situ, inexpectata prorsus prodeunt phaenomena; quæ non modo delectant, sed ignaros quoque in admirationem rapiunt, non sine delectationis incremento. Interveniunt etiam variis technasmatis specula cetera; quæ, etsi ad delectandum fuerint excogitata, seriis tamen inserviunt meditationibus Philosophi, quippe naturam imitantis, quæ serio agere solet, etiam dum pueri ludunt. Quamobrem nec piguit technasmata ista variis speciminibus illustrare. Et quoniam in omni Mathesi praxin cum theoria conjunximus, idem quoque fecimus in Catoptrica. Qua de causa, non modo explicavimus technasmata, quæ ex theoria Catoptricæ demonstrantur, & adeo a priori deducuntur; verum etiam modum specula conficiendi: neque enim solum

dedecet Mathematicum ignorare, qua arte prodeant specula, quorum phaenomena demonstrat, etsi in demonstrationibus sumere possit ac debeat speculorum figuram; verum etiam hoc nosse utile est, ubi theoremata a se demonstrata per experientiam ad examen revocare voluerit. Quoniam nimirum in demonstrationibus suis supponit in rigore geometrico figuras speculorum; si de consensu demonstrationum & experimentorum judicium exactum ferre voluerit, nosse utique debet, ad quam perfectionem ars perducta fuerit, & num ea perfectionem ulteriorem recipere queat. In Mathesi mixta plurimum tribuimus connubio experientiæ ac rationis; quo consensus experimentorum & demonstrationum innotescit, & quod tantopere commendamus per universam Scientiam naturalem. Nihil adeo prætermittendum erat, quod eo ducere poterat.

§. 275. Qui adeo solam praxin amant, illis satisfaciunt problemata, prætermisiss demonstrationibus. Non tamen prætermittere debent theoremata, cum historica eorundem cognitio æquipolleat recensitioni phaenomenorum: si qua enim sunt, quæ non nisi in usum demonstrandorum aliorum afferuntur, ea facile a ceteris distinguunt. Nimirum consultum est, ut theoremata experimentis subiciant; ne omni prorsus certitudine destituatur cognitio: tumque

pate-

patebit, quænam sint ea, quorum cognitio scitu necessaria ac utilis, etiam iis quos sola praxis juvat. Quid quod in numero quoque theorematum sint haud pauca, quibus in praxi locus est, aut quæ ad praxes transferri possunt. Exempli loco esse potest theorema 11, §. 71, vi cuius §. 73, exhibetur globus descendens in plano inclinato tanquam ascendens in verticali. Catoptrica praxi abundat, atque hoc nomine sese commendat omnibus, quotquot eandem amant, iis præsertim qui quærunt, quod delectat.

§. 276. Inter specula inprimis sese commendant sphaerica concava; non solum propter phaenomenorum prorsus singularium raritatem; verum etiam quod sint caustica, seu ustoria, & lumini intendendo inserviant. Specula caustica præsertim maiora usum habent in experimentis physicis, qualia describuntur in schol. 4, probl. 22, §. 221, immo phaenomena omnia visionis reflexæ argumentum physicum sunt, quorum adeo rationes Physicus reddere tenetur, etiam si geometricas insuper habeat demonstrationes. Physicus phaenomena sumit tanquam a posteriori cognita, & eorum rationem reddit. Mathematicus illa demonstrat, ex supposita speculi figura; vi legis reflexionis, ea deducens a priori, tanquam incognita ex cognitis. Atque adeo diverso prorsus modo suo funguntur munere: quod dum uterque facit, manifesta est differentia, quæ inter

cognitionem philosophicam & mathematicam, hac in parte, intercedit. Ut autem certius constet Physico, quid sumere liceat, theorematum & technasmata catoptrica eum docent. Quemadmodum autem Optica patefacit fallacias visus circa visionem directam, quas utiliter cognoscit Physicus, immo Philosophus in aliis quoque Philosophiæ partibus; ita Catoptrica revelat fallacias visus circa visionem reflexam, non minore utilitate agnoscendas. Atque adeo patet, quomodo in studio Catoptricæ versari debeat Philosophus, qui ab omni cognitione mathematica alienum habet animum: quem etsi non probemus, tolerandum tamen censemus, pro diversitate ingenii humani; quantum absque detrimento scientiæ fieri potest. Ceterum quæ de cognitione mathematica quoad visionem directam modo annotavimus (§. 272); ea etiam de eadem quoad reflexam notanda veniunt.

§. 277. E re esse videtur, ut præiudicio occurramus, quo nonnulli sibi mirifice placent, & cui alii applaudunt, quasi singulare quoddam acumen proderet. Diximus paulo ante (§. 274), nos facile largiri, quod phaenomena speculorum innotuerint a posteriori, antequam de iis a priori demonstrandis cogitare Mathematici. Non adeo dubito fore haud paucos, qui contentent demonstrationes mathematicas superfluas

fluas esse; immo qui hinc inferent inventa, quæ in Mathesi mixta celebrantur, debere artificibus; a quibus postquam inventa fuerant, ea demum demonstrare conati sunt Mathematici, inventionis tamen gloria inter alios eruditos eminere gestientes. Memini hoc argumento arrogantiam Mathematicorum redarguere voluisse CLERICUM, cum HERMANNI Phoronomiam recenseret. Qua de causa desiderabat, ut Geometra præclarus significaret, quantum Scientia naturalis, & Ars facta sit locupletior, postquam abstrusas istas theorias orbi literato in opere suo propinasset. Artifices enim pro inventoribus habebat; Mathematicos vero demonstratores pronunciabat; qui nonnisi in artificum inventis ingenii sui vires exerceant. Non unum est, quod hic repono. Phænomena, ipsi etiam vulgo cognita, sumit Physicus & eorum rationem reddit: non tamen ideo inanis censetur ejus opera; propterea quod illa ante innotuerint quam de rationibus eorundem reddendis cogitavit Physicus. Ecce ergo inanem operam sumere, aut nihil præclari facere dicendus est Mathematicus, qui longe ulterius progressus, phænomena non sumit, sed ex iis, quæ sumi debent, via demonstrationis a priori deducit; ut certa sit etiam ejus cognitio, qui existentiam phænomeni nondum supponit? Notandum præterea est, phænomena haud raro a posteriori non satis deter-

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

minate cognosci, quæ tamen accuratissime determinantur a Mathematico in suis theorematis. Accedit porro, quod Mathematicus non omnia phænomena jam ante norit, quam ea demonstrat; sed multa potius adhuc ignorata in apicum producat. Denique inventa, quæ haud raro casui debentur, imperfectiora ad majorem perfectionem perducit; aut, siquidem ulteriorem perfectionem non admittunt, ut idem certo constet demonstrat. Quid, quod hinc inde a priori quoque deducat technasmata, quæ tentando nondum fuerunt detecta, aut prorsus non potuissent detegi? Absit autem ut tibi persuadeas ea, quæ casu plerumque aut tentando reperta fuerunt, perficere minoris esse, quam illa reperire. Non semper valet illud pervulgatum: Inventis facile est addere. Inventa nondum æstimare didicit, qui ea aliunde quam ex usu facultatum, cui debentur, æstimat. HUGENIUS, qui horologia singulari pendulorum applicatione perfecit, longo intervallo post se relinquit primum eorundem inventorem; & demonstrationes, quas de tubo optico dedit in *Dioptrica*, multo majorem laudem pariunt, quam fortuita imperfecti inventio. Ut inventa, quæ casui accepta referenda sunt, vel tentaminibus laboriosis, perficiantur, inventis haud raro opus est, non sine summo acumine & maxima ingenii vi eruendis. Plurimum adeo falluntur, inventionis

V v

gloriam

gloriam non deberi nisi iis, qui primi in quidpiam inciderunt. Sed hæc evidentiora erunt, ubi Ars inveniendi eodem habitu fuerit investita, quo Logicam indutam dudum in scenam produximus; ut ex arte æstimare detur artificem; non vero, quemadmodum nunc plerumque fieri solet, ex eo, quod inventum ejus sit utile, vel quod sit inexpectatum, vel quod aliis fuerit inaccessum, vel quod in admirationem rapiat ignaros & ita porro.

§. 278. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, reperient in Catoptrica, sive theoriā spectes, sive praxin, quæ Artem inveniendi illustrant & amplificanc; ubi in artificia inquirere voluerint, quibus aditus paratur ad ea, quæ inaccesſa videbantur. Neque cum, qui in Physica feliciter progredi voluerit, ubi non minus applicatione Matheſeos puræ ad phænomena naturæ, quam connubio experientiæ ac rationis opus est, pigebit eo modo perlustrasse Catoptricam, quem ad tertium cognitionis gradum acquirendum supra præſcriptimus, & cum de studio Algebræ ageremus exemplis illustravimus. Quoniam vero nobis quoque propositum est usum Algebræ in Matheſi mixta ostendere; placuit sub finem adjicere Catoptricam analyticam, seu modum investigandi theoremata catoptrica per Analysin. Substituimus autem in iis speculis, quorum antea phænomena demonstravimus, more Veterum; tum ne

tyrones universalitate ipsis inutili perplexi reddantur, tum quia solutiones particulares occasionem dedere universalibus in omni curvarum genere. Discentium enim, quibus scribimus, ratio habenda fuit.

§. 279. Erunt forſan, qui, cum viderint, Algebræ beneficio, nullo fere negotio patere, quæ more Veterum non sine multo apparatu demonstrantur; demonstrationes syntheticas inutiles existimabunt, immo prorsus damnabunt. Recolenda animo hic sunt, quæ supra (§. 100 & seqq.) monuimus, cum de studio Matheſeos intellectus perficiendi causa ageremus; quem inter usus præcipuos referimus studio mathematico tribuendos, & qui multo latius patet quam usus reliquus omnis. Quamobrem qui hac intentione ad studium Matheſeos animum appellant, iis omnino maximopere commendandum, ne demonstrationes syntheticas negligant, etiam in Catoptrica, & demonstrationes catoptricas eadem industria resolvant; ut pateat earum forma in Logica præſcripta, qua demonstrationes Geometriæ elementaris resolveri præcepimus; ut non modo idea exemplaris demonstrationis consummata, quam in Logica vocamus, reddatur illustrior, magisque indies confirmetur, verum etiam ut habitus juxta eam operandi in omni scientiarum genere perficiatur. Pudeat enim Philosophos, seculo tam illustri, quo scien-

tix mathematicæ ad tantum fastigium evectæ, diutius in ancipiti hære, &, dum Mathematici plena luce fruuntur, in tenebris palpitare.

§. 280. Dioptrica praxi multa abundat. Agit enim de visione refracta, cujus multus usus est in spectandis objectis remotis & vicinis exiguae molis; quorum illa, ob distantiam, hæc vero, ob parvitatem, oculis sese subducunt. Hinc, in hac parte Matheſeos mixtæ, præcipue agitur de tubo optico, & microscopio. Tubi non minus optici, quam microscopia, componuntur ex vitris lenticularibus arte parandis. Atque adeo ad praxin dioptricam spectat quoque ars poliendi vitra, quam adeo integro capite accuratissime explicavimus. Quoniam tubus opticus maximam utilitatem affert in observationibus astronomicis, ita ut sine ejus auxilio Astronomia nondum ad eum perfectionis gradum fuisset perducta, ad quem eam hodie evectam cernimus; accurata lentium fabrica ipsis quoque Mathematicis curæ cordique esse debuit. Quamobrem non mirandum, Mathematicos etiam summos, veluti HUGENIUM, vitris poliendis operam dedisse, nec eos piguisse praxin manuariam exercere, etsi in theoria augenda & amplificanda inter paucos eminent. Ad praxin dioptricam spectant quoque perspicilla, quæ quomodo Myopes & Presbytas juvent in videndis iis ad quæ oculorum acies non pertingit,

in vulgus notum est. Dantur denique alia technasmata dioptrica, & catoptrico-dioptrica, qualia nonnulla descripsimus, & plura apud alios, veluti TRABERUM & ZAHNIUM, describuntur: quæ etsi nonnullis magis ludicra quam utilia videantur, & ad delectandum magis quam ad augendam scientiam composita; minime tamen contemnenda sunt. Usus enim præbent in experimentando haud raro prorsus insignem. Exempli loco, provocare licet ad prisma trigonum; quod quantum adjumenti attulerit ad naturam luminis & colorum indagandam, ex præclaro opere Viri summi ISAACI NEWTONI clarissime conspicitur. Inprimis etiam attentionem merentur, quæ (§. 476, 477 *Dioptr.*) de laterna magica in microscopium convertenda, & ad foramen cameræ obscuræ lumine solari directo illustratum applicanda annotavi; in Experimentis autem idiomate patrio descriptis fusius exposui. Novi enim Virum quendam illustrem istiusmodi microscopium parasse, & insignes prorsus ejus effectus, quos ego prædixeram, observasse. Qui adeo praxi operam navant, non modo ea, quæ de poliendis vitris, de construendis telescopiis, microscopiis, aliisque technasmatis larga manu traduntur, probe perpendere tenetur; sed ut oculata sit praxis, theoremata quoque de refractione luminis in lentibus opticiis, præsertim de focus earundem, sibi familiaria reddere debent,

bent, etsi demonstrationes insuper habeant. Clarissime omnium ex Dioptrica perspicitur, quam necessaria sit theoria ad praxin; nisi hæc multa imperfectione laborare debeat, nec in eadem committendi errores, qui evitari poterant. Huc igitur velim animum advertant, qui theoriæ contemnere solent. Velim etiam ut ad hæc animum attendant, quorum est theoriæ ad praxin aptare; ut ad historicam ejus cognitionem pateat aditus Artis cultoribus ad praxin eandem applicaturis. Optandum enim foret, ut quis omnes theorias, quantumvis profundas, perlustraret, & quæ in Arte usui esse possunt excerpta, sine demonstratione, in usum Artis cultorum, exponeret; experimentis confirmanda, ubi id absque multo apparatu ac sumtu facile fieri potest. Quoniam tamen Geometræ in solvendis problematis physico-mathematicis quædam sumunt, quæ, quod non invita natura sumantur, non demonstrant; atque adeo idem ipsis subinde accidit quod GALILÆO circa resistantiam solidorum, ut ex assumtis recte quidem colligant, quæ inde sequuntur, hæc tamen ab experimento dissentiant, quod illa naturæ rerum minime convenient; ideo consultum foret, ut in Physica veriori satis versatus in hypothèses Geometrarum accurate inquireret, ea, quæ certa sunt, ab incertis aut prorsus falsis separaturus; ne, dum praxin theoriæ perficiendi animus est, ea

inculcentur, quæ eidem magis obfunt, quam profunt; & artificum perspicaciorum judicio, cum theoriæ fallere videant, hæc tandem magis in contemptum adducatur, quam ut eidem aliquod pretium statuatur. Etsi enim a particulari ad universale non valeat argumentatio, & præcipitantiæ in judicando tribuendum sit, si quis ea utatur; hæc ipsa tamen præcipitantiæ tanto excusatio est in artifice, qui quoad theoriæ aliorum dictis habere debet fidem; consequenter judicium suum determinare nequit, nisi per notiones communes probabilitatis extrinsecæ.

§. 281. In Dioptrica explicatur visio refracta, ac imprimis ostenditur, quomodo refractionis fiat in vitris politis. Quamobrem primo omnium loco inquirendum est in legem refractionis: quæ quomodo per experimenta eruatur, primo loco docendum duximus. Equidem hodie, postquam usus telescopiorum & microscopiorum invaluit, potissimum ratio habetur refractionis in vitro factæ; addidimus tamen etiam, quomodo sese habeat in aqua & aëre, propterea quod in Physica major est utilitas legis refractionis in aqua & aëre, quam in vitro factæ. Quamvis vero etiam ostenderimus, quomodo lex refractionis in genere per calculum analyticum eruatur; experimentis tamen supersedere minime possumus, cum ratio sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti, quæ per calculum constans

stans eruitur, non eadem deprehendatur in omni diaphano. Qui ergo ad secundum gradum cognitionis aspirant, ea, quæ de refractione in genere capite primo docentur, probe expendere debent, quoniam hinc pendet certitudo ceterorum omnium, quæ in Dioptrica demonstrantur. Quod demonstrationes dioptricas attingit, non uno modo eandem contexere licet. Etenim, supposita lege refractionis, per calculum trigonometricum erui potest, quomodo fiat refractionis in vitro cujuslibet figuræ, veluti in vitris utrinque planis, plano convexis, plano concavis, utrinque convexis, utrinque concavis & concavo-convexis sive meniscis. Idem reperiri potest per calculum algebraicum. Potest denique etiam geometricè demonstrari, quod tanquam jam inventum supponitur, per legem refractionis, vi principiorum geometricorum, more Veterum. Ut igitur diversos hosce demonstrandi modos lectorem nostrum doceremus, nunc ad calculum trigonometricum, nunc ad algebraicum, nunc vero ad demonstrationes geometricas Veteribus usitatas recurrimus. In vitris politis, ex quibus tubi & microscopia componuntur, & quæ ad alia technasmata adhibentur, duplex occurrit refractionis; altera, quæ fit in ingressu luminis ex aëre in vitrum; altera vero, quæ contingit in egressu ejusdem ex vitro in aërem; atque adeo refractionis luminis in vitris po-

litis composita est. Ut tamen ea facilius intelligatur, primo loco docemus, quomodo refractionis simplex fiat in superficiebus tam planis, quam sphericis, cum cavis, tum convexis. Quod si enim hæc principia fuerint cognita atque perspecta; haud difficile est per ea demonstrare refractionem duplicem, qualis in vitris politis occurrit. Enimvero quoniam nos principia dioptrica etiam usui esse volumus in explicandis aliis Naturæ phænomenis; theoremata generaliter demonstramus, ut ad quodlibet diaphanum applicari possint, modo ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum refracti in eodem diaphano per experientiam fuerit definita. Quia tamen in Dioptrica potissimum usui est refractionis in vitro facta, & in Physica frequentiora sunt phænomena refractionis in aqua factæ; in corollariis, theoremata de refractione in vitro & aqua facta exhibemus. Non diffiteor, theoriam dioptricam esse satis diffusam, si respicias usum, quem habent vitra polita in tubis opticis atque microscopiis, & aliis nonnullis technasmatis; sed quibus scientia, quæ sola certitudinem parit, curæ cordique est, illis non videretur nimis ampla, etiamsi praxis inde pendens multis adhuc arctioribus limitibus constringeretur. Quod vero subinde calculo algebraico usi fuerimus in demonstrandis theorematibus dioptricis, non alio fine factum est, quam ut demonstra-

tiones redderemus faciliores & theoriam contraheremus. Neque vero opus est ad demonstrationes algebraicas intelligendas, ut quis in studio Algebrae multum diuque fuerit versatus. Sufficit, si prima saltem rudimenta non ignoraverit, ut adeo nemo jure conqueri possit, quasi hoc nomine Dioptrica multis facta sit inaccessible. Vix enim hodie ferendum est, ut, qui Mathesin addiscere voluerit, Algebrae prorsus intactam relinquat: quæ potius commendanda venit iis, qui theoriæ non multum temporis impendere possunt, eam tamen ignorare nolunt. Non exigua voluptate animum sciendi cupidum demulcent demonstrationes dioptricæ; ut adeo theoria nemini videri possit molesta, nisi ab omni sciendi cupidine prorsus immuni. Notandum vero in Dioptrica non modo quæri, quomodo lumen refringatur in transitu per diaphana diversæ densitatis; verum etiam quomodo beneficio radii sic refracti videatur visibile: quod posterius in primis nosse debemus, ubi phænomena tubi optici ac microscopiorum aliaque visionis refractæ demonstrare voluerimus. Quamobrem in theoria quoque demonstratur, quomodo appareat visibile per radios refractos visum. Unde lentium dioptricarum duplex est usus, alter, dum lumine per ea transmissio utimur, alter vero, dum per eas visibilia respicimus. Qui adeo utrumque usum certo cognos-

cere studet, is etiam omnem theoriam cognitam atque perfectam habere debet: neque enim theoriam dioptricam extendimus ultra usum, quem in praxi habet.

§. 282. Refractio luminis & visio refracta phænomena naturalia sunt, quorum adeo rationes reddere tenetur Physicus. Ex Dioptrica phænomena particularia multo accuratius addisci possunt, quam per observationes absque theoriæ dioptricæ subsidio innotescunt. Et si experimenta capere volueris ad phænomena utraque venanda; theoria Dioptricæ eadem dirigit, ut accurate cognoscantur. Quoniam in Physica phænomenorum rationes proximas ex aliis phænomenis reddimus; eo nomine Dioptrica ad scientiam naturalem plurimum affert adjumenti. Multa dantur naturæ phænomena, quæ a refractione luminis pendent. Eminent inter ea Meteora, quæ dicuntur, emphatica; quæ absque principis Dioptricæ explicari nequeunt. Atque ea ratio est, cur subinde Mathematici de meteoris emphaticis, veluti de Iride, halonibus, parrheliis & paraselenis, in Dioptrica agant. Immo Dioptricæ theoria, si a telescopiis & aliis technasmatibus dioptriciis recesseris, ad cognitionem naturæ mathematicam spectat. Quamobrem quæ paulo ante de eadem, quoad Opticam (§. 272) & Catoptricam (§. 276) monuimus; eadem quoque de Dioptrica tenenda sunt. Quamobrem

obrem qui ad Naturæ cognitionem mathematicam adspirant, iis quoque commendamus, ut omnem Dioptricæ theoriam attentam mente perlustrent. Quodsi enim in Optica, Catoptica & Dioptrica didicerint, quomodo Geometria & Algebra ad Naturæ phænomena sint applicanda, & quomodo cognitio mathematica differat a philosophica, quidque ad perfectionem philosophicæ conferat mathematica; ad altiora progredientes tanto minus difficultatis experientur. Extra omnem controversiam est, prima cognitionis mathematicæ in Philosophia naturali specimina fuisse Optica, nisi forsan Astronomiam ipsis priorem agnoscere volueris; quamvis nostris demum temporibus, præsertim quod Dioptricam attinet, disciplinæ opticæ magis fuerint excultæ, cum jam sublimiora cognitionis Naturæ mathematicæ exempla prostant. Quodsi ergo a disciplinis opticis exordiaris, ubi cognitionis hujus ideam animo complecti volueris, deinceps magis amplificandam per ea, quæ in disciplinis mechanicis Tomo secundo Elementorum occurrunt: naturalem omnino dicendus es sequi ordinem, quem tenuerunt primi inventores. Neque adeo dubitandum est, quin hoc pacto, a facilioribus ad difficiliora continuo progressus, multo intimius hunc cognitionis humanæ gradum inspicias, quam si inverso ordine, insuper habitis primis inventis, statim ad sublimiora te con-

feras, ad quæ non paruit aditus nisi per faciliora inventoribus.

§. 283. Atque hoc ordine si progrediaris, haud parum quoque lucis affunditur ad tertium cognitionis gradum adspiranti. Cum enim ad Artem inveniendi exercendam certa quoque requiratur mentis habitudo, ea omnino omnium commodissime acquiritur eo modo, quo successive, in diversis licet subjectis, incrementa sua cœpit. Sed de hoc ipso plura mox nobis dicenda erunt, ubi de studio Astronomiæ in usum tertii gradus cognitionis agendum erit. Ceterum qui Dioptricam ea lege perlustrare voluerit, quam pro acquirendo tertio cognitionis gradu præscripsimus; is non inanem operam a se sumi ipso facto deprehendet. Probe notandum est artificium, quo lex refractionis analytice investigatur (§. 36 *Dioptr.*); tum quod in argumento physico adhibeatur principium a causa finali desumptum, nimirum quod Natura agat via brevissima, tum quod methodus de maximis & minimis ad problema physicum applicetur. Præterea considerandum, quod Mathematicis requirat experimenta, si per ejus demonstrationes aliquid in Physica accurate determinandum. Etenim per analysin mathematicam ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti indeterminata prædit, quæ per experimenta deinde in quolibet diaphano determinanda. Etsi autem KEPLERUS veram refractionis legem

gem non fuerit affecutus, cum rationem constantem quæſiverit in angulis, non in eorum finibus; non tamen propterea attentione indignum est principium *Kepplerianum*, cum inde pateat, quomodo hypothefes vicarias, in locum verarum Naturæ, ſubinde ſurrogare liceat in cognitione mathematica; ſive veras detegere non detur, ſive eadem diſquiſitiones reddant moleſtiores; tum etiam quod inventum *KEPPLERI* ad veram legem refractionis inveniendam adducere potuit *SNELLIUM*; quatenus conſtans quædam ratio inter angulum incidentiæ & angulum refractionis obſervatur, quamdiu anguli finibus phyſice propemodum proportionales ſunt: id quod tanto facilius ſuccedere potuit, quia in ipſa Trigonometria in ſimili caſu angulorum ratio ſubſtituitur rationi ſinum (§. 23 *Trigon.*). Et non minus demonſtrationes, quam analyſis dioptrica loquuntur, ubi Geometria ad Phyſicam applicatur, non ſemper obſervandum eſſe rigorem geometricum; ita ut lineæ v. gr. convergentes haberi poſſint pro parallelis, & anguli quantitate parva differentes pro æqualibus: id quod convenit approximationibus in Matheſi pura, & eandem cum hiſce habet rationem. Quodſi ſingula eodem modo perluſtrare velimus, quo in ſtudio Algebræ explicando a nobis factum; multa artificia annotare licebit, quæ ad tertium cognitionis gradum faciunt. Sed

noſtrum jam non eſt in tantas ambages deſcendere, qui tantummodo monſtramus viam, qua ſit eundem. Non tamen nobis temperare poſſumus, quin unicum adhuc commemoremus. Nemo eſt qui neſciat, primam teleſcopii inventionem caſui deberi; ejus autem perfectionem, maxima ingenii vi & acumine ſummo, a Mathematicis primi ordinis fuiſſe promotam. Fortuita teleſcopii inventio attento inſinuat modum, quo in inveniendo caſui obviam ire licet. Ac evidentiffime hinc perſpicitur, quod ea, in quæ caſu incidimus, manum emendatricem & auxiliatricem expectent a ſcientia & arte inveniendi. Ampliſſimus ſeſe hic aperit diſcendi campus; ſed eum ingredi prohibet inſtituti præſentis ratio. Quamvis autem in ipſis demonſtrationibus dioptriciſ paſſim adhibuerimus calculum algebraicum, diſtantiam foci a lente determinaturi; id ipſum tamen non obſtitit, quo minus doceremus, quomodo eadem analytice inveſtigetur; non modo ut uſus Algebræ in Matheſi mixta doceatur, verum etiam ut præſtantia ejus appareat; cum theoremata in anterioribus operoſe demonſtrata, quamvis ope calculi analytici fuerint contractæ demonſtrationes, mira facilitate ex formula generali eliciantur: id quod extra Matheſin uſui eſſe poteſt in ſpeciebus ex dato genere determinandis. Cur vero ſolutionem dederimus particularem, quæ Dioptrica ſufficit, non

vero

vero universalem, sive figuram medii refringentis, sive ejus densitatem spectes, quod tanto facilius fieri poterat, cum dudum prostant solutiones generales, nec eandem supponant, nisi quæ in Analysi a nobis fuerunt tradita; ex iis liquet, quæ in superioribus jam annotavimus, cur solutiones particulares universalibus prætulerimus, in ipsa etiam Algebra, vel subinde universales nonnisi præmissis solutionibus in casu particulari subjunxerimus; ut adeo opus non sit hic repetere, quæ in anterioribus jam inculcata fuerunt. Ceterum hic quoque annotari poterat, quod, cum Dioptrica multis experimentis ansam præbeat; Ars quoque experimentandi lucem quandam hinc expectare possit. Enimvero cum suo tempore, quando nos ordo deducet ad experimentalem Philosophiam tradendam, ea de re ex instituto sit agendum; eadem in præsentī immorari non debemus.

§. 284. Antequam vero hinc discedamus, non inconsultum ducimus unum adhuc moneri Dioptricæ lectorē ad tertium cognitionis gradum adspirantem. Trigonometriam planam pro parte Artis inveniendi venditare solemus, aut, si mavis, pro methodo particulari investigandi ve-

ritatem latentem (§. 142). Unde studium trigonometricum commendamus iis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, non modo illis, qui ad tertium cognitionis gradum, in Mæthesi adspirant (§. cit.). Non desunt, qui sibi persuadent, Trigonometriam ad Artem inveniendi parum conferre; propterea quod per eam tantummodo computentur exempla, non vero veritates universales eruuntur. Hi facillime confutantur per problemata in Dioptrica trigonometricè soluta: apparet enim per Trigonometriam eadem inveniri, quæ per Algebram eruuntur. Quamvis vero opinio ista satis refelli poterat per hoc, quod ipsæ solutiones trigonometricæ problematum sint veritates generales, quæ per applicationem Trigonometriæ inveniuntur, & harum demum applicatione computari exempla; multo tamen clarius idem patet in Dioptrica, ubi etiam per computum trigonometricum eruuntur theoremata universalia Dioptricæ. Accedit, quod usus quoque Trigonometriæ in Philosophia naturali per Dioptricam clucescat. Ita ex ejus applicatione ad experimenta innotescit, quomodo lex refractionis ex. gr. in vitro detegatur, ut alia taceam.

CAPUT VIII.

De Studio Sphæricorum & Trigonometria Sphærica.

§. 285. **T**Rigonometria sphærica demonstrari nequit, nisi præmittantur principia Sphæricorum, quæ etiam ante applicanda sunt ad Astronomiam sphæricam, quam calculo trigonometrico in eadem uti datur. Atque ea ratio est, cur Elementa sphæricorum cum Trigonometria sphærica conjunxerimus. Quamobrem qui cognitionis gradum secundum intendit, Elementa quoque sphæricorum attenta mente perlustrare tenetur, antequam ad problemata Trigonometriæ sphæricæ accedat. Quoniam demonstrationes syntheticæ sunt, quales in Geometria elementari occurrunt; eodem quoque modo expendendæ, quo demonstrationes Geometriæ elementaris resolvere docuimus. Quamobrem iis, qui methodum demonstrandi Veterum sibi familiarem reddere volunt, & demonstrationis legitimæ ideam exemplarem, quam imitentur extra Mathesin, majore luce perfundere gestiunt, lectionem quoque Elementorum sphæricorum commendamus, si vel maxime Trigonometriam sphæricam attingere noluerint. Sunt dubio procul sphæricorum Elementa pars Geometriæ, si non elementaris, certe sublimioris, quæ de li-

neis curvis agit, quarum etiam in numero sunt circuli in superficie sphærae descripti. Mallem tamen eadem referre ad Geometriam elementarem, quia in hac non minus locum habet circulus, quam sphæra. Sed ea de re cum nemine feram contentionis recipiæbimus: sufficit demonstrationibus Geometriæ elementaris, ex cujus etiam principiis contexuntur; nisi forsan imaginatio hinc inde minus exercitatis negotium aliquod facessat; quod tamen evanescit, ubi figuris in plano delineatis substituas globum, in cujus superficie circuli debito modo sunt descripti. Et ut hoc faciant tyrones, omnino suaserim, præsertim illi, quibus molestum accidit horum Elementorum studium, ne ejus fiant desertores. Philosophis vero hinc discere licet, quænam differentia intercedat, si imaginatio juvet, non turbet operationes intellectus.

§. 286. Quodsi igitur quis nonnisi calculum trigonometricum sibi familiarem reddere voluerit; is ex problemate primo §. 114 regulam catholicam de triangulis reſtangulis probe perpendat, utque eandem intelligat, definitiones 9, 10 & 11, cum suis collariis,

rollariis, expendat & quomodo ad omnes casus applicetur ex §. 116 & seqq. addiscat. Si numeri tantummodo varientur, exempla plura comminisci licet. Hæc calculi exercitia continuanda sunt, donec regulam catholicam in dato quocunque casu dextre applicare possit. Qui experiri voluerit, quantum Trigonometria sphærica per regulam catholicam facillitur; eadem problemata more communi resolvat, quemadmodum in libellis aliis Trigonometria sphæricæ aut in Introductione ad Tabulas sinuum atque tangentium docetur. Ubi solutio triangulorum rectangulorum nihil amplius difficultatis facessit; addenda sunt problemata 20 & seqq. §. 158 & seqq. circa quæ eadem observanda, quæ de resolutione triangulorum rectangulorum monuimus. Nullus dubito fore, ut calculus trigonometricus absque ullo tædio addiscatur, nec majorem in eo difficultatem sentias, quam in Trigonometria plana. Quoniam multos a studio Astronomiæ practicæ abhorere expertus sum; quod tædia calculi Trigonometriæ sphæricæ devorare cogerentur: omnem quoque operam navavi, ut Trigonometriam sphæricam redderem facilem quoad praxin, etsi theoria sit multo profundior, quam Trigonometriæ planæ.

§. 287. Trigonometriæ sphæricæ demonstrationes non modo supponunt theoremata sphærica seu Sphæri-

corum theoriā; sed propriam quoque theoriā habet, qua nituntur resolutiones problematum. Nimirum quemadmodum Trigonometria plana nititur theoria triangulorum planorum, seu rectilineorum, in plano descriptorum, quæ traditur in Geometria elementari; ita quoque Trigonometria sphærica pendet a theoria triangulorum sphæricorum, seu eorum quorum latera sunt arcus circulorum maximorum in superficie sphæræ descriptorum. Eam cum alibi supponere non potuerimus, in ipsa Trigonometria sphærica tradere debuimus; quemadmodum theoria triangulorum planorum in Trigonometria plana explicanda esset, nisi jam in Geometria elementari exposita fuisset. Quodsi dicas, theoriā triangulorum sphæricorum esse partem Elementorum sphæricorum, quemadmodum theoria planorum est pars Geometriæ planæ: mihi perinde erit, siue eam a Trigonometria sphærica separes eandemque tibi familiarem reddas, antequam ad hanc accedis; siue ipsam demum cum problematis, quorum solutiones inde pendent, addiscas; quamvis hoc posterius mihi videatur commodius minusque molestum, cum sic theoriæ statim pateat usus, nec difficilis præmittenda sit praxi facilliori. Theoriā autem Sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ plurimum commendamus iis, qui in Astronomia non modo ad secundum cognitionis gradum,

verum etiam ad ipsum tertium adspirant; consequenter omnibus, qui intellectus perficiendi gratia ad Mathesin addiscendam accedunt. Cum demonstrationes singulas eadem forma exhibuerimus, qua conspiciuntur in Geometria elementari, nisi quod nonnullæ in theoria Trigonometriæ sint prolixæ; si nostro more resolvantur, nihil difficultatis facerent, ut eadem deterreatur, qui a Geometria elementari ad sphaericam Trigonometriam statim accedit. Quodsi enim cuidam visum fuerit, neglecta Algebra & ceteris Matheseos mixtæ partibus, pergere in demonstrationibus Matheseos puræ methodo Veterum conditis, ut hanc magis subijciat potestati suæ, nec ante ad analyticam Recentiorum accedat, quam ubi synthetica Veterum fuerit satis compos; is a Geometria Elementari & Trigonometria plana statim pedem promovere potest ad Elementa Sphaëricorum & Trigonometriam sphaericam; cum nec hic supponantur principia, nisi quæ ex Trigonometria plana & Geometria elementari hausisti, nec alia demonstrandi methodus, quam qua ibidem usi sumus; ita ut, subjunctis Geometriæ elementari Sphaëricorum Elementis, Trigonometriam sphaericam cum plana conjungere licuisset, quemadmodum vulgo a Trigonometriæ Scriptoribus fieri solet.

§. 288. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, iis studium

Elementorum sphaëricorum & Trigonometriæ sphaëricæ commendandum. Etenim, sine principiis sphaëricis & Trigonometria sphaërica, nihil reperire licuit in Astronomia sphaërica; multa etiam in Geographia ab hisce principiis pendent. Ipsemet expertus fui, cum studium Astronomiæ mihi videretur perplexum, ac tædiosum esset resolutiones problematum primi mobilis ex Autoribus petere; principiis sphaëricis perspectis, nullo negotio per me ipsum eas fuisse consecutum, & beneficio illorum principiorum eas extemplo reperire potuisse, quando de iisdem cogitandum erat, etsi eas memoria non comprehendissem. Quamobrem si in Astronomia & Geographia perspicere volueris, quomodo resolutiones problematum fuerint detectæ; principia sphaërica probe perspecta esse debent. Vi Trigonometriæ autem sphaëricæ patet illatio, qua opus est, ut in casu particulari dato computatio legitime fiat, ope principiorum sphaëricorum, triangulis & in iisdem datis detectis. Circuli, qui concipiuntur terminati in superficie sphaëra, oriuntur ex sectionibus sphaëra, quas omnes esse circulos theoremate 1, §. 13 demonstratur. Differt adeo Sphaërica a Geometria plana, in qua circuli se mutuo secantes in eodem sunt plano, cum hic in diversis sint planis, omnes tamen terminentur in eadem superficie sphaëra. Unde facile patet, alium hic requiri

requiri usum facultatum cognoscendi, quam in Geometria plana. Qui vero tertium cognitionis gradum acquire studet, is utique distincte cognoscere tenetur usum facultatum cognoscendi in veritate investiganda requisitum; consequenter ubi novus quidam usus emergit, ad eundem animum attenderē debet, ne attentioni suæ sese subducatur. Talia autem inprimis scrutari debet, qui Artem inveniendi distincte cognoscere avet, & Mathesi quoque in usum Philosophiæ operam navat, ejusque studio intellectum perficere studet; consequenter promptum facultatum cognoscendi usum consequi conatur, quem habere possunt. Etsi autem intra cancellos, quos præfixit præsentis instituti ratio, nos continentes ad particularia non descendamus; non possumus tamen non excitare attentionem lectoris sciendi cupidi ad artificium, quod regula catholica Trigonometriæ sphericæ fuit eruta; præsertim cum singula huc spectantia satis distincte explicaverimus & demonstrata dederimus. Elucet enim ex eo usus prorsus singularis fictionum ad formandos conceptus universales, sub quibus comprehenduntur, quæ, propter intrinsecam diversitatem, ad commune quoddam genus, seu universalem quandam notionem reduci minime posse videbantur. Etsi enim hujus artificii jam mentionem quandam injecerimus in Analysisi; singularis tamen prorsus hic oc-

currit applicatio, ut aliam prorsus formam induat. Regulam catholicam non alio fine investigavimus, quam ut memoriæ succurreretur, regularum multitudine non obruendæ, & ut omnis applicatio Trigonometriæ secum ferat sensum certitudinis manifestiorem. Habemus igitur hic, quod imitemur in aliis disciplinis practicis, ad praxin omnem facilitandam. Quamvis enim dentur artificia adhuc alia, quibus idem præstari potest, nec semper recurrendum sit ad fictiones; sufficit tamen hoc exemplo nos moneri, cogitandum quoque esse in Disciplinis practicis de praxi per regulas catholicas facilitanda; immo & de theoria multiplici ad notionem universales reducenda, ut facilius evadat ejus ad humana negotia applicatio. Maximæ hoc ipsum utilitatis est, cum non omnium sit theoriæ, quæ multitudine regularum abundat, ita memoriæ insigere, ut singulæ veluti sua sponte præsententur intellectui, quoties usus eas requirit, cum tamen ad recte agendum illis carere nequeamus. Mirabuntur forsitan nonnulli, qui, cum Mathesin sibi soli discant, ad alia, quæ extra eam sunt, animum non divertunt, nos studium Matheseos explicaturos talia proferre, quæ cum eo nihil commune habere videntur. Enimvero, qui animo recoluerit, quæ supra de studio Matheseos, intellectus perficiendi gratia instituendo, in medium attulimus, & cum eodem

studium Philosophiæ verioris, quam in operibus nostris tradimus, conjunxerit, non habebit amplius quod miretur, utilitatem eorum, quæ hinc inde commendantur, reipsa expecturus.

§. 289. Trigonometriam sphericam non explicamus, nisi in usum Astronomiæ & Geographiæ. Quamobrem non plura tradimus, quam quæ huic fini satisfaciunt. Et quoniam Trigonometria spherica demonstrari nequit, nisi suppositis principiis sphericis, nec applicari in Astronomiæ & Geographiæ nisi mediantibus his ipsis principiis; nec ex hisce addidimus, nisi quæ huic scopo sufficiunt. Etsi itaque Algebra ad doctrinam quoque Sphæricorum & Trigonometriam sphericam applicari possit; usum tamen Algebrae in hac Matheos parte prætermisimus, cum unice propositum nobis fuerit pra-

xin Trigonometriæ sphericae reddere faciliorem. Ne tamen quis existimet, cum vel esse nullum, vel adeo difficilem, ut hactenus detegi non potuerit; provoco ad exempla, quæ dedit JACOBUS KRESA e Societate Jesu in Analysi speciosa Trigonometriæ sphericae, primo mobili &c. applicata, & ad hisce illustriora, quæ extant in Commentariis Academiae Imperialis Petropolitanae. Problemata primi mobilis per Algebrae soluta, si ad Geometriam puram reducuntur, non sunt nisi problemata spherica. Geometrae sane de Spherica nunquam cogitassent, nisi problemata primi mobilis in Astronomia de ea cogitandi ansam dedissent. Neque dubium est, initio hanc Geometriæ partem ab Astronomia spherica non fuisse separatam, quemadmodum & ipsa Trigonometria non tradebatur nisi in Astronomia.



CAPUT IX.

De Studio Astronomiæ.

§. 290. **S**tudium Astronomiæ multis sese nominibus commendat omnibus, qui ad solidam rerum cognitionem aspirant, sive secundum cognitionis gradum, sive tertium intendant; & imprimis si quis intellectus perficiendi gratia Matheos operam navet, ac ad scientiam naturalem excolendam animum appellere velit; immo si

studio medico sese mancipandi animum habuerit. Diversi admodum sunt fines, cur quis ad studium Astronomiæ accedit. Quare nec omnibus eodem modo in eodem versandum, cum diversos fines non eodem modo consequi detur. Nostrum igitur est docere, quid unicuique faciendum, ut finem a se intentum consequatur.

§. 291. Sunt qui curiositatis tantummodo gratia Astronomiam addiscendam esse sibi persuadent; cui tanto magis satisfaciendum existimant, ne ignorent ea, quæ in Calendariis extant; non decere virum eruditum arbitrati, ut Calendarium quotidie in manu habeat, non tamen intelligat, quæ in eodem traduntur. Sunt alii, qui istis oculatiores longius prospiciunt, & adolescentibus ob curiositatem commendant studium astronomicum, ut eadem excitetur sciendi cupiditas & magis magisque inflammetur. Sane non alio fine in scholis introductus est JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus de sphaera; cui deinceps alii substituere alios libellos, usum Globorum, & computum ecclesiasticum exponentes. Etsi enim ea fini etiam Theoricas Planetarum consignaverit PURBACHIUS; cum tamen Theorica magis conducere visa iis, qui ex instituto Astronomiæ operam navaturi sunt, quam promiscue omnibus, & ipse PURBACHIUS potissimum intenderit, ut ad studium astronomicum fere neglectum ac desertum aditum aperiret, & animos juvenum ad idem persequendum accenderet; Theorica ex scholis proscripta in Academias relegata, ubi præter Professore Mathematicum inferiorum, qui Mathesin puram, cum Geometria practica, & Staticæ elementis, interpretari debebat, etiam constitutus Professor Mathematicum superiorum, qui Astronomiam cum

Geographia, Chronologia, Gnomonica & Astrologia doceret. Unde hodiernum in Academia Wittebergensi & Hafniensi duo sunt Mathematicum Professores, alter Mathematicum inferiorum, alter superiorum. In scholis itaque inferioribus, in quibus adolescentes ad lectiones academicas præparandi, sufficere visum, si Astronomiæ sphaericæ, & computi ecclesiastici prægustum quendam haberent, & figuras geometricas construere addiscerent. Unde memini in Gymnasiis quoque patriis, Vratislaviensibus scilicet, cum ego adolescens Magdalenæum frequentarem, Professore Mathematicos nonnisi constructiones figurarum, cum definitionibus Geometriæ elementaris, usum Globorum & computum ecclesiasticum docuisse. Et quamvis insigni cupiditate methodum mathematicam cognoscendi jam tum flagrarem, nec minor esset Algebræ addiscendæ ardor; quod illa certam acquiri posse cognitionem, cui contradicere nemo ausit; hac vero, proprio Marte veritates incognitas investigari audivissem; nemo tamen erat, qui sitim meam restringere valeret; immo non deerant, qui studium Mathematicos dissuaderent, aut saltem affirmarent, me ejus auxilio non consecuturum, quod sperabam. Ego vero nunquam ab ea opinione me dimoveri passus sum, cujus quidem rationes hic exponi nil attinet.

§. 292. Qui adeo solius curiositatis gratia Astronomiam addiscere volunt, iis sufficit historica veritatum præcipuarum cognitio. Nimirum primo ipsis legenda sunt, quæ capite primo Astronomiæ sphaericæ, quoad observationes communes & principia inde stabilita, traduntur. Neque enim integro hoc capite continetur quidpiam, quod captum Mathematicum imperiti excedat; & quocumque quis animo ad Astronomiam accedat, ea ignorare non debet, quæ in eodem continentur. Deinde ex secundo capite, quod de circulis sphaeræ mundanæ agit, definitiones circulorum & aliorum nonnullorum ad eos spectantium sibi familiares reddat, omissis ceteris omnibus. In capite vero quarto legat scholia probl. 16, §. 244 & seqq. quæ de catalogo fixarum, & asterismis, ac magnitudine apparente illarum loquuntur. Addi possunt hinc inde scholia quædam alia, quæ utrum contineant, nec ne, quod videatur notatu dignum, quilibet facile per seipsum judicabit. Hinc statim accedat ad caput sextum, in quo constructio & usus Globi cœlestis in ipsius potissimum usum docetur. Neque male sibi consulat, si in capite septimo perlegat de refractione & parallaxi, quæ in definitionibus & scholiis habentur, & sub rubrica observationum reperiantur: id quod etiam intelligendum de crepusculis, quibus destinatur caput 8, seu ultimum Astronomiæ

sphaericæ. Et hæc satisfaciunt etiam adolescentibus ad studium Astronomiæ præparandis, quoad partem sphaericam. In parte Theorica iis, qui solius curiositatis gratia Astronomiam addiscunt, commendanda sunt capita tria priora de natura Solis ac Lunæ ceterorumque Planetarum, & mundi systemate, si pauca quædam problemata excipias, quæ prætermitti possunt. Poterunt etiam prætermitti theoremata, quæ in usum systematis mundani evincendi proponuntur §. 571 & seqq. Sufficit enim ut saltem theoremata 27, §. 612 & theoremata 28, §. 630 cum subjectis scholiis legat, demonstratione prioris insuper habita. De Theoria Planetarum, quæ capite quarto traditur, non plura cognoscere tenetur quam hypothesein: non tamen prorsus inconsultum est, ut addat definitiones, quarum in Theorica usus, propterea quod hi termini in Calendariis quoque occurrunt, quæ intelligere vult curiositatis gratia Astronomia operam aliquam impendens. Quoad Lunam attinet, præter definitiones & observationes, a §. 816 usque 822, non est, quod curiosus tantummodo lector attingere teneatur. Et ex capite sexto tantummodo distantias planetarum a Terra ex §. 906, earumque magnitudines ex §. 922, haurire debet. De aspectibus capite septimo sufficiunt eadem definitiones §. 926-935, cum definitionibus eclipsium §. 937 & §. 982. Denique ex capite ultimo de stellis

lis fixis & novis atque cometis, sufficiunt theorematum absque demonstrationibus, & observationes, omis- sis vero problematis. Ea abunde satisfaciunt, ut de rebus astronomicis verba facere possit, quando occasio tulerit in sermone communi, & intelligere, quæ in Calendariis de iisdem habentur.

§. 293. Quodsi quis cognitionem historicam Astronomiæ accuratorem desiderat; is omnia, omis- sis demonstrationibus, ea industria perlegere debet, quam pro primo cognitionis gradu præscripsimus. Quodsi tamen praxin non curat, nec opus esse videtur, ut singula problemata perlustret. Abunde sufficit, si theoriam planetarum primariorum perspectam habeat & calculi eclipsium ideam aliquam animo concipiat. Permittendum adeo est unicuique, quo usque ipsum trahat sua voluptas. Vix enim alius finis intendi potest, quam ut notitia rerum astronomicarum animum delectet. Quoniam itaque sola voluptas mensura est eorum, quæ addiscenda sunt, uniuscujusque omnino relinquendum est iudicio, quantum eidem satisfaciât. Quemadmodum illam suo quisque modulo metiri debet, nec ex se judicare licet alios; ita quoque determinari nequit, quænam unicuique conducant.

§. 294. Cognitio Astronomiæ historica, quoad partem sphericam, faciliatur continuo usu Globi cœlestis, qui semper ad manus esse de-

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

bet. Etenim definitiones multo facilius intelliguntur, si ea, quæ declarant, in superficie Globi repræsententur; cum imaginatio nihil amplius facessat negotii, ob consensum ejus cum sensu seu visu. Si schemata in plano delineantur, quemadmodum fieri solet & a nobis quoque factum est; sensus non revera exhibet, quod repræsentare debebat; sed saltem dirigit imaginationem, ut vi vocabulorum, quæ in definitione continentur, sibi formet ideam ejus, quod cognosci debet. Sumamus exemplum facile, ut quæ dicuntur recte intelligantur. Declinationem stellæ definimus per distantiam ejus ab æquatore. Cumque distantiam a circulo maximo esse ostenderimus arcum circuli maximi inter duo puncta in superficie sphæræ intercepti & ad circulum maximum perpendicularem (§. 76 *Spheric.*); ideam declinationis formaturi imaginari debemus circulum maximum in superficie sphæræ, qui per centrum stellæ, seu punctum in sphæræ superficie datum, & per æquatorem transit, & hunc ad angulos rectos secat. Quamobrem cum porro constet (§. 28 *Spher.*); hunc circulum transire debere per polos æquatoris, quos eosdem esse cum polis mundi constat (§. 48 *Astron.*); nobis imaginari debemus sphæram cavam, in cujus centro oculus collocatus, & in eadem duos polos, circa quos vertitur, una cum æquatore intervallo quadrantis

Y y

in

Tab. IV.
Fig. 40.

in superficie sphaeræ descripto, & circulo transeunte per polos & stellam, seu punctum in superficie datum transeunte, qui secat æquatorem. Ita enim demum idea repræsentabit declinationem. In plano circulus MAPQ repræsentat sphaeram mundanam, puncta P & p polos mundi diametraliter oppositos, AQ æquatorem ex altera hemisphaerii parte, in qua sumitur stella S sive punctum quodcunque datum. PSp repræsentat circulum, qui per polos mundi P & p atque punctum datum S transit, in eadem hemisphaerii parte, & æquatorem in D secat. Unde arcus circuli maximi DS repræsentat Declinationem stellæ, seu puncti S. Hinc liquet, quomodo definitiones primum explicandæ sint per figuras in plano delineatas. Enimvero cum idea hujus schematis non sit ea, quæ rem ipsam, prouti concipitur, repræsentat, sed vicariam saltem operam præstet; imaginatio- nis est, eam transformare in ideam veram. Loco igitur circuli APQpA nobis imaginamur sphaeram cavam, in cujus centro oculus constitutus; in ejus superficie imaginamur porro duos polos P & p sibi diametraliter oppositos, & æquatorem ab utroque polo undiquaque eodem intervallo distantem, tandemque circulum alium per stellam in eadem superficie sumram & duos polos transeuntem, qui necessario æquatorem secat. Atque ita demum imaginatio veluti visui

percipiendam exhibet declinationem SD. Nemo non videt non sine exercitio vim istam acquiri, quæ imaginationi ad istam transformationem idearum sufficit; immo ipsam imaginationis vim jam extendendam esse, ut satis clare repræsentet quod percipiendum. Enimvero si globus fuerit ad manus, cum in ejus superficie designati sint poli, & æquator descriptus, ac præterea Meridianus circulus per polos mundi transiens, sub quo ob ejus volubilitatem circa polos, & situm Meridiani fixum, quodvis superficiei punctum pro arbitrio constitui potest; non alia re opus est, quam ut stella constituatur sub Meridiano, ita enim ejus arcus inter eandem & æquatorem interceptus repræsentat declinationem, qualem imaginatio percipiendam exhibere decet. Atque ita sensus cum eadem consentit. Non est quod excipias, Globum exhibere in superficie convexa, quod imaginatio transferre debet in concavam; consequenter nec hic sensum cum imaginatione consentire. Etenim quis non videt, cum non necessarium sit ut oculus collocetur in centro sphaeræ, fingi posse quod is extra sphaeram collocetur? quod ubi imaginamur, imaginatio a sensu non dissentit. Quod si vero imaginationis vi ipsam sphaeram mundanam repræsentare velis; qualis nobis apparet, dum noctu cælum stellis superbiens contuemur; multo jam facilius accidit ea, quæ

quæ oculo extra sphaeram mundanam per fictionem constituto apparent, eidem in centrum sphaeræ retracto, tanquam in concava, percipienda exhibere.

§. 295. Non dubito fore haud paucos, qui nodum in scirpo quæri existimaturi sunt, & sine istiusmodi scrupulositate Astronomiæ cognitionem historicam acquiri posse tanto confidentius sibi aliisque persuaderi conabuntur, quod experientia testetur, ex schematicis in plana delineatis satis intelligi, absque ulla opera, quæ per definitiones explicantur, & in resolutionibus problematum præciuntur. Enimvero quis vitio vertet Philosopho, quod distincte explicet usum facultatum, quem alii de eodem parum cogitantes faciunt, præsertim eo fine, ut simul ostendat, quomodo usum istum facilitare liceat? Homines & animalia moventur absque cognitione regularum Staticæ, nec norunt, quem faciant eorundem usum, dum easdem inviolabiliter observant. Equis vero reprehendit BORELLUM, quod, in egregio opere de motu animalium, ex regulis Staticæ eundem demonstrandum sibi sumserit? Si quis fuerit Astronomus, qui in Psychologia simul versatus, ut acuminis suo discernere possit, quæ modificationibus animæ insunt; is utique agnoscet vera esse, quæ de idea vi imaginationis formanda ad clare percipienda, quæ in Astronomia sphaerica docentur, in medium attulimus (§. 294).

§. 296. Quemadmodum vero illam idearum transformationem juvat, præter Globum cœlestem, sphaera etiam armillaris; ita non inutile foret, si, ad similem usum in parte Astronomiæ theorica obtinendum, adhiberentur Instrumenta levi sumtu parabilia, quibus phaenomena motus secundi apte repræsentarentur; non quidem ea accuratione, ut calculi vicem subire possent, sed quantum sufficit, ut motus secundus, seu proprius, distincta notatione comprehendatur. Intendebat hoc PURBACHIUS cum suis Theoricis Planetarum; sed cum, Astronomiæ parte theorica per COPERNICUM imprimis ac KEPLERUM reformata, nullus amplius illarum sit usus; alia prorsus forma fieri hodie deberent instrumenta ad motus secundi phaenomena eodem modo repræsentanda, quo ope Globi artificialis repræsentantur phaenomena motus primi. Equidem non ignoro, non defuisse aliquos, qui de motu secundo Planetarum organice repræsentando cogitarunt; sed defunt instrumenta, quæ ad communem discentium usum adhiberi possent. Neque vero negandum est in Theoricis defectum istiusmodi instrumentorum esse tolerabiliorem quam in sphaericis; quia, per schemata in plano descripta, non adeo confunditur imaginatio, quam in sphaerica; & quod ad Theoricam demum accedas sphaerica absoluta; consequenter ubi notationibus astronomicis jam aduetus animus.

§. 297. Qui propter praxin Astronomiæ operam navant, cum ea varia sit, nec omnes eodem modo in ea versari debent. Constat, ad praxin Astronomiæ facilitandam, conditas esse Tabulas tam primi mobilis, quam motus Planetarum. Illarum usus est in parte sphericæ; harum vero in theoricæ. Quibus adeo calculus astronomicus curæ cordique est, illi usum Tabularum multiplici computatione sibi familiarem reddere tenentur. Præfiguntur Tabulis præcepta calculi, quæ non in omnibus sunt prorsus eadem. Quamobrem ut ea intelligantur, cognitio saltem historica ex Elementis Astronomiæ præmittenda. Quo accuratior hæc fuerit, eo melior. Equidem fieri potest, ut calculum astronomicum juxta Tabulas absolvat, qui terminos tantummodo cognitos atque perspectos habet; sed in tenebris quasi versatur, qui nihil prorsus rationis regularum perspicit. Suadendum igitur est, ut theoriæ, tam sphericæ, quam theoricæ cognitione historica animum imbuas, antequam ad calculum accedas. Dedimus ipsimet præcepta calculi astronomici, eademque exemplis illustravimus. Quamobrem qui ad hanc praxin adspirat, ad ea animum advertere tenetur. Exemplorum typum ita repræsentavimus, ut ideam exemplarem calculi animo ingenerare possit, quæ regularum vicem tueri potest, ubi plura exempla computaveris,

& eadem forma calculum describeris. Antequam autem satis exercitatus fueris, ut tibi fidere possis, quod nulla ex parte aberraveris; exempla computanda sunt, quæ in Ephemeridibus habentur, ut cum iis conferre queas, quæ calculus tuus prodit.

§. 298. Tabulæ astronomicæ non alio sine conduntur, quam ut calculus reddatur faciliior & brevior. Computantur autem ex observationibus calculo geometrico, aut, si mavis trigonometrico. Quamobrem Tabularum conditoribus calculus geometricus perspectus esse debet. Formam quoque hujus calculi cognoscere tenetur, quicumque solidam Astronomiæ scientiam acquirere debet. Nos in Elementis nostris hunc calculum, non modo regulis perspicue ac distincte propositis, comprehendimus; verum etiam exemplis illustravimus, & typum calculi ita exhibuimus, ut in praxi commode regularum vicem fungatur, ipseque calculus prolixus ab omni perplexitate & molestia liberetur. Usi nimirum hic sumus eodem artificio, quo calculum algebraicum facilitare studuimus. Quamobrem, si quis præcepta calculi cum typo conferat, non habebit, quod conqueratur de obscuritate, sed plena luce fruatur in iis intelligendis; modo in Trigonometria fuerit versatus, cujus problemata familiaria supponuntur, nec ignoret terminos, quos ex definitionibus perspectos habere debet. Neque enim accedendum

dendum est ad calculum geometricum, nisi intellectis terminis astronomicis & Trigonometriæ, tam sphericæ, quam planæ, praxi in potestatem suam redacta. Si quis numeros datos variaverit, in aliis exemplis calculi typum imitaturus; is non modo habitum computandi sibi comparabit; verum etiam ideam calculi exemplarem memoriæ infiget, ope schematis delineati in memoriam facile revocandam, quoties calculo isto utendum. Atque hoc ipso obtinetur, ut non modo molestia omnis a calculo astronomico arceatur, sed etiam ut animo placido, nec perturbato sanguinis circulo, calculos continues per tantum temporis spatium, quantum libuerit; modo tibi non molestum accidat tempus calculis fallere, quod scientiæ amplificandæ impendere mallet. Neque enim tædiæ, ex diverso fonte propululantia, pro diversitate inclinationum naturalium quibus natura homines a se invicem differre voluit, in unum confundenda; errore manifesto iis, qui in Psychologia cum laude sunt versati. Quodsi vero præcepta calculi, quæ numeris suis distincta sigillatim exhibuimus, tranquillo animo lente festinans perpendas; formæ calculi notionem distinctam consequeris, usus regulis quas in Logica pro acquirenda notione distincta præscripsimus; etiamsi illas nunquam didiceris, nec, dum juxta eas determinas facultatum cognoscendi usum, earum tibi conscius fueris. Quan-

tum hoc conducatur ad perficiendum intellectum, ut etiam extra Mathesin distincte concipere adfuefcas, quæ meditaris, & ordine in meditando cogitationes tuas promoveas, nunc demonstrare nolo; etsi demonstratio ex Psychologiæ ac Logicæ principiis dari poterat; utpote assensum non nisi eorum extorsura, qui Metaphysicæ, prouti a nobis tradita, jam operam debitam navarunt. Sufficit monuisse, quod credendum sit experto; & oculata futura sit fides singulis, quotquot consilio nostro autem benignam præbere non dedignati fuerint. Qui Astronomiam non sibi discunt, sed intellectus perficiendi gratia eidem incumbunt, id quod faciendum plurimis (cum paucis admodum Astronomis opus habeat genus humanum) illis formam calculi animo concepisse sufficit, nec opus est, ut in eodem sint exercitati. Quatenus tamen exempla lucem affundunt præceptis, non inconsultum est, ut unicum saltem, quod exhibuimus, exemplum computent, singulis præceptis ad idem applicatis; præsertim cum etiam extra Mathesin, in Philosophia præsertim practica, magna sit exemplorum vis; quemadmodum in parte altera Philosophiæ practicæ universalis demonstravimus; atque adeo utile sit ad Philosophiam animum appellenti præcepta ad exempla dextre ac expedite applicare. Ecce igitur tibi usum universalem eumque maximi facien-

dum, ob quem hæc pars studii astronomici promiscue commendari meretur omnibus, quos solida rerum cognitio iuvat; et si ætatem omnem in calculis astronomicis consumere uolint; immo et si futurum vitæ genus minime ferat, ut notitiam multo labore acquisitam conseruent. Quoniam enim ea conservari, hoc non obstante, potest intellectus habitudo, quam hoc studio acquisivisti; non est quod conqueraris, te in spem futuræ oblivionis discendo ea, quæ tibi nulli usui sunt, tempus inutiliter consumissey.

§. 299. Peculiaris quoque praxis astronomica est phenomena siderum observandi, omnis praxeos reliquæ basis. Ex observationibus enim calculo geometrico eruuntur, quæ in Astronomia scire intendimus; nec absque iis, calculi hujus beneficio, conduntur Tabulæ, quarum in praxi tam commodus est usus. Immo, absque observationibus non licet perficere Tabulas, ut major sit earum cum cœlo consensus. Ne igitur hac in parte quoque decessemus; modum quoque observandi exposuimus, ut aliquam ejus ideam animo concipere detur. Nemo autem a nobis requisiverit, ut omnia minutissime persequamur, quæ ad dexteritatem in observando faciunt. Quod si enim quis observatorem agere voluerit, is non modo intellectis iis, quæ a nobis traduntur, legat Autores supra commemoratos, cum scripta Astro-

nomorum recenseremus; verum etiam in observatorio aliquo celebri, quale est Parisinum in Gallia & Grenovicense in Anglia, per aliquod tempus commoretur, ut, quæ ad observandi dexteritatem faciunt, ab Observatoribus exercitatis addiscat. Quamvis enim impossibile non sit, ut eandem multo exercitio per se assuequatur, si in observando sedulus ac continuus sit; facilius tamen longe accidit, ubi alios præcuentes imitatur, quam si demum multa circumspeditione ipsimet detegere ea debeamus, quæ ad observationem accuratam conducunt. Quod si quis instrumenta, modumque observandi Veterum cum recentioribus & recentissimis conferre voluerit; is animadvertet cum theoria Astronomiæ crevisse quoque observationum perfectionem. Unde conficitur, eum, qui observationibus astronomicis vacare voluerit, theoriam quoque Astronomiæ sibi perspectam reddere debere. Immo ex iis, quæ in nostris Elementis demonstrantur, jam patebit, observatorem in calculo quoque astronomico, ipso etiam geometrico versatum esse debere. Sane qui observatorem agere voluerit, Astronomiam omnem, tam theoreticam quam practicam, intime perspectam habere debet. Ad observandum requiruntur instrumenta &, si observationes accuratæ esse debent, accuratis quoque opus est instrumentis. Quamobrem qui observationibus

tionibus astronomicis sese dare voluerit, instrumentorum quoque fabricam, usum, & examen intime perspicere debet. Notio instrumenti adæquata esse debet, qualis sufficit ei, qui artificem ejus fabricam docere velle, aut, si arte polleret, ipsemet idem construeret. Rationes singulorum in fabrica observandorum ex theoria Astronomiæ reddendæ, ut scientifica sit instrumenti cognitio. Usus accuratum determinat Astronomiæ theoria ad constructionem instrumenti applicata. Construitur enim instrumentum in certum finem, veluti magnus Gnomon ad observandas altitudines Solis meridianas per singulos anni dies; ex theoria autem Astronomiæ constat, quanta exactitudine finem intentum consequi debeamus. Instrumenti igitur is fieri debet usus, quem finis consequendus exigit. Examina non modo pro diversitate instrumentorum, verum etiam pro uno eodemque instrumento varia esse possunt. Eo autem tendunt omnia, ut inde constet, instrumenta esse accurate facta, atque adeo iis in observando fidentum esse, si quidem certus siste debita in observando diligentiam adhibuisse. Ad hæc examina referendum, si quis instrumento suo eadem ^{æmulationem} phænomenon observat, qua ab aliis celebribus Observatoribus alias fuit observatum; veluti si quis per telescopium suum Saturni easdem phases videt, quales primus exquifi-

tissimis telescopiis observavit HUGENIUS. De examinibus istis specialia in medium asferre non licet. Supponunt enim accuratam Instrumentorum descriptionem, qualem hic dare non licet. Sufficit adeo monuisse, quod istiusmodi examinibus opus sit, ne magno conatu ac maxima diligentia nihil agas. Observationes astronomiæ sunt paucissimorum; propterea quod non quilibet, qui Astronomiæ studio delectatur, gaudet suppellectili ad observandum necessario, fruiturque otio ac commoditate observandi. Quamobrem in nostris Elementis nonnisi ea tradidimus, quæ sufficiunt, ut intelligatur, qualibus observationibus opus habeat Astronomus.

§. 300. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, Elementa Astronomiæ integra eodem modo perlustrare tenentur, quem supra pro cognitionis gradu secundo acquirendo præscripsimus. Eum enim in finem Elementa Astronomiæ eadem methodo conscripsimus, qua Elementa Geometriæ condidimus; etsi communiter Astronomi continuo discursu, quemadmodum vulgo faciunt Autores, sua proponant; sit ita quod demonstrationes eidem interserant: quem morem etiam hodie Geometriæ sequuntur, in schediasticis præsertim quibus inventa sua orbi literato communicant in Diariis Eruditorum & Commentariis Societatum Regiarum. Constat ipsum

ipsum PTOLOMÆUM eundem morem tenuisse in Almagesto suo. Negari tamen non potest, quod methodus *Euclidea*, quam nos adhibuimus, multo sit clarior; præsertim si omnia rigide demonstranda, nec sumenda, quorum demonstratio lectoris industriæ relinquitur, neque etiam immiscenda, quæ prorsus non demonstrantur. In parte etiam spherica, ex principiis sphericis rigide demonstravimus, quæ vulgo ab Astronomis fiducia illorum principiorum sumuntur, ne evidentiam desiderent tyrones; inprimis ubi Elementa Geometriæ tam scrupulosa industria pertractarunt, quam supra præscripsimus, & qua omnino opus est, siquidem ideam methodi demonstrativæ exemplarem in usum Philosophiæ ex Mathesi haurire volueris. Neque porro negari potest, studium Astronomiæ hoc pacto facilitari. Sane non alia de causa PURBACHIUS studium Astronomiæ amplificaturus, & ad captum tyronum accommodaturus, Almagestum PTOLOMÆI, idem methodo *Euclidea* digerere cœpit; telam vix cœptam, post obitum ejus, jure legati, pertextente REGIOMONTANO. Non igitur fecimus, nisi quod judicio REGIOMONTANI, Astronomi summi, probetur. REGIOMONTANUS nullis problemata illustravit exemplis: id quod tamen apprime necessarium esse ex iis, quæ modo in antecedentibus inculcavimus, abunde elucet. Præterea ipsa res loquitur,

quod, cum is nonnisi Almagestum PTOLOMÆI in formam Elementorum EUCLIDIS redigere voluerit, idem non tradat nisi Astronomiam antiquam, a qua recentior plurimum differt, præsertim in theorica; ut adeo dici nequeat nos adum egisse. Quemadmodum vero Elementa Geometriæ *Euclidea* multo clariora & evidentiora reddidimus, tum quod demonstrationes fecerimus completas & ordinatas, quales esse debent, si quis methodum demonstrativam in usum philosophandi addiscere voluerit, tum quod resolutiones problematum magis distincte exhibuerimus; ita idem observavimus, ut in ceteris Matheseos partibus, sic etiam in Elementis Astronomiæ. Observationes præterea, quales in Mathesi pura nullæ occurrunt, sigillatim quoque ita recensuimus, ut præter facta nihil contineant; ea vero, quæ inde concluduntur, per modum corollariorum deduximus; quemadmodum vult Logica verior, & fieri debere in Logica nostra evicimus: id quod etiam in disciplinis opticis jam fecimus. Sicuti enim methodus demonstrativa in iis, quæ operationibus intellectus perficiuntur, ad amissum observat regulas in Logica præscriptas: ita etiam in iis, quæ sensuum usu sub directione intellectus innotescunt, ejusdem regulas sequi debet. Nihil adeo a nobis prætermisum existimamus, quod methodus accurata exigere poterat. Cum in theoricis nonnulla

tur,

tur, quæ rigide demonstrata esse dici nondum potest, etsi rationi & experientiae admodum consentanea videantur, & quæ in usum Astronomiæ practicae sumenda esse unanimiter hodie consentiunt Astronomi; veluti quod Terra moveatur motu vertiginis, & motu translationis circa Solem (§. 622), & descriptio Systematis mundi (§. 630); demonstrationis quoque titulum omisimus; ne, contra regulas Logicæ de demonstratione, pro tali venditemus, quæ non est, ut ab incautis vulgo pro tali habeatur. Nulli igitur dubitamus fore, ut certam nobilissimæ scientiæ cognitionem ex Elementis nostris hauriat, qui non perfunctoria opera in iisdem versari voluerit. In Theoricis secuti sumus hypothesin KEPLERI; quam cum cælo magis consentire ceteris hypothesibus commentitiis omnibus in confesso hodie est, apud Astronomos omnes, fiducia observationum quibus in Astronomia omnia dirimenda. Quamobrem quoque placuit calculum geometricum explicare, qualem dedit KEPLERUS in Commentariis de stella Martis, & in Epitome Astronomiæ Copernicæ; ut & constructio Tabularum Rudolphinarum, & calculus Rudolphinus intelligatur. Quoniam tamen hodie majore fruimur luce in Geometria, quam KEPLERI ævo; ea quoque addidimus, quæ lubens ipse in theoriam suam recepisset, siquidem ipsi ea videre licuisset.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

§. 301. Neminem vero; qui Dioptricam ante didicit, quam ad Astronomiam accederet; quemadmodum omnino fieri debet, ob exitium telescopiorum in omni Astronomia usum; offendet, ubi observaverit in theorica quædam sumi, quæ in rigore geometrico vera non sunt, ad veritatem tamen propius accedunt. Etenim in cognitione Naturæ mathematica, ad quam etiam Astronomia referenda, præsertim si more *Kepleriano* tractetur, non attendendus est rigor geometricus, modo constet quæ eodem invito sumuntur ad veritatem prope accedere; præsertim ubi theoria quæritur propter praxin, ubi approximationes æquipollent veritati. Vidimus quoque in Mechanica istiusmodi hypotheses in locum hypothesium naturæ utiliter substitui; immo si praxin unice respicias, substituendas esse. Quoniam tamen ad Astronomiam accedere licet, Mechanica seposita, statim a Geometria elementari & Trigonometria utraque; non incon-sultum duximus denuo inculcare, quod attento lectori ex anterioribus jam patere poterat. Neque hoc abhorret a more priscorum Astronomorum, cum tamen antiquissimis temporibus rigor demonstrandi maxime sese probaret Geometris. Etenim in computo eclipsium sumserunt, quemadmodum adhuc fieri solet, lineas rectas pro arcubus circulorum, & triangula spherica in

Z z

plana

plana converterunt, ad facilitandum calculum; propterea quod non committitur error sensibilis, sed qui observabili minor; error autem observabili minor in Astronomia practica habetur pro nullo. Huc etiam referri debet, quod in doctrina primi mobilis semidiameter Telluris habeatur pro puncto, respectu distantiae fixarum. Quando vero dicimus, in demonstrationibus astronomicis non semper observari rigorem demonstrandi; id non intelligendum de forma, sed de materia demonstrationis. Constat nimirum ex Logica, formam probationis semper eandem esse debere, nec ab ea unquam recedendum, si methodus accurata esse debet: id quod etiam usui est in rigore demonstrandi agnoscendo; ne quis sibi persuadeat supponi, quæ vera sunt, sibi autem in memoriam venire nequeunt. Nullo igitur modo probamus, si rigor demonstrandi quoad formam negligatur; quicquid etiam videatur aliis. Notandum vero & hoc est; in Astronomia a rigore demonstrandi quoad materiam recedi, absque ullo scientiæ detrimento; quemadmodum etiam in Dioptrica contingit. Quod enim sumitur contra veritatem, eadem tamen non invita sumitur; quia quod sumitur quoad praxin in locum veri surrogare licet, nec sine utilitate. Alia vero longe ratio est, si dubium sumitur tanquam verum, non sine formidine oppositi. Hoc enim in casu sub-

eundum est periculum errandi, quale non metuendum in præsentī casu. Sunt equidem etiam in Astronomia, quæ dubia sunt, & ad certitudinem hætenus deduci minime potuerunt: sed ea a ceteris satis aperte distinguimus, ne cum certis confundantur. De hisce plura mox monebimus in sequentibus. Non vero vitio vertitur Astronomo, si in dubiis acquiescit, ubi certitudo haberi nequit: illud demum vitio vertendum fuerat, si dubia pro certis venditaret. A priori nullum damnum metuendum scientiæ; a posteriori autem detrimentum patitur scientia. Ingenue confitentur Astronomi, se a certitudine adhuc abesse, ubi eam nondum consecuti; minime autem certa & explorata videri volunt, quæ non sunt. Immo si contingat a vero aberratum esse, observationibus contrarium ejus, quod statutum fuerat, loquentibus; dissensum ab observationibus minime dissimulant; multo minus erroribus-incrustandis ac pertinaciter defendendis operam impendunt, prouti eruditis ceteris solenne. Veritatem nimirum quarunt, quam ubi nondum invenerunt, eandem invenisse videri nolunt; ne sibi non minus quam aliis ad eam inveniendam viam præcludant. In iis quoque, quæ dubia sunt, unus non ægre fert dissensum alterius, quantuscunque fuerit; nec propter dissensum unus alterius laudi detrahit, multo minus eundem infestatur, quem-

quemadmodum denuo ab aliis eruditis fieri assolet. Quamobrem & nos in dubiis adversas sententias recensuimus, citra injuriam in ullum dissentientium; & unicuique liberum reliquimus, cuinam illarum accedere velit, aut num inter extremas mediam amplecti malit.

§. 302. Qui ad tertium cognitionis gradum aspirant, sive in Mathesi acquiescere, sive intellectum in usum philosophandi perficere velint, iis multa suppeditabit Astronomia. Etenim a parvis initiis continuo crevit, & per multiplices ambages ad eam tandem accessit, quæ a cognitione humana maxime remota videbantur. Ad progressum adeo Astronomiæ animus maxime attendere debet, qui artificia cognoscere studet, quibus abditæ Naturæ rimari datur. Pars ejus sphærica multo facilior theoricæ. Quamobrem de illa nobis primum sigillatim dicendum. Capite primo recensuimus observationes communes, ac inde prima Astronomiæ sphæricæ principia stabilivimus. Observationes communes sua sese sponte offerunt cœlum contuentibus, nec vulgi captum transcendunt. Atque adeo liquet prima principia esse Astronomo cum vulgo communia. Neque etiam aliter fieri potuit, quam ut, qui primus de Astronomia cogitavit, aliunde notiones aliquas distinctas acquireret ad ulteriora profuturas, quam reflectendo super iis, quæ nemo ignorat, nisi rationis usu omni

destitutus. Per hæc communes observationes, cœlum percipitur instar sphære cavæ, in cujus centro Terra est, cui insistimus, & cujus superficiæ affixæ sunt stellæ, quæ autem circa Terram continuo revolvitur. Vulgo hæc notio confusa est; sed Astronomus, qui notionem sphære distinctam ex Geometria hausit, eam applicans ad ea, quæ percipit, distinctam consequitur notionem. Atque ita Astronomiæ studiosus, immo primus ejus inventor ultra vulgus sapere cœpit, dum, notione communi ad distinctam revocata, aditum sibi ad ulteriora pandit; cum vulgus in confusa acquiescens ulterius progredi nequeat, sed in iis, quæ percipit, subsistere teneatur. Quæritur vero jam, an quod apparet revera quoque ita se habeat; nimirum an cœlum sit sphæra cava, an Terra sit in centro ejus, ibidemque quiescat, an cœlum circa eandem continuo rotetur, an stellæ omnes superficiæ ejus sint affixæ? Hoc pacto liquet, quomodo statim inventori plura invenienda sese offerant. Quodsi ponas eum esse circumspæctum, ne per præcipitantiæ statuatur; ad quæstiones hæc animus advertens, eas omnes hinc pendere animadvertit, num semper quod apparet ita quoque revera sese habeat. Ponamus Opticam nondum esse inventam, quemadmodum probabile est Astronomiæ eandem ortum suum debere: nemo non videt re-

currendum fuisse ad observationes communes de iis, quæ nobis apparent. Videtur nobis cœlum sphaera cava, in cuius centrō sumus; quod stellæ omnes eandem distantiam a Terra habere videntur; nullumque corpus aliud inter oculum & stellæ interpositum apparet. Quodsi ergo experientiam communem consulimus; objecta remota, etsi aliquo intervallo a se invicem distent, eodem tamen a nobis abesse videntur, ubi inter ea nullum aliud corpus interpositum conspiciamus; veluti dum arborem in agro a sylva procul adhuc remotam huic conterminam videmus e longinquo. Incertum adeo esse cognoscimus, num cœlum sit sphaera cava; num superficiem ejus affixæ sint stellæ; num denique Terra sit in centro. Cumque ex observationibus communibus hæc decidere non detur; quid statuendum sit, dubitandum; neque hætenus apparet, quomodo a dubitatione liberari queamus. Immo ex progressu patebit, non adeo facile fuisse, ut ab eadem liberaremur. Non plura secula, sed integri millenarii elapsi sunt, antequam aliqua saltem probabilitatis specie statui potuerit, quid veritati consentaneum videatur. Liqueat adeo, a præcipitantia non abesse, qui scepticismum amplectuntur, quamprimum animadvertunt se a dubitatione liberari non posse, adeoque veritatem frustra quæri sibi aliisque persuadent. Quodsi jam porro dispiciant,

num quod quiescere videtur, revera quiescat, & quod moveri videtur, revera moveatur; observationes denuo communes loquuntur, quiescentibus in re celerrime mota, quæ quiescunt in partem contrariam ferri videri; veluti dum curru celerrime vecto per sylvam arbores nobis in eodem sedentibus in plagam contrariam currere videntur, vel dum littora moveri in partem contrariam in navi celerrime mota sedentibus apparet. Quamobrem denuo in dubitationem adducimur, utrum Terra quiescat, & cœlum circa eandem rotetur; an vero stellæ quiescant & Terra motu vertiginis in plagam contrariam convertatur. Liqueat autem, ut ante, ex observationibus communibus decidi minime posse, a qua parte stet veritas. Quodsi ergo qui primi ad Astronomiam animum apulerunt, scepticismo locum dare voluissent; omni adhuc Astronomia careremus. Enimvero quid faciendum erat in hisce angustiis constitutis? Ea tanquam dubia erant notanda, & observationes communes ulterius expendendæ, num forsan per eas major lux sit affulsura, & an nos deducant ad alia intellectui magis obvia. Quodsi hoc facias, in notionem ortus & occasus incidis, quem admodum capite primo ostendimus; quos ubi invicem confers notionem habes moræ supra horizontem. Secundam porro observationem expendens, continuam stellarum situs re-

spectu

specu verticis tui variationem deprehendis, distantia a vertice a primo ejus ortu continuo decrescente, donec ad minimam pervenerit, & deinde rursus crescente, donec ad maximam regressa in parte cœli opposita occidit. Præterea hinc discimus, continuo alias stellas oriri; eas autem, quæ per aliquod tempus conspicuæ fuerant, denuo occidere. Hæc ubi distincte considerantur, quærendorum sese offert numerus; nimirum quando stella aliqua oriatur, quando occidat, quanto temporis intervallo in parte cœli nobis conspicua commoretur, seu quodnam tempus inter ortum atque occasum intercedat, quanam sit minima ejus a vertice distantia, quandonam ad eandem perveniat, quò tempore singulas intermedias in utraque cœli visibilis parte acquirat. Nemo non videt, phænomena, quæ quærenda animo insinuant, pendere ab eo quod cœlum, cujus superficiiei stellæ affixæ sunt, videatur circa Terram quiescentem, in qua fixum tuemur locum, moveri, atque ex hoc assumto rationem corundem reddi posse. Unde manifestum est, in gratiam horum phænomenorum, ubi quæstiones, ad quas nos ea deducunt, resolvendæ, instar hypotheseos sumi posse; quòd cœlum sit sphaera cava, in cujus superficie hæreant stellæ eidem affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem continuo gyra-
tur. Quoniam ex anterioribus con-

stat, phænomena eadem proditura, si Terra in plagam contrariam circa axem suum convertatur, cœlo cum stellis quiescente; æquipollentia utriusque hypotheseos probe perpendenda: ita enim constabit, ubi non quæritur nisi quæstionum illarum, quas commemoravimus, solutio, salva veritate sumi posse utramvis; consequenter in Astronomiæ parte prima, quæ de motu communi agit, nos feliciter progredi posse, etiam si ignoretur, quanam harum hypothesium sit vera. Enimvero utraque hypothesis non eadem facilitate sese commendat dictas quæstiones resoluturis. In inveniendo itaque & demonstrando præferenda ea, quæ faciliorem operam parit. Ac ea de causa in parte sphaerica Astronomiæ sumitur motus cœli & quies Telluris; ac bona methodus jubet sumi, etiam si contrarium verum esse invictis argumentis demonstrari posset. Etenim in inveniendo & demonstrando, præsertim ubi praxin intendimus, hypothesis vicaria in locum hypotheseos naturæ seu veritatis surrogatur; quemadmodum jam vidimus in aliis quoque disciplinis mathematicis fieri. Hinc itaque elucescit, progressui Astronomiæ sphaericæ non obesse ignorantiam veritatis, sed, eadem in dubio relicta, non minus praxi satisfieri, & in ea ad liquidam veritatem pertingi posse, ac si a primis dubitationibus prorsus essemus liberati. Neque dicendus es a vero aberrare ac

erroribus locum dare ; modo caveas, ne per præcipitantiam quoad ea erres quæ sumis. Etsi enim in præsentī negotio error non noceat, nocere tamen potest in aliis ; iis scilicet quæ ab eo pendent quod est, non vero ab eo, quod apparet.

§. 303. Probe ea, quæ modo dixi, perpendant velim, qui ad Philosophiam animum appellant ; etsi Mathematicis, qui, antecessorum suorum inventa addiscendo, sibi habitum quendam inveniendi compararunt, talia puerilia videantur & contemnuntur ; qui tamen contentui dant pœnas, quoties de rebus philosophicis iudicium sibi sumunt, aut superbo supercilio Philosophiam contemnunt omnem, propterea quod quæ in ea vulgo docentur a certitudine, qualis in Mathesi datur, immenso intervallo distant. Quodsi vero acumine quo pollent usi, ad animum revocarent ea quæ modo dixi ; haud difficulter animadverterent, Philosophiam hæcenus in infantia fuisse ; infantiam vero ejus prorsus convenire cum infantia Astronomiæ ; quæ, si ob eundem statum negligenda, non educanda fuisset, nunquam ad virilem ætatem adolevisset. Sane non rectius videre licet, quomodo scientiæ philosophicæ, quæ ex communi vulgi notitia tanquam ex semine nascuntur, in primo ortu esse debeant, quam si ad ortum Astronomiæ animum attendant. Quodsi porro eandem attentionem ad progressum ipsius afferant ; quid fieri de-

beat, ut Philosophia quoque humano generi adeo utilis adolescat, haud difficulter perspicient Astronomos imitaturi, quantum fert differentia, quæ inter cognitionem philosophicam & mathematicam intercedit. Demus exemplum. Communi experientia constat, animam in perceptionibus suis dependere a corpore, & vicissim corpus quoad motus organorum exteriorum & sui totius, ab anima. Hæc dependentia phenomenon est, quale est figura sphaerica mundi, cujus superficiei stellæ affixæ & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem continuo gyra-
tur. Philosophus, perinde ac Astronomus, notionem confusam revocat ad distinctam, animamque a corpore dependere agnoscit, quoad specificationem perceptionum & continuitatem temporis, quo cum mutationibus in organis sensoris contingunt ; & corpus ab anima, quoad specificationem motuum voluntariorum & continuitatem temporis, quo cum volitionibus animæ contingunt (§. 962 *Pfych. empir.*) ; notationibus adjunctis ontologicis quemadmodum Astronomus geometricis. Atque hoc pacto primo passu discedit a cognitione vulgi, sibi aditum paraturus ad ulteriora. Quoniam vero novit, notionibus confusis non esse fidendum, cum per eas appareant haud raro, quæ non sunt ; ad hæc quæstiones delabitur, utrum illa dependentia sit realis, an vero saltem appareat ; seu num
anima

anima & corpus revera in se invicem agant, & a se invicem patiantur, an vero tantummodo in se agre, & a se invicem pati videantur; quemadmodum Astronomus quærit, num coelum cum stellis fixis circa Tellurem in centro ejus collocatam revera moveatur, an saltem moveri circa eandem videatur, & utrum Telluris situs revera talis sit, qualis apparet, nec ne. Experientia communi quæstiones suas dirimi non posse, perinde ac Astronomus agnoscit. Quemadmodum enim hic motum coeli circa Tellurem non observat, neque etiam situm ejus in centro sphaeræ mundanæ; ita similiter Philosophus nullam observat actionem corporis in animam, nec animæ in corpus (§. 949, 955 *Psych. empir.*). Quodsi dicas, NEWTONUM, virum perspicacissimum, affirmare, actionem illam mutuam animæ ac corporis in se invicem, singulis momentis, nos experiri; facilis est responsio. Acumine summo polluit in geometricis, non vero in metaphysicis: acumen autem Geometræ, quod ab imaginatione pendet, non est idem cum metaphysico, quod imaginationi prorsus subducitur. Quemadmodum itaque per præcipitantiam judicarunt Astronomi, si qui experiri sese sibi visi fuerint figuram mundi sphaericam, situm Telluris in centro ejusdem, & motum continuum circa Tellurem in centro quiescentem; ita quoque per præcipitantiam judica-

vit NEWTONUS, quando sibi visus fuit experiri actionem mutuam corporis ac animæ in se invicem, qua una substantia in modificationibus suis efficiatur dependens ab altera. Ab hac præcipitantia sibi utique cavisset, siquidem ortum Astronomiæ distincte expendere voluisset, Astronomiam non sibi soli addiscens, sed in usum quoque philosophandi. Quod hoc facere debuerit, minime contendimus, nullius jus violaturi, quod Natura unicuique concessit; utpote qui ab omni injuria procul remotum habemus animum, multo minus ejus laudi detrachere cupimus, quam summam ipsi merito suo magno deferimus; ne quicquam contra humanitatis officia, ad quæ aliis prompte præstanda obligamur, admittamus. Veritati non minus debetur honos suus, quam hominibus præclare de eadem detegenda, & ejus thesauris amplificandis, promeritis. Neque præsumendum est, viros magnos velle, ut, dum laudamus, adulemur; cum adulatio potius anam det laudibus promeritis detrahendi, quam eas amplificandi, nec ipsi appetere censendi sunt nisi veritati consentaneas. Certum adeo manet, Philosophum circumspectum, non minus ac Astronomum (§. 302), in dubitationem adduci, quid de dependentia animæ ac corporis a se invicem, in modificationibus suis, statuendum sit, ubi ejus ratio ex essentia & natura utriusque reddenda;

denda ; quemadmodum eam non aliunde reddendam esse per prima philosophiæ principia edoctus est. Quemadmodum vero Astronomus, in limine Astronomiæ adhuc constitutus, non videt quomodo a dubitatione liberari possit ; ita similiter nec Philosophus, in limine Philosophiæ adhuc constitutus, reperit quomodo ex dubitatione eluctari queat. Quid igitur faciendum ? Num animus omnis prorsus abjiciendus & in scepticismum eundum ? Absit ut hoc faciat, qui philosophari decrevit ! Imitari convenit Astronomum. Inquirendum itaque, num observentur alia, quæ ab ista mutua modificationum animæ ac corporis dependentia a se invicem porro dependent. Videmus a sensatione pendere alios actus facultatis cognoscitivæ, & ab his actus facultatis appetitivæ & averativæ : videmus etiam actuum non minus internorum animæ, quam motuum organorum corporis, seu actionum externarum, determinationem pendere a nutu animæ ; consequenter eidem competere directionem actionum externarum & internarum quandam. Horum rationem reddi posse apparet ex mutua illa dependentia. In hæc igitur omnia inquirere, & praxes hinc a priori deducere licet ; nondum licet cognita ratione mutua illius dependentiæ modificationum animæ ac corporis a se invicem. Quamobrem sicuti in Astronomia sumimus motum communem tanquam

phænomenon, & inde deducimus alia, quæ ab eodem pendent, parum solliciti, num revera detur, an saltem appareat ; ita quoque, in Philosophia, mutua animæ ac corporis quoad modificationes a se invicem dependentia sumenda tanquam phænomenon, ac inde deducenda sunt alia, quæ hinc porro pendent ; nec ea Philosophum tangere debet cura, num illa dependentia realis sit, an tantummodo apparens, & quanam sit ejus causa. Immo cum constet, quæcunque tandem causa sit illius dependentiæ, semper tamen supponendum esse animam & corpus ita agere, ac si in se invicem influerent ; quemadmodum in Psychologia rationali evicimus ; si vel maxime falsum esset, animam & corpus in se invicem influere, veritate tamen illæsa, sumi potest tanquam hypothesis naturæ vicaria, quoad regimen corporis, quod animæ tribuitur, immo quoad regimen sui ipsius, quatenus a corpore pendere videtur, animam & corpus in se mutuo influere ; quemadmodum, in Astronomia, quoad motum communem sumimus, cælum esse sphaeram cavam, cujus superficiæ affixæ sunt stellæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus collocatam ab oriente in occidentem convertitur, etiamsi persuasi simus, hæc a veritate abhorreere, ob rationem paulo ante (§. 302) dictam. Memini cum systema harmoniæ præstabilitæ maxima animorum acerbitate impugnaretur,

tur, quasi per ipsum omnis moralitas, omnē regimen politicum, immo omnis religio funditus evertatur, cumque ad avertendum tantum ab eo periculum ista monerem; Theologo cuidam celebri hoc paradoxum, immo absonum visum fuisse. Sed hoc ipsi condonandum erat, tanquam methodi demonstrativæ, ac Artis analyticæ prorsus ignaro, cujus nec notionem ullam, nec exemplum habebat. Equis enim est qui nesciat, si vel in sola Mathesi attentionem suam desiderari minime passus fuerit, sine methodi demonstrativæ notitia, nemini esse posse ideam dependentiæ veritatum a se invicem, nec sine Artis analyticæ cognitione constare posse, quānam, etsi nondum definita, sumi queant illarū veritate ad alia investiganda, quæ usum in praxi habent? Enimvero, si qua sunt quæ a causa illius mutæ ac corporis dependentiæ a se invicem dependent; tum ea non amplius sumitur tanquam vera, nisi demonstratum fuerit, utrum ea realis sit, an tantummodo apparens; quemadmodum in parte theorica, Astronomi non amplius sumunt Telluris quietem & motum communem, sed potius motum vertiginis Telluris, cœlique ac stellarum quietem. Poteramus alia addere exempla, ex Physica generali pariter, ac speciali, nisi unicum sufficeret, ut intelligatur, quomodo in re-præsenti Astronomum imitari debeat Philosophus.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

§. 304. Postquam in Astronomiā parte sphaerica Astronomi sumserunt, cœlum esse sphaeram cavam, cujus superficiei stellæ omnes sunt affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem ab oriente in occidentem continuo circumvolvitur; ad hoc phænomenon Geometriam applicarunt, ut alia hinc pendentia determinarent, cum phænomenorum motus primi, sive communis, cognitionem mathematicam quærent. Quamobrem qui tertium cognitionis gradum intendit, in capite secundo, quod de circulis sphaeræ mundanæ agit, ei inquirendum est, quem in finem circulos istos in ejus superficie descriptos imaginentur. Ipsa natura quasi circulum descripsit, qui visum oculi undiquaque terminat, & sphaeram mundanam in duo hemisphaeria dividit, Horizon ideo dictus. Circulus hic immotus est, dum sphaera mundana continuo volvitur; adeoque ultra sphaeram mundanam imaginari tenemur aliam immobilem, in cujus superficie peripheria hujus circuli descripta. Ipsa adeo natura Astronomos deduxit ad distinguendos circulos mobiles ab immotis, antequam perpenderent, quales circuli superficiei sphaeræ mundanæ sint inscribendi. Videmus hinc cognitionem Naturæ mathematicam, imaginaria admittere, tanquam principia ex quibus deducitur, & fictionibus locum dare: id quod præpostere imitari minime

A a a

debet

debet Philosophus; etsi in nonnullis utiliter imitetur, quemadmodum modo vidimus (§. 303). Hinc vero accidit, quod Mathematici, ad res philosophicas celeri nimis gradu properantes, imaginaria a realibus non distinguant; & notiones in Mathesi toleranter veras, tanquam reales, importuno ausu in Philosophiam inferant; quemadmodum nec alia fuit ratio, quod olim Physici mundum ex sphaeris crystallinis cavis compositum finxerint; donec tandem hypothesis insulsa, a TYCHONE DE BRAHE explosa, nullam amplius hodie inveniat fidem. Utinam huc animum serio adverterent, qui, ex Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis & Optica Mathematici summi ISAACI NEWTONI, nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpere volunt; quasi notiones imaginariæ, quæ ad cognitionem Naturæ mathematicam sufficiunt, & in ea fecundæ deprehenduntur, in Philosophiam primam & naturalem utiliter inveherentur; immo quasi ex istis notionibus imaginariis inferri possent, quæ ad Theologiam naturalem, & Cosmologiam generalem spectant. Idem enim revera agunt, quod fecere antiqui, qui notionem imaginariam mundi, quæ Astronomo in explicando motu communi adeo proficua fuit, tanquam realem in Physicam inferre ausi sunt. In usum cognitionis mathematicæ multa fingere licet; sed fisiones istæ mathematicæ non

sunt veræ causæ, quibus effectus Naturæ intelligibili modo explicantur. Absit autem, ut quis hinc inferat, quasi laudibus Mathematicorum detrahere & supra Mathematicos Philosophos extollere velimus! Neque enim nobis jam propositum est Philosophos cum Mathematicis committere, nec de Jure præcedentiæ controversiam movere. Diversitatem saltem notionum imaginariarum & realium inculcamus; ne in detrimentum scientiæ confundantur, quæ diversa sunt; sed legitimus utrarumque conservetur usus. Nihil decedit laudi Mathematici, etsi non habeatur Philosophus: quemadmodum nec Philosophos laude sua, quam meretur, frustratur quod non simul habeatur Mathematicus. Mathematici & Philosophi in numerum eorum entium referendi, quorum non est ad se invicem ratio; utut maxime consultum sit Philosophum simul esse Mathematicum, præsertim ubi in Philosophia ad tertium cognitionis gradum adspirat; cum Mathematicus in arte sua summus esse possit, utut nullam inter Philosophos laudem mereatur.

§. 305. De sphaericorum theoria non ante cogitarunt Geometræ, quam cum Astronomia ad eandem eos invitaret. Qui ergo ad tertium cognitionis gradum adspirat, ei suademus, ut primo, in usum secundum, totum caput secundum perlustrat, & quomodo principia illius theoriæ ad spha-

sphæram mundanam applicentur expendat, donec singula, quæ hic explicantur & demonstrantur, habuerit perspecta; parum sollicitus, quomodo primi inventores in ea incidere potuerint. Enimvero ubi singula ipsi probe cognita atque perspecta fuerint; jam secundis curis idem caput perlustrat; atque jam supponat, quasi nulla adhuc prostraret sphaerico-rum theoria; & inquirat, quomodo supposito phænomeno, (quod veluti basis est totius Astronomiæ sphaericæ, tanquam fonte rationum de ceteris quæ quærentur reddendarum, dum in phænomenorum motus communis rationes inquirimus,) in circulos, quæ in sphaeræ superficie concipi debent, aut si mavis tanquam sphaeram secantia plana considerantur, incidamus. Immo non inconsultum erit, si ante, quinque priora capita, in usum secundi gradus cognitionis, pertractet, quam quæ in usum tertii perpendenda sunt, exquirat; quoniam hoc pacto evidentius ipsi constabit, quænam sint phænomena motus communis in hac Astronomiæ parte determinanda; sicque facilius apparebit, quonam circularum apparatu ea fini sit opus. Dum vero curis secundis caput secundum percurrit, attentione inprimis opus est, ut observetur, quomodo theoria imperfecta nos deducat ad observationes, quibus perficiatur, simulque ad observationes, quibus ad praxin aptatur. Ex. gr. Vi phænomeni fun-

damentalis, sphaera mundana circa Tellurem continuo circumvolvitur. Enimvero quæritur an puncta illa fixa circa quæ rotatur, & qui poli dicuntur, semper sint iidem; an vero mutantur. Quid sumi debeat, per observationes definiendum. Similiter, cum motus vel æquabilis, vel inæquabilis, esse possit, & celeritas in diversis revolutionibus vel eadem, vel diversa; denuo quid sumendum sit per observationes definiendum. Equidem per modum hypotheseos sumi potest, polos semper manere eosdem, motum non modo esse æquabilem, sed eandem quoque esse in qualibet rotatione celeritatem. Enimvero, ubi examinanda hypothesis, ad observationes tandem confugiendum. Atque adeo videmus, quomodo theoria imperfecta beneficio observationum reddatur perfectior. Similiter, ubi per theoriam agnoscis Meridianum secare hemisphaerium in duas partes æquales, & in eodem altitudines stellarum esse maximas, seu distantias a vertice minimas quas habere possunt; in usum praxis situs Meridiani determinandus est respectu tui loci. Nec ab simili modo patet situm quoque poli respectu loci tui determinandum esse. Deducit adeo nos theoria ad observationes, quibus eadem ad praxin aptatur. Unde liquet, quomodo ea, quæ per meditationes deteguntur, ulterius quærenda insinuent, de quibus ante cogitare non poteras. Probe autem notandum

dum est, quomodo observationes sine circulo vitioso, quem Logici vocant, instituuntur, quando utraque alteram supponere videtur, quales subinde in Astronomia occurrunt. Habemus exemplum, in invenienda linea meridiana, ad determinandum planum meridiani in dato loco §. 120. Etenim ea supponit stellæ declinationem, vel etiam Solis intra tempus observationis non mutari. Supponit observatio immutabilitatis declinationis immutabilitatem poli, quæ ex immutabilitate altitudinis maximæ, adeoque in plano meridiani, demonstratur §. 114. Quod si tamen perpendas, quæ §. 110 & seqq. docentur; videbis, quomodo abique periculo circuli vitiosi committendi hæc dirimantur. Equidem non negaverim, initio Astronomos plurima sumsisse per modum hypotheseos, quemadmodum idem quoque haud raro fieri debuisse ex Theoricis constabit; & cum ex istis hypotheseos deducta cum coelo, deinceps per alias observationes, consentire deprehenderent; assumptis demum plenum assensum præbuisse: hoc tamen minime obstat, quo minus Astronomiam methodo synthetica tradituri ostendamus, quomodo scrupulosiores in infantia statim Astronomiæ certitudini prospicere potuerint; cum nobis propositum sit eam ita tradere, ut methodum imitari liceat, non modo in Philosophia naturali, verum etiam in aliis ejus partibus, ubi

a posteriori quædam stabilienda, ut alia inde deduci queant.

§. 305. Qui tertium cognitionis gradum intendit, problemata per Trigonometriam sphericam soluta analytico more expendere debet. Artificium heuristicum, quo hic utendum, in eo consistit, ut intersectione circulorum sphaeram secantium detegatur triangulum, cujus id, quod quaeritur, pars aliqua est, sive latus, sive angulus; ac præterea attendatur, num per observationem, principia spherica, aut calculos præcedentes dentur tres ejusdem trianguli partes aliæ. Constat enim ex tribus datis per Trigonometriam sphericam semper inveniri posse quantum, quod quaeritur. Facillimum exemplum præbet problema quartum §. 198, quo inveniri jubetur puncti cujuscunque dati Eclipticæ declinatio. Quoniam declinationem metitur arcus circuli maximi, inter æquatorem & punctum datum interceptus, atque ad æquatorem perpendicularis (§. 76 *Astron.*), qui circulus declinationis dicitur (§. 78 *Astron.*); hinc colligitur, animum advertendum esse ad æquatorem, eclipticam & circulum declinationis. Quamobrem in charta describitur circulus, qui sphaeram mundanam representare fingitur; cumque situs æquatoris dependeat a polis mundi (§. 48 *Astron.*); in eo sumitur pro arbitrio punctum P, quod polum representet. Jam æquator sphaeram mundanam in duo hemisphæria dividit (§. 50 *Astron.*)

Astron.), & singula ejus puncta a polo mundi quadrantis intervallo distant (§. 49 *Astron.*). Ex polo igitur P, intervallo quadrantis AP, describitur circino arcus AQ, qui æquatorem representat. Cum polus eclipticæ certo intervallo a polo mundi P distet (§. 179 *Astron.*), & illa æquatorem secet (§. 172 *Astron.*); pro arbitrio sumitur punctum M tanquam polus eclipticæ & ex eo quadrantis intervallo ME describitur arcus EL, qui eclipticam representat, & æquatorem AQ in G secat. Cum circulus declinationis transeat per polos mundi P & p (§. 78 *Astron.*) & ex principiis sphericis pateat, quod poli ejus sint in æquatore, punctum vero S in ecliptica pro lubitu sumi possit; describatur denique arcus PSD, qui quadrantem circuli declinationis representat (§. 79 *Astron.*). Patet hoc modo intersectione æquatoris, eclipticæ & circuli declinationis obtineri triangulum DGS in superficie spheræ mundanæ, cujus crus DS representat declinationem puncti eclipticæ S, quæ quæritur. Inquirendum igitur porro est, num in eodem triangulo tria tanquam aliunde cognita deprehendantur. Quoniam itaque punctum eclipticæ S, cujus declinatio quæritur, pro lubitu sumitur a Tabularum conditore, aut in alio casu datur; in priori casu punctum G, in quo ecliptica æquatorem secat, sumi potest, vel pro principio arietis, vel pro principio

libræ (§. 158, 160 *Astron.*), in posteriori ex dato puncto eclipticæ patet, num punctum G representet principium arietis, an vero principium libræ. Pōnamus in presenti punctum G esse principium arietis. Quia punctum eclipticæ S datur, ejus distantia a principio arietis seu arcus eclipticæ SG datur. Datur præterea angulus obliquitatis eclipticæ per observationem (§. 163, 178 *Astron.*). Et ex sphericis constat angulum ad D esse rectum (§. 76 *Astron.*). Habemus itaque in triangulo DGS tria data, nimirum angulum rectum D in intersectione æquatoris AQ & circuli declinationis PD, angulum obliquitatis eclipticæ G, distantiam SG puncti eclipticæ S a puncto æquinoctiali G. Inveniri autem debet latus DS angulo obliquo G oppositum: id quod fieri posse, per Trigonometriam sphericam patet. Videmus adeo, qua analysi resolutio problematis de invenienda declinatione puncti cujuscunque eclipticæ fuerit investigata, & ex hac analysi facile condi poterat demonstratio problematis ad morem Veterum Geometrarum, siquidem tanto rigore demonstrandi foret opus. Nimirum qui ad Astronomiam accedit, cum in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ, Trigonometriæ utriusque & sphericorum, Opticæ item, Catoptricæ atque Dioptricæ jam ita versatus supponatur, ut, quæ in istis Ma-

theſeos partibus traduntur, familiaria experiatur, in Methodo demonſtrandi jam ſatis exercitatus eſt, ut non minutiffima quæque ipſi enucleari ſit opus. Non tamen inconfultum eſt, ut, qui intellectus perficiendi gratia Mathēſi operam navat, eodem rite extra eandem uſurus, analyſi quam hic commendamus ſedulo incumbat, ac ſyntheticas demonſtrationes hinc eruat.

§. 306. Qui in ſciſiſ experiuntur ſe, abſque iſta analyſi quam hic urgeamus, ſine mora ſchemata delineare, & triangulorum reſolutiones invenire poſſe, ac abſque demonſtratione hinc derivata, veritatem ſolutionis problematum propoſitæ perſpicere; tantum apparatus condemnabunt, ac tempus inanibus ſpeculationibus falli exiſtimabunt, quod longe utilius in aliis addiſcendis collocari queat. Immo non decrunt, qui, cum inter Aſtronomos merito ſuo emineant, analyſin iſtam ac derivatas inde ſyntheticas demonſtrationes inter ſuperflua referent; forſan tanquam puerilia prorsus ridebunt. Quamobrem apprime neceſſarium videtur, ut quædam ad avertendum præjudiciū philoſophaturo admoneri nocuum annotemus. Nemo in dubium vocare poteſt, omnibus iſtis notionibus quæ analyſin noſtram ingrediuntur, animum ejus imbutum eſſe debere, qui proprio Marte ſolutionem problematis de inveſtiganda declinatione ſingulorum graduum,

aut puncti cujuſlibet eclipticæ invenire, aut veritatis ejuſdem, ubi ab alio inventa ſupponitur, plene convinci debet. Pone enim quamcunque illarum eſſe tibi incognitam; exemplo conſtabit, tibi de veritate ſolutionis dubium aliquod adhuc ſuperſeſſe; conſequenter abeſſe conviſtionem, quæ omnem dubitationem excludit. Notiones igitur iſtæ omnes inſtuunt in determinationem aſſenſus, quem præbes ſolutioni tanquam veræ. Quamobrem ſi diſtincte exponendum, quomodo generetur aſſenſus, & qui fieri potuerit, ut a priori in ſolutionem problematis inciderit primus inventor; nulla illarum notionum prætermittenda; ſit ita quod inventor, vel qui ſolutionem jam inventam addiſcit, in confuſis notionibus acquieſcat, nec quæ ideæ a qua pendet conviſtio inſunt, ſingula a ſe invicem actu mentis diſcernat. Sane cum Philoſophi ſit rationem reddere iſtius aſſenſus ac modi, quo ad ſolutionem problematis inventor pervenire potuerit; nemo niſi cognitionis philoſophicæ contemtor reprehendet, quod quæ actibus animæ inſunt diſtincte explicet, utur utilitatem non pervideat. Hanc vero eſſe maximam, ſi quis animum ad philoſophandum appellat, haud difficulter oſtenditur. In Aſtronomia, ſchemata, notiones, quas antea tibi comparaviſti, imaginationi præſentes ſiſtunt; ut confuſa quædam ideæ animum attendenti ſufficiat ad veritatem pro-

protinus perspiciendam. Enimvero in Philosophia, præsertim in Metaphysicis ac Moralibus, istiusmodi subsidio destituimur, quo imaginatio apta efficitur ad vicarias intellectus operas præstandas; nec confusis ejus ideis tuto fidere licet, siquidem errandi periculum subire nolueris. Ipse igitur intellectus agere debet, quod suum est; adeoque non admittendæ sunt nisi notiones distinctæ, nec in exacta earundem evolutione unquam nimii sumus; siquidem eam desideraverimus evidentiam, quæ in Mathesi datur. Quamobrem ut evolutioni huic adsuescamus, consultum omnino est analysin problematum primi mobilis instituire, quemadmodum præcepimus: id quod in Astronomia multo facilius succedit, quam in Philosophia; quia intellectus dirigitur ab ipsa imaginatione, modo ad imaginem, quæ ob oculos versatur, animum attendas; cum, in Philosophia, imaginatio ac sensus suppetias ferre nequeant, sed intellectui magis obstaculo sint, ne suo munere dextre fungatur. Non suadeo nisi experta & quorum veritatem in seipso experiri poterit, qui voluerit. Quicquid igitur videatur aliis, qui Astronomiæ totos sese dederunt, nec Philosophiæ excolendæ operam impendendi otio fruuntur; ego istam Analysin admodum proficuum judico omnibus, quotquot ad hanc excolendam animum appellere decreverunt. Neque enim existimandum

est levi opera consequi te posse, ut methodo demonstrativa in philosophando rite utaris. Plurima enim sunt, ad quæ per exempla feliciter, quam per præcepta patet aditus: exempla vero tutissima offert Mathesis, si accurata demonstrationum analysis curæ cordique fuerit. Nos, quibus methodi intimius cognoscendæ cupido studium Matheos commendavit a prima ætate, Mathesin quoque hoc nomine maximi facimus. Non jam commemorare lubet, quod distincta usus facultatum animæ explicatio augeat scientiam philosophicam, & quod eum cognoscere teneatur Philosophus, si in Philosophia morali tradere velit, quæ satis faciunt: hic enim, ubi intellectus perficiendi nonnisi ratio habetur, ad methodum tantummodo digitum intendimus.

§. 307. Non lubet ad particularia descendere, quæ utiliter moneri poterant: neque enim consultum est, ut prima statim vice minutissime persequatur singula, qui intellectus perficiendi gratia ad studium astronomicum accedit. Quodsi enim hisce tantummodo observatis, quæ docuimus, ad studium psychologicum & ontologicum accesserit; in Ontologia & Psychologia probe versatus, proprio, quod acquisivit, acumine detegat, quæ adhuc annotari poterant. Merentur autem attentionem, quæ de refractione, parallaxi, & crepusculis dicuntur; eo etiam sine, ut intel-

intelligatur, quam necessarium sit experientiae & rationis connubium, ne per theoriam fieri posse videantur, quae tamen in praxi minime succedunt. Nimirum qui experientiam negligit, subinde fieri posse sumit, quae ob circumstantias a priori non definiendas haud quaquam fieri possunt. Unde contingit nos incidere in resolutiones problematum, quibus satisfieri nequit. Observanda haec sunt Philosopho, non minus in Philosophia morali, quam civili; ne sibi jam consecutus videatur, quae adhuc in quaerendorum numero sunt; & a veritate inquirenda desistat, quam detegere in potestate ipsius erat, modo praëiudicio isto non habuisset mentem praepeditam.

§. 308. Pars theorica Astronomiae ad perficiendum intellectum, ut eodem extra Mathesin utaris, plurimum confert; modo omnem afferas attentionem ad methodum, tantopere a nobis commendatam, & tam sollicitè inculcatam. Capite primo & secundo, in quibus de natura Solis ac Lunae, ceterorumque planetarum, tam superiorum, quam inferiorum, eorumque satellitum agitur; docentur, quae ad Physicam magis, quam Astronomiam spectant, etsi Astronomus iure suo sibi ea arroget, quae observationibus suis debentur. Quamobrem hinc discere licet, quomodo utiliter in Philosophia naturali, seu Physica, sit versandum; nimirum quomodo quaerendae sint observa-

tiones tam communes, quae sua veluti sponte sese offerunt, quam studio quaesitae; ac inde a posteriori colligantur propositiones, quas a priori detegere non dabatur, principiis ad ratiocinandum necessariis deficientibus. Nos in Physica dogmatica, quam idiomate patrio evulgavimus, eandem viam ingressi sumus. Etsi autem facilis videatur haec methodus; non tamen adeo facilem deprehendet, quantum putat, qui eadem rite uti voluerit. Nimirum acumine non nisi multa exercitatione acquisito opus est, ne observationibus inferantur, nisi quae sensui patent; ut eadem ab omni prorsus vitio subreptionis, quod in Logica vocamus, sint liberae: qua in re multum peccatur a Medicis, utut virorum experientissimorum titulum, quasi sibi proprium, dudum consecutis. Neque facilius est facta, quae observantur, notione distincta comprehendere, & verbis aptis singula in eadem contenta enunciare, ut certi quid inde concludi possit. Artis praeterea est, nec plus, nec minus inde colligere, quam certo ratiocinio inferri potest. Qui his accurate satisfacere voluerit, etsi in demonstrando nihil difficultatis deprehendat, nondum tamen ex voto omnia sibi succedere experietur. Quamobrem ad observationes, quas commemoramus, animus probe attendat; ut idea exemplaris eas rite describendi animo insinuetur; nec minorem attentionem afferat ad corollaria

laria, in quibus propositiones ex iisdem eliciuntur; ut modum stabilien-
di per observationes principia, seu ex
iis eruendi propositiones, comprehen-
dat. Utilitatem non modo in Physica,
verum etiam in ipsa Philosophia mor-
ali & civili experietur. Inprimis
etiam eandem animadvertet, qui
Medicinam ad maiorem certitudinem
perducere voluerit. Sed memini me
de hisce jam plura dixisse, in Horis
subsecivis, cum de Medico Astrono-
mum imitante verba facerem. Non
inanem operam sumet, qui ea, quæ in
Logica de experientia præcipiuntur,
cum observationibus ac inde dedu-
ctis propositionibus confert: ita enim
facilius intelliget regulas methodi,
quas proprio Marte abstrahere non
poterat. Immo praxin Logicæ, quoad
hanc partem, hoc pacto sibi comparabit.
Qui novit, quantam utilitatem
nobis afferat cognitio a posteriori ac-
quisita; cum nunquam poenitebit stu-
dii, quod in methodo hac intimius
perspicienda collocaverit.

§. 309. Theoricam tradidimus jux-
ta hypothesein COPERNICI; atque
KEPPLERI; nimirum supposito Ter-
ræ motu, & orbitis Planetarum elli-
pticis; in quibus Planetæ ea lege in-
cedunt, quemadmodum sagacitate
sua primus detexit KEPPLERUS; pro-
pterea quod sic prodit theoria cum
cælo omnium maxime consentiens.
Etsi autem methodum *Keplerianam*
exposuerimus computandi loca Pla-
netarum; non tamen negleximus,

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

quæ recentiorum industria, postquam
Geometria & Astronomia magis ex-
culta fuit, ad ejus perfectionem ulterio-
rem accefferunt. Quodsi tamen quis
tertium cognitionis gradum intendit,
ei suademus, ut, probe intellectis iis,
quæ de motu Planetarum elliptico tra-
duntur, Astronomiam quoque vete-
rem perlustret, qualem tradidit PRO-
TEMAUS, juxta Epitomen a REGIO-
MONTANO factam, & in subsidium vo-
cato RICCIOLI *Almagesto*, in quo ex-
ponuntur, quæ ad eam magis excolen-
dam post eum accefferunt. Hinc enim
omnium optime addiscet, quomodo
Philosophia naturalis per hypotheses
sit excolenda, ubi ad veritatem liqui-
dam pertingere non licet; & eundem
morem imitabitur in Medicina ad cer-
titudinem successive evehendam; im-
mo in reliqua etiam Philosophia, præ-
sertim practica, ac ipsa praxi vitæ hu-
manæ. Equidem non ignoro esse ho-
die nonnullos, qui omnem hypothe-
sum usum in Philosophia naturali &
Medicina damnant; sed hi, propter
abusum, ipsum etiam usum rejiciunt:
id quod sine scientiæ incremento haud
quaquam facere licet. Diximus non-
nulla huc spectantia in Discursu præli-
minari de Philosophia, quem Logicæ
præmisimus, methodum philosophi-
cam explicantes. Laudant quidam
NEWTONUM, quod ex Philosophia
naturali eliminaverit hypotheses; qui
tamen hypothesisibus indulget in iis
ipsis, in quibus eum ab iisdem ab-
stinuisse existimant. Quid enim at-

B b b

tra-

tractio, seu gravitas universalis quæ per modum attractionis repræsentatur, aliud est quam hypothesis, quæ ingratiam quorundam phænomenorum sumitur, & ad omnem deinde materiam extenditur? Immo nonne explicatio systematis mundani, quæ præcipua pars est Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, per motum projectionis, & gravitationem in Solem, aut centrum Planetæ primarii, hypothesis philosophica est; quam HEVELIUS in *Cometagraphia*, ad imitationem motus projectorum a GALILÆO detecti, imaginatus est, & quæ in Mathesi utiliter surrogatur in locum hypotheseos naturæ; phænomenorum autem causas physicas non attingit, quas scrutari debet Physicus? Facile quidem largior hoc non videre eum, qui soli Mathesi assiduam operam navavit, ac ideo notionibus imaginariis animum imbutum possidet: extemplo tamen videt, qui cum Matheseos studio Philosophiæ, præsertim Metaphysicæ, studium conjunxit. Sed mittamus hæc, & per nos suo quisque abundet sensu. Videamus potius, quomodo in cognoscendamethodo per hypotheses cognitionem humanam promovendi, sit progrediendum. Quemadmodum in anterioribus observavimus, omnem cognitionem humanam initium capere ab observationibus communibus; ita similiter de parte Astronomiæ theoricæ idem dicendum. Ex observationibus communibus innotuit motus proprius Solis (§. 27 *Astron.*): quo scilicet indies, ab occasu versus ortum,

certo intervallo promovetur (§. 30 *Astron.*): non tamen tanquam verus; cum applicata Mathesi ad observationem constet (§. 571 *Astron.*), motum Solis eodem modo e Tellure spectari, sive ipse circa Terram intra orbitam quiescentem revera moveatur, sive Terra circa Solem quiescentem feratur. Quando itaque Astronomus sumebat Terram quiescere, & Solem motu annuo circa eandem ab occasu in ortum moveri; quod sumebat, hypothesis erat, quæ, admissio motu vertiginis Telluris, hypothesi naturæ æquipollet; si quod autem sumitura veritate alienum, admissio motu communi tanquam vero, hypothesis non nisi imaginaria est, cui adeo in Mathesi quidem locus conceditur, minime autem in Physica. Finge jam Astronomum noluisse uti hypothesi: nemo Astronomiæ gnarus diffitebitur, eum statim in limine nobilissimam hanc scientiam deserere debuisse, nulla spe ad veritatem liquidam perveniendi relicta, absque conjecturis hypothesi innixis. Immo si quis, posito motu communi tanquam vero, hypothesin imaginariam de motu Solis communi, in Philosophiam naturalem, tanquam veritatem, inferre voluisset; ecquis sanus Philosophus hoc approbare potuisset, propterea quod ea satisfacit Astronomo ad cognitionem mathematicam motus proprii Solis acquirendam? Ex observationibus itidem communibus, sed majore attentione factis, constabat, Solem ab eodem puncto digressum ad idem redire.

Hinc

Hinc primum erat inferre, quod Sol motu proprio feratur per lineam in se redeuntem, intra cujus ambitum collocata Terra. Enimvero cum infinitæ sint lineæ in se redeunt, quemadmodum ex Geometria constat; quæstio incidebat, quænam linearum in se redeuntium sit orbita Solis. Ex Geometria elementari notum erat, in harum numero esse circulum, cujus proprietates & symptomata sunt magis obvia quam ceterarum. Sumebant igitur Astronomi, per modum hypotheseos, orbitam Solis esse circulem. Quod si hypothesei uti non luisent, non sumendum esse contententes, nisi quod sit demonstratum; impossibile fuisset, ut theoriam motus Solis cælo consentientem detegerent, & Astronomia adhuc deserta & incultajaceret. Enimvero, quemadmodum in veritate investiganda accidit, ut, si uni quæstioni satisfacias, quantum datur, nimirum vel veritatem detegendo, vel conjecturæ locum faciendo, enascantur aliæ; ita etiam in casu præsentijam quærebat, in quonam puncto, intra ambitum circuli sito, posita sit Terra. Ex Geometria elementari tyronibus notum est, circulum AHPI habere centrum C, a quo singula puncta peripheria AHPI æqualiter distant. Quæstio igitur huc redibat, num Terra sit in centro orbitæ C, an vero extra centrum veluti in T. Eam dirimere non licebat, nisi denuo interea alterutro assumto tanquam vero, consequenter confugiendo ad hypothesein. Nullum adeo est dubium, quin primus inven-

tor sumserit, veritatis investigandæ gratia, Terram esse in centro C. Inquirendum ergo erat, quomodo loca Solis definiantur ad datum tempus, in hac hypothesei, ut locus Solis computatus cum eo, qui per observationem eruitur (§. 203 *Astron.*), conferri, sicque hypotheseis ad examen referri posset. Hoc ubi investi-
Tab. IV.
Fig. 42.
 gare volebat Astronomus, cum per principia Geometriæ elementaris ipsi perspectum esset, si arcus AD & DE sint æquales, angulos ACD & DCE esse æquales (§. 141 *Geom.*); nova incidebat quæstio, utrum Sol motu æquabili incedat in orbita sua, ut arcus AD & DE æquali tempore percurrantur, an vero inæquabili, ut iidem arcus absolvantur tempore inæquali. Nemo non videt, hic denuo confugiendum fuisse ad hypothesein, alterutrum horum assumendo tanquam verum; donec examen hypotheseos, per observationes decreto-
 rias, proderet quod certum est. Cum motus æquabilis sit uniformis, & intellectu facilius inæquabili; legibus artis conjectandi, quibus in assumendis hypotheseibus locus est, conveniens erat supponere, quod sit æquabilis. Unde enascebatur hypotheseis Solis concentrica, qua Sol supponitur motu æquabili incedere in orbita sua secundum signorum successionem, Terra in centro ejus collocata. Atque hoc pacto hypotheseis sufficienter determinata erat ad calculum geometricum instituendum; ut adeo non alia re opus esset, quam
 B b b 2 ratio-

Tab. IV.
Fig. 43.

rationando hinc colligere, quæ ad eum spectant. Si Sol motu æquabili percurrit orbitam; arcus, quos percurrit AF & FG , consequenter etiam anguli ACF & FCG , sunt temporibus proportionales. Quamobrem, ut dato temporibus respondens angulus ACF , seu arcus AF , computari possit, notum esse debet, quo tempore Sol integram orbitam percurrat: quod cum sit facti, aliter innotescere non poterat, nisi per observationem. Observari nimirum debebat, tempore quodam, locus Solis in dato aliquo puncto A ; ac porro observandum, quo tempore ad idem redeat punctum. Etsi autem initio indifferens videretur, quodcumque punctum eligatur; ubi tamen ad observationem accedebat Astronomus, non commode observari posse tempus advertit, quo Sol ad idem punctum promiscue assumptum redit. Quoniam itaque planum æquatoris determinari potest independentem a theoria Solis (§. 149 *Astron.*); commodissima videbatur huic instituto observatio appulsus Solis ad æquatorem; modo constaret, æquatorem constanter secare orbitam Solis in eodem puncto, seu, astronomice loquendo, puncta æquinoctialia esse fixa. Sumebatur hoc primum denique per modum hypotheseos, & inquirebatur in modum observandi tempus, quo centrum Solis ad æquatorem appellit. Et sic incidebatur in armillas æquatorem, quibus Veteres observasse æquinoctia novimus. Quo-

niam sic, etsi adhuc ruditer constare poterat quantitas anni solaris, si momentum æquinoctii vernalis sumebatur pro epocha; per regulam trium computari poterat locus Solis ad datum quemvis diem in hypothese concentrica, quemadmodum docuimus (§. 672, 673 *Astron.*). Quodsi jam loca computata conferebantur cum observatis (§. 203 *Astron.*); illa cum his minime consentire deprehendebantur; adeoque hypothese concentricam a veritate alienam esse palam erat. Quoniam igitur Terra intra ambitum orbitæ Solis constituitur, centrum illius extra centrum huius situm esse debet in hypothese circulari. Atque adeo in locum concentrici circuli sumebatur, per modum hypotheseos, circulus eccentricus, retento motu æquabili. Ponamus jam in C esse centrum orbitæ, in T centrum Telluris, in H punctum æquinoctiale unum, in I alterum. Representabit schema hypothese Solis circulare eccentricam. Inquirendum adeo erat, quænam ex ea consequantur, ut denuo quæ inde colliguntur cum observationibus, quibus inde deducta occasionem præbent, conferri possint. Quia nos Solem ex puncto T intuemur; statim apparebat, distantiam ejus continuo variari, cum TS sit major ipsa TL , eamque in A esse maximam, in P minimam (§. 303 *Geom.*). Atque sic nascebatur notio Apogæi A (§. 636 *Astron.*) & Perigæi P (§. 635 *Astron.*), atque eccentricitatis Solis TC (§. 639 *Astron.*)

Astron.) Enimvero jam incidebat quæstio, utrum æquinoctium vernale, seu principium arietis supponendum sit in H, an vero in I; item in quo orbitæ solaris puncto, si ad eclipticam referatur, hæreat Apogæum A, in quonam Perigæum P, & quanta sit eccentricitas TC. Nemo non videt confugiendum hic esse ad observationes, quales autem eædem esse debeant, ut sint decisivæ, ex hypothesi deducendum. Quodsi Sol sit in S; patet distantiam ab Apogæo in centro orbitæ C videri sub angulo ACS; ex Tellure autem in T sub angulo ATS: quod cum ita sese habeat per integrum semicirculum HAI; distantia Solis ab Apogæo semper minor videtur, quam revera est in eo semicirculo, in quo hæret Apogæum Solis A. Ex adverso si Sol sit in L, ex centro orbitæ distantia a Perigæo PL videtur sub angulo PCL, ex Tellure in T autem sub angulo PTL, adeoque in semicirculo IPH continuo apparet major, quam revera est, (§. 239 *Geom.* & §. 209 *Optic.*). Consideremus porro Solem, in punctis æquinoctialibus H & I. Quodsi spectetur ex centro orbitæ C, distantia ab Apogæo A, nempe AI & AH, videntur sub angulis rectis ACI & ACH, ut adeo Sol videatur absolvisse semicirculum, ab uno æquinoctio usque ad alterum, dum revera semicirculum HAI percurrit, in quo Apogæum A hæret: enimvero ex Terra spectantur distantia AI & AH ab Apogæo A, sub an-

gulis ATI & ATH, qui sunt rectis minores (§. 239 *Geom.*); consequenter HAI minor semicirculo apparet (§. 209 *Optic.*), adeoque Sol minus temporis spatium consumere videtur in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A, quam in altero IPH, in quo hæret Perigæum P. Jam cum porro in semicirculo HAI distantia Solis a centro Terræ T sint majores distantias a centro orbitæ, veluti TS major CS, & in Apogæo A distantia TA sit maxima (§. 303 *Geom.*), in semicirculo autem IPH distantia Solis a Terra sint minores distantias a centro orbitæ, veluti TL minor CL, & in Perigæo P distantia TP sit omnium minima (§. cit. *Geom.*); Sol ipse major videri debet in semicirculo IPH, in quo est Perigæum, quam in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A. Quodsi jam meditationem cœptam eodem, quo hætenus, modo continuare velimus; observationes determinare licebit, quales esse debeant, quæ desiderantur. Sed ne justo prolixiores simus, filum abruptum est, contentis monstrasse viam, qua sit eundem, quantum ad præsens institutum sufficit. Annotabimus potius alia nonnulla, quæ usui esse possunt illis, qui Matheseos studio intellectum perficere gestiunt, ut eodem rite extra eandem utantur.

§. 310. Ex iis, quæ diximus, clarissime perspicitur, quomodo in investigandis veritatibus a posteriori sit procedendum, & quam indispensabilis usus sit hypothesium, ut, si iisdem

uti nolueris, nulla superfit spes veritatis unquam detegendæ. Non est quod excipias hypothefibus equidem locum esse concedendum in inveniendō, ab iis tamen esse abstinendum in libris, qui publici juris fiunt. Etenim ubi veritates ab iis, quæ nobis perspectæ sunt, principiis procul remotæ sunt, ut a priori denegatur ad eas accessus; non semper unius hominis est ea absolvere, quæ a posteriori accessibilem faciunt: quin potius haud raro sociæ requiruntur operæ, cum hic valeat illud pervulgatum, oculos plures plus videre quam oculum unum; & subinde qui accessum parare studet, laborem cœptum aliis continuandum relinquere tenetur. Qui animum ad ea attendit, quæ de theoria Solis investigata modo annotavimus, dictis facilem præbebit aurem; etsi rationes non perspiciat, quas dare poteramus, si prolixiores esse liceret. Quamvis igitur, examine instituto, hypothefes deprehendantur a veritate alienæ; non tamen ideo censendæ sunt inutiles; propterea quod aberrando a veritate deducimur ad veritatem, ubi methodo conjecturali opus est. Unde memini me sæpius auditoribus meis inculcasse, deberi etiam a veritate aberrantibus suas laudes, ubi nobis errandum fuisset, nisi ipsi priores errassent. In aliorum enim meritis censendis æqui esse debemus, ne quid admittamus, quod contra officium boni viri est. Nemo Astronomus vitio veitet ei, qui primus de

theoria Solis cogitavit, si hypothefin motus æquabilis in orbita concentrica excoluerit, utut successores eam a veritate alienam examine per observationes instituto deprehenderint. Videt enim cum fecisse, quod initio faciendum erat, & aliis perficiendum reliquisse, quod ipsi perficere vel non licebat, vel quod perficere nolebat. Quodsi Physici Astronomos imitati fuissent, ex observationibus communibus eliciendo hypothefes, & has, per observationes studio quasitas & experimenta, examinatas corrigendo ac perficiendo, nullus profecto dubito, quin Philosophia naturalis dudum magis promota fuisset. Idem dicendum de Medicina, de qua jam disertius dixi in Horis subscevis, cum Medicum Astronomos imitantem in scenam producerem.

§. 311. Discimus etiam, quales esse debeant hypothefes, quibus in Philosophia concedendus est locus; nimirum quas methodus conjecturalis suggerit, qua in veritate investiganda utendum. Sumitur nimirum in gratiam nonnullorum phænomenorum; unde ratio eorum reddi potest; ac deinde inquiritur, num ceterorum quoque per id, quod sumitur, ratio reddi possit; quatenus ea, quæ ex hypothefi a priori colliguntur, conferuntur cum iis, quæ observantur. Perinde enim est, siue antea observaris phænomena, & postea demum inquiras, num eadem a priori ex hypothefi deducantur; siue primum a priori deducas

ducas ex hypothesi, quæ inde necessario consequuntur, & postea demum observes, num eadem quoque in rerum natura ita sese habeant. Patet autem certum esse debere, quod id, quod sumitur, in se spectatum possibile sit. Ita sumebatur in Astronomia, orbitam Solis esse circulum. Certum nimirum erat, eam esse lineam in se redeuntem. Quamobrem cum circulus sit linea in se rediens, in se spectatum non impossibile est, ut orbita Solis sit circulus. Non igitur probamus commentitias hypotheser, quas hodie bene multi in Philosophiam naturalem invehunt, quidvis pro lubitu fingentes, utut demonstrare minime possint talia, quæ sibi imaginantur, in rerum natura existere posse. Immo facile largimur, istiusmodi commenta non esse qualitatibus occultis scholasticorum meliora. Quamobrem in Physica, quam patrio sermone edidimus, maluimus phænomena ex phænomenis explicare, nec in hypothesibus admittere nisi quæ ex observationibus colliguntur; ne incerta cum certis confundantur, & in inventorum numerum referantur, quæ sunt in questionum numero. Omnium minime autem probamus, si ex commentitiis hypothesibus rationes reddantur in Medicina; quippe quæ non modo usum nullum in praxi habent, verum etiam nocent, si in praxi earum rationem habere volueris. Et huc dubio procul animum adverterunt, qui Philosophiam naturalem & Medicinam

ab hypothesibus liberam esse voluerunt; atque inter theoriam physicam & medicam in arte salutari distinxerunt. Propter abusum tamen hypothesium, non tollendus erat usus; sed hypotheser ad inveniendum veritatem aptæ discernendæ a figmentis, quæ in eorum locum surrogantur.

§. 312. Liqueat porro ex iis, quæ de theoria Solis analytice peruestiganda diximus, in veritate a posteriori investiganda perpetuum esse debere experientiæ ac rationis connubium. Neque enim ex observationibus communibus, quæ primo loco assumuntur, quicquam concluditur, nisi in subsidium vocatis principiis geometricis. Immo ipsæ hypotheser inde non derivantur ratiocinando, nisi vi illorum principiorum. Et ubi ex hypothesi a priori deducenda quæ ex ea necessario consequuntur, & sine quibus eadem examini subijci nequit, principiis mathematicis denuo opus habemus, neque absque horum ope observationes in hunc usum capiendæ determinari possunt. Quamobrem si Astronomos in Philosophia naturali, & eidem agnata Medicina, imitari velimus; cogitandum erat de theoria demonstrativa. Ontologia, qualem dedimus, suppeditat notiones directrices, de quibus plura diximus in *Horis subsecivis*. Et hisce inprimis locus est, ubi analyticam viam ingressuri colligere debemus, quid sit faciendum; quamvis etiam principia ontologica conducant ad conclusiones ex observationi-

vationibus & experimentis eliciendas. Subinde etiam usui sunt principia mathematica, de quorum ad experimenta applicatione nonnulla diximus in superioribus capitibus quinto, sexto, & septimo, cum de studio Mechanicæ, Hydrostaticæ, Aërometriæ, Hydraulicæ, & Opticæ ageremus. Ex observationibus quoque atque experimentis eliciendæ sunt propositiones determinatæ, eo modo quem in Logica capite 2, sect. 2, part. 2, exposuimus, cum methodum formandi iudicia intuitiva & notiones a posteriori traderemus; atque ex hisce principiis demonstranda sunt alia, quæ a priori inde deducuntur. Hoc enim pacto condenda forent Elementa Philosophiæ naturalis, eundem usum promittentia, quem habent elementa EUCLIDIS in Mathefi. Quamdiu enim desiderantur principia certa, quibus in ratiocinando utaris, luxurianti imaginationi omnia tribuuntur, atque adeo non mirum, si abortus imaginationis pro veritate in Philosophia & theoria medica obtruduntur. Neque mirum videri debet, quod de eodem subiecto meditati incidant in cogitationes toto cœlo diversas; ita ut unus per principia chymica explicare velit, quod alter explicat per mechanica, alius per figmenta, ad imitationem causarum sibi notarum, quæ effectum ei similem producant, cujus causa vel ratio quæritur. Abstinemus ab exemplis, ne sint odiosa. Censere alios videri nolumus, dum docere nobis

propositum est. Quodsi Deus nobis vitam animi, ac corporis vires conservaverit, ut ad Physicam, Philosophia practica absoluta, progredi licuerit; operam dabimus, ut istiusmodi principia stabiliamus; ne facultatibus inferioribus tribuatur, quod ab intellectu expectandum. Eorum autem necessitatem in dubium revocare nequit, qui facultates cognoscendi earumque usum perspexit. Immo si distinctam ratiocinii notionem ex Logica hausit, eam agnoscere tenetur. Observatio enim, & experimentum, non supeditat nisi propositionem unam, quæ in syllogismo minoris vicem tuetur. Quodsi ergo hinc inferenda conclusio, principio opus est, quod majoris locum occupat. Cumque non semper unico syllogismo inferatur conclusio, pluribus quoque principiis opus. Quæ enim ratio est, cur multi multa cumlaverint experimenta, multas collegerint observationes rariores; nihil tamen inde intulerint, quod ad alia ratiocinando detegenda prodesset, ut phænomena nondum observata prævidere ac prædicere liceret? Sane non alia, quam quod deficient principia, quorum ad experimenta & observationes applicatione inferantur conclusiones. Observationes communes, quæ basis sunt omnis cognitionis astronomicæ, in vulgus notæ. Cur vero Astronomus hinc colligat, quæ alii inde colligere nequeunt, non alia ratio est, quam quod ille principia Geometriæ, quæ ipsi perspecta sunt,

ad illas applicet, his vero nulla sint principia, quæ ad eandem applicare possint. ROBERTUS BOYLE multa dedit de qualitatibus sensibilibus experimenta: quid vero hinc colligit? Nil nisi generalem hanc propositionem, quæ in Cosmologia ex principiis metaphysicis demonstratur, omnia in natura fieri mechanice. Provocare poteram ad Chymiam, cujus theoria fecunda, ad inveniendum apta, adhuc desideratur; & usus in Scientia naturali prædicatur, sed non ostenditur: sed in re per anteriora satis manifesta prolixiores esse nolumus.

§. 313. Astronomia quoque nos docet, conjunctis viribus scientiam esse excolendam, & inventa antecessorum esse emendanda, perficienda, confirmanda, prout occasio tulerit; consequenter quæ ab aliis tradita sunt ante addiscenda, quam ad scientiam amplificandam animum appellas. Quantum hic peccetur ab aliis, qui Astronomorum non sequuntur morem, in vulgus pro dolor! notum est. In inventorum numero esse volunt, qui discentium subfellia occupare debebant. Quæ ab aliis tradita sunt contemnunt, antequam ea didicerunt. Sibi soli sapere videntur, qui ex aliena doctrina sapere debebant: Sibi soli sufficere videntur, qui alieno auxilio maxime indigent. Quo quis indoctior, eo in censendis aliis audacior. Vana virium fiducia summa audent, quæ nullo negotio a se confici posse putant, cum vulgaribus capiendis eadem vix ac ne

vix quidem sufficiant. Non amore veritatis ducuntur, sed vanæ ambitioni litantes, vulgo imperito ut placeant unice student. Argumentis extrinsecis pugnant, qui rationes intrinsecas ut perspicerent, operam dare debebant. Quodsi Astronomi iisdem moribus fuissent præditi, nihil adhuc præclari de motu siderum sciretur, nec phænomena cœlestia tanta certitudine prædicere daretur, quemadmodum hodie ab Astronomis fieri solet. Quantum, quæso, promota fuit scientia astronomica altercationibus istis de motu Telluris? Quantum vero incrementi debet hypothesei Terræ motæ legitime excultæ? Utinam igitur omnes Astronomiæ operam navarent, eamque analytice expenderent, quemadmodum paulo ante inculcavimus, quotquot ad scientias excolendas animum appellere decreverunt. Ego hunc fructum longe maximum judico, qui ex studio astronomico sperari potest; nec me poeniteret temporis quod in eo consumsi, etiamsi alium nullum inde reportassem. Discant hinc, quantum sibi desint, qui studium Astronomiæ negligunt, hac sola de causa, quod nullam ejus utilitatem esse sibi persuadeant in eo vitæ genere, quod olim sequi statuerunt. Quasi vero ea mentis metamorphosis, quæ a studio astronomico expectanda, nullius momenti sit in quolibet vitæ genere, quod Eruditi sequi tenentur. Vulgo quidem ingeminatur;

Didicisse fideliter artes

Emollit mores, nec sinit esse feros:

quod etsi multo laxiore sensu verum sit, quam vulgo accipitur, in praxi tamen parum attenditur. Nemo enim quærit, quantum studium aliquod faciat ad mores emolliendos, aut, ut clarius dicam, ad omnem facultatum nostrarum promptum & genuinum usum.

§. 314. Occurrendum vero est objectioni, quam forsitan nonnulli movere poterant Astronomiæ non modo periti, verum etiam in eadem perficienda utiliter versati. Existimabunt enim, eo, quem diximus (§. 309), modo veritatem astronomicam non fuisse detectam. Incessisse inventores per multas ambages, antequam ad viam, qua sit eundum, ipsis pervenire datum fuerit, ac, multis frustra tentatis, tandem reperisse quod ad progressum ulteriorem faceret. Immo plures in deviis substituisse, antequam uni licuerit esse adeo felici, ut in viam rectam incideret. Multum haud raro temporis præterlapsum fuisse, antequam surgeret Astronomus, qui quid daret, cui in Analyfi nostra locus esse poterat. Non igitur tam ardua, qualia sunt Astronomorum inventa, tanta facilitate inveniri potuisse, quantam præ se fert analysi nostra. Ubi veritates detectæ sint, earum investigationem videri obviam, quæ prorsus inaccessible videntur, ubi adhuc ignorantur. Non nego, si facta sola respicias, vera omnino esse, quæ dicuntur:

neque enim nobis difficile foret exemplis ea confirmare. Verum enimvero nobis non jam quæstio est de eo, quod factum est; sed de methodo, qua veritas latens tandem in apricum producta. Quodsi regulæ methodi, quibus legitimus facultatum nostrarum usus præcipitur, primis invento-ribus distincte fuissent perspectæ, nec defecisset theoria, principia ad rationandum necessaria suppeditans, aut hæc satis familiaria illis fuissent; in ambages inutiles non incidissent, sed rectam, qua eundum est, viam statim animadvertissent, nec in devia delapsi fuissent, multo minus in iisdem diu substitissent. Breviori adeo tempore ea dedissent, quæ in analysi nostra locum merentur, nisi quantum observandi opportunitas moram inieci-set. Quando in apricum productum, quod quærebatur; quonam usu facultatum nostrarum id fuerit factum, reperire licet; ac tanto quidem evidentius id patet, si quis in principiis psychologicis fuerit versatus. Non igitur inutile, immo potius necessarium est, nisi incrementum Artis inveniendi negligere voluerimus, ut in eundem omni animi contentione inquiramus, atque eum ad distinctas notiones revocemus, ut constet, quomodo certa methodo reperiri potuisset ab uno, quod nonnisi post multa tentamina, in quibus casui multum tribuitur, detectum. Qui ea perpendit, quæ de Logica artificiali in Prolegomenis Logicæ inculcavimus, dictis facile

facile affertietur. Homines multi considerantur instar unius, in quo nonnisi locum habet rectus facultatum, quem fecerunt, usus; rejectis aberrationibus, quæ vel usus hujus defecui, vel abusui tribuendæ. Quodsi enim extitisset homo, qui rectum facultatum suarum usum, absque ulla aberratione, facere potuisset; is nonnisi ea fecisset, quæ ad detegendam veritatem latentem spectassent. Quemadmodum in moralibus observandum illud CATONIS, ut ex alieno casu discas quæ vites, & nonnisi ea imiteris quæ ad rectum facultatum usum faciunt; ita similiter hoc tenendum in Arte inveniendi, & omni veritatis cognitione. Fictio illa, quæ hic admittitur, nihil absurdi habet, atque longe utilissima est. Meretur itaque attentionem, quoad omnia, quæ a facultatum humanarum usu proficisci possunt. Qui studio Matheſeos intellectum perficere vult, non aliud intendit, quam ut rectum consequatur facultatum usum, aberrationes omnes, quantum datur, posthac evitaturus. Animum igitur attendere debet ad ea, quæ usum istum loquuntur; parum sollicitus, utrum in eodem, an in diversis subjectis ea sint observanda; modo constet, nonnisi his factis ad scopum contendisse inventores, cetera vero ipsis nihil profuisse, sed inutiles tantummodo moras peperisse, ab illis minime intentas, sed moleste latas. Nisi hoc observaveris, aliorum exempla & casus tibi parum prode-

runt ad perfectionem propriam promovendam; quam tamen metam esse in Philosophia practica universali demonstravimus, ad quam continuo contendere tenemur, nisi obligationi nostræ naturali deesse, ac felicitati propriæ obicem ponere velimus.

§. 315. Nemo non videt amplissimum hic esse dicendorum campum, siquidem omnia, quæ ad præsentem scopum spectant, minutissime persequi velimus: sed tantæ prolixitati sese immergere non patitur præsens institutum. Neque etiam diffitemur, quod, si quis ulterius progredi voluerit, ei alios quoque autores consulendos esse, tum Veteres, quorum placita collegit RICCIOLUS in Almageſto, tum Recentiores, quos superius laudavimus, cum scriptores rerum astronomicarum recenseremus. Quodsi enim ante sibi cognita atque perspecta reddiderit, quæ nos nostro more explicavimus, ut sine hæſitatione in legendis aliorum scriptis progredi possit, quam ad hæc legenda accedat; & ordinem temporis observet, quo prodita fuerunt, ut pateat, quodnam cogitata anteriora adjumentum attulerint ad posteriora: quæ exempli loco modo in medium protulimus haud difficulter imitabitur; præsertim si in disciplinis anterioribus, more nostro, fuerit versatus, nec ullibi suam passus desiderari operam. Hoc consilium qui sequi voluerit, sua sponte animadvertet, quomodo cum Geometria creverit quoque Astronomia. Sane quæ KEPPLE-

RUS dare non poterat, utut sagacissimi ingenii vir, non invita Minerva tentarunt alii; postquam nostro ævo Geometria magis exulta, & ad multo majus fastigium erecta, quam KEPLERI tempore attigerat. Est etiam Algebræ suus usus in parte Astronomiæ theoricæ, cujus latissimus usus per universam Mathesin. KEPLERI ævo adeo ignorabatur, ut ne somnians quidem eum prævidere daretur; nec mirari debeamus, quod abjecta subinde vir summus de Algebra senserit. In gratiam igitur eorum, qui Algebræ studio delectantur, unum alterumque specimen dedimus, quo præclarum ejus in Astronomia usum insinuaremus. Plura suppeditat GREGORIUS in *Elementis Astronomia*, & illustria admodum exempla petere licet ex *Commentariis Petropolitanis*.

§. 316. Erunt forsitan nonnulli, qui sibi persuadebunt, inanem operam sumi in tractatione analytica studii astronomici, propterea quod absque ea Astronomi sua invenerint, ac hodiernum inventa antecessorum perficiant, novisque accessionibus nobilissimam scientiam locupletent. Enimvero facilis est responsio. Qui quæ ab aliis inventa sunt attenta mente considerant, eorum animis idea quadam exemplaris usus facultatum sese insinuat ad particulare hoc objectum restricta, quam, etsi confusam, imitantur quoad idem objectum, nescii

omnino quemnam facultatum usum faciant; quemadmodum accedit iis qui in tractandis negotiis imitantur alios in casu simili, theoria omni destituti. Neque diffitendum, hac imitatione niti omnem praxin Artis inveniendi in Astronomia; quidni etiam in Mathesi reliqua, si a regulis Algebræ, seu Analyseos Mathematicæ recesseris; quamvis etiam in Algebræ praxi huic imitationi multus sit locus. Quam multum vero in hac imitatione tribuatur casui, & quam multis ideo tentaminibus locus sit, meum non est in præsentī exponere. Enimvero tota nostra tractatio analytica non alio tendit, quam ut idea ista confusa reveocetur ad distinctam; quo facto, imitatio, quæ fuerat empirica, rationalis evadit, & multo latius extenditur, immo etiam casui subducitur. Nos jam potissimum intendimus, ut Philosophus imitetur Astronomum in qualibet Philosophiæ parte; immo Eruditus quicumque in suo scibili; cum de intellectu studio Matheoseos perficiendo agamus, ut eodem extra Mathesin rite utamur. Hæc vero imitatio expectari nequit ab idea confusa, quæ Astronomo prædest in Astronomia excolenda. Immo si qui eam audent, quam sint infelices satis patet. Non decissent exempla illustria, quibus hoc doceri poterat; nisi consultius existimarem ab iis producendis abstinere.

CAPUT X.

De Studio Geographiæ, Gnomonica, & Chronologia.

§. 317. **G**eographia mathematica, cum qua hic nobis negotium est, multum affinitatis habet cum Astronomia, præsertim sphaerica, a cujus principiis tota pendet. Unde etiam Veteres eandem ab Astronomia non separarunt, sed quæ in eadem traduntur, ad Astronomiam retulerunt. Quamobrem quæ de studio Astronomiæ sphaericæ dicta sunt, de Geographiæ quoque studio tenenda sunt. Et quoniam Geographia, quemadmodum modo diximus, principiis Astronomiæ sphaericæ præsertim nititur; ad eam accedere minime debet nisi eorundem gnarus. Quemadmodum itaque, in Elementis nostris, Astronomiam Geographiæ præmissimus; ita etiam in Astronomia ante versari debet, quam ad Geographiam pedem promoveat, qu' inoffenso pede in hac progredi voluerit. Quod si quis, extra systema, Geographiam mathematicam tradere voluerit, ei multa explicanda sunt, quæ in Astronomia docentur; quemadmodum etiam a nonnullis factum vidimus.

§. 318. Qui nonnisi historicam Geographiæ cognitionem sibi acquirere student, iis sufficiunt, quæ ad Globum terrestrem, atque inappas geographicas, & tam illius, quam ha-

rum, usum cognoscendum faciunt. Ex capite itaque primo ea addiscere tenentur, quæ de figura Telluris, & circulis in ejus superficie concipiendis, habentur; prætermisiss problematis ad investigandam semidiametrum Telluris spectantibus. Sufficit iisdem notasse, quæ de quantitate semidiametri Telluris, & unius milliaris Germanici, in pedibus Parisinis leguntur (§. 43 *Geogr.*). Curiosior si quis fuerit, addere potest magnitudinem superficiei, ac soliditatis Terræ (§. 44 *Geogr.*). Nec usu caret, si Tabulam, quæ in scholio problematis 7 (§. 46 *Geogr.*) exhibetur, de convertendis gradibus singulorum parallelorum in milliaria Germanica inspiciat. Ex capite secundo; definitiones distantiae locorum, longitudinis item, ac latitudinis sibi perspectas reddere tenentur, & quod latitudo loci æqualis sit elevationi poli notent, ut intelligant, quid sibi velit Tabula Latitudinis & Longitudinis locorum (§. 60 *Geogr.*); prætermisiss problematis de distantia locorum per Trigonometriam sphaericam solvendis. In capite tertio, ultra definitiones zonarum, & tempestatum statarum, non progrediendum, additis theorematibus 8 & sequentibus, sed absque demonstrationibus. Eadem

fere tenenda sunt, in perlustrando capite quarto, nimirum ut, præter definitiones, nonnisi theoremata pleraque absque demonstratione notentur, & usus Tabulæ climatum (§. 138 *Geogr.*) inspiciatur. Nisi quis curiosior fuerit, caput quintum sicco pede transire potest; ex sexto autem, sufficient definitiones. Ex septimo, divisionem plagarum ad dignoscendos ventos cognosciperutile est, una cum theorematibus de ventorum proprietatibus, quorum usus est in dijudicandis tempestatibus vagis. Inprimis autem horum studio inservit caput 8, de Globi terrestris constructione & usu. Immo suademus ut Globus semper ad manus sit; in prima statim tractatione Geographiæ; quo facilius intelligantur, quæ in anterioribus docentur. Tandem ex capite nono, quod de mappis geographicis agit, nonnisi ea haurienda sunt, quæ rudem quandam earundem ideam animo ingenerant, & usum ipsarum explicant. Nimirum ad manus esse debent mappæ, tum universales, tum particulares, & addiscendum, quid denotent lineæ in iisdem descriptæ, quidque indigent numeri in margine adscripti. Ita enim constructio intelligitur, quantum sufficit ad earum usum: neque eo fine requiritur, ut quis modum construendi mappas geographicas capiat. Paucis adeo horis, studium Geographiæ absolvere potest, qui in historica ejus cognitione acquiescit; ultra quam nemini progrediendum, qui aliud non

intendit, quam ut mapparum geographicarum ideam quandam distinctam animo concipiat, quarum hodie promiscuus omnium usus est.

§. 319. Qui ad secundum cognitionis gradum aspirant, Elementa Geographiæ integra, eo quo a nobis conscripta sunt ordine, perlustrare debent; observatis iis, quæ ad nauseam usque inculcavimus, cum de studio Astronomiæ sphericæ ageremus: neque enim inter theoremata ac problemata Astronomiæ sphericæ & Geographiæ ulla differentia est, cum utrobique ad primum mobile referantur, seu a motu communi Solis & stellarum pendeant; ut adeo etiam, olim præsertim, problemata geographica ad problemata primi mobilis fuerint relata. Loquuntur demonstrationes, principia ubivis peti ex Astronomia. Unde, me tacente, intelligitur scientificam Geographiæ mathematicæ cognitionem acquiri minime posse, nisi ab eo qui in Astronomia fuerit versatus. Equidem non desunt, qui, quæ de ascisiis, amphiscisiis, heteroscisiis & periscisiis, nec non de antæcis, peræcis & antipodibus docentur, pro futilibus habent, quæ utiliter ignorentur; judicium tamen præcipitant, vel terminorum insuetorum sono delusi, vel ex eorum definitionibus non prospicientes doctrinæ usum. Quibus terminorum insuetorum sonus imponit, illi cum Scholasticorum terminis metaphysicis nondum intellectos comparant, & quod de his inculcari audiverunt

runt iudicium, ad hos applicant, cœca imitatione, iis solenni qui de rerum valore ex ipsarum notionibus per se statuere nesciunt. Oppido autem falluntur: termini enim geographici accuratis definitionibus explicantur, quæ optime intelliguntur, modo terminos eas ingredientes ex anterioribus habueris perspectos; non vero definitionibus magis obscurantur, quemadmodum a Scholasticis fieri suevit. Præterea ex his ipsis definitionibus demonstrantur accurata methodo, quemadmodum in ceteris Matheos partibus, quæ ad cognitionem Telluris mathematicam spectant, adeoque in Geographia prætermittenda non sunt (§. 1 *Geogr.*). Non minor est præcipitania eorum, qui negant, quæ prospicere nequeunt. In Geographia mathematica doceri debet omnis differentia phaenomenorum, quæ per universam Terræ superficiem a primo mobili pendent. Inter hæc vero etiam sunt umbrarum differentia, quæ corpora a Sole illuminata projiciunt, & differentia longitudinum dierum atque noctium, atque tempestatum statarum, nec non ortus & occasus stellarum. Has itaque cognoscere tenetur, qui omnem in diversis Telluris locis differentiam perspicere voluerit, etiam si locum, quo ipse commoratur, nunquam fuerit egressus. Quæ ad umbras spectant, in doctrina de ascis, amphiscis, heteroscis & periscis explicantur; quæ vero ad dierum, & tempestatum statarum, aliorumque

phaenomenorum agnatorum, differentias pertinent, doctrina de antœcis, periœcis, & antipodibus continet. Non igitur nugæ inanes sunt, quæ hic demonstrantur, sed veritates necessariæ, non modo animum sciendi cupidum oblectantes, verum etiam aliis in posterum inveniendis infervientes. Non jam inquirimus in casus, quibus interest cognosci statum Telluris in dato loco, quoad hæc phaenomena. Qui enim nulla sciendi cupiditate flagrat, eum quoque parum movebit utilitas, quam nondum existimat suam, sed alienam judicat. Unicum moneri consultum duco, de constructione mapparum geographicarum, præsertim universalium. Mappæ universales non sunt nisi projectiones sphaeræ in plano: unde sub hoc etiam nomine earum constructionem docuimus (§. 272 & seq. *Geogr.*). Non igitur diffitemur, si doctrinam de projectione sphaeræ præmittere libuisset, quemadmodum Sphaericorum Elementa præmissimus Astronomiæ, multo concinnius constructionem istam demonstrari potuisset. Quoniam tamen brevitati consulere decrevimus, quæ de projectione sphaeræ præsupponi debebant, ipsis demonstrationibus geographicis inseruimus. Non tamen ideo Elementa projectionis sphaeræ tanquam inutilia rejicimus: probe enim novimus, quantus eorum sit usus, tum in constructione Astrolabiorum demonstranda, tum etiam in projiciendis eclipsibus solaribus; quas projectiones

jectiones hodie non inutiliter adhibent Astronomi. Quoniam vero nos ea non attingimus, in quibus potissimum usus illorum sese exerit; nec præter necessitatem theoriam nostrorum Elementorum multiplicare volumus, abunde persuasi, quod nostrorum gnarus, absque ulla difficultate, ea aliunde haurire possit, siquidem iisdem habuerit opus.

§. 310. Abunde constat ex antecedentibus, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos via analytica progredi debere, ut inquirent in artificia, quibus veritas, quæ demonstratur, in apicem fuerit perducta. Urimur, in eruendis plerisque quæ traduntur, Trigonometria, tam plana, quam potissimum spherica. Quamobrem quæ in Astronomia eo fine dicta sunt, hic repetenda veniunt. Cetera ex principiis astronomicis, & geometricis, pauca quædam de umbris ex Opticis, communi methodo Logica deducuntur; adeoque patent per ea, quæ de usu Logicæ in veritate a priori investiganda docuimus in Opere logico, & uberius explicata fuerunt in superioribus, cum de studio Arithmeticæ & Geometriæ elementaris ageremus. Non itaque opus est, ut diutius hisce immoremur, cum ad Geographiam accedere minime debeat, nisi Arithmeticæ, Geometriæ & Astronomiæ, immo etiam Opticæ gnarus. Equidem dubitandum non est, esse etiam Algebræ in solvendis problematis geographicis usum, etsi

hactenus ad Geographiam parum applicata fuerit. Neque etiam dubitamus fore ut, quemadmodum Algebra applicari cœpit ad partem Astronomiæ sphericam, seu problemata primi mobilis, in posterum non defuturi sint, qui solutiones problematum in Geographia adhuc desideratorum dabunt. Sed cum ea, quæ nostro scopo sufficere visa sunt, absque Algebræ auxilio tradi possint; hac vice consultius visum fuit a calculis algebraicis abstinere. Neque enim Elementis Matheseos omnia inferenda sunt, quæ hactenus fuerunt detecta, aut per ea ulterius detegi poterant; ne studium Matheseos, per se satis amplum, reddatur nimis diffusum, & ejus faciamus desertores, quos ad idem allicere & ad ulteriora præparare intendimus. Quid quod nec nobis conveniat tempus in Mathesi consumere, quod Philosophiæ reformandæ impendere debemus; cum hodie non desint multi, qui Mathesi excolendæ utilem operam navant; nemo autem propemodum sit, qui similem Philosophiæ præstare velit. Unum tamen adhuc restat, quod silentio prætereundum non est. Constat hodie figuram Telluris non esse sphericam, quemadmodum credidere Veteres, sed potius sphaeroidicam, prouti annotavimus (§. 4 Geogr.). Neque ignotum est, ope Algebræ, in figuram Telluris inquisivisse, non infelici successu, Geometras præclaros. Problema adeo tam illustre non videbatur omittendum; quod præsertim præ-

præstantiam Analyticos recentioris tam aperte loquitur. Enimvero monuimus, jam loco citato, sub iudice adhuc esse litem de vera Telluris figura. Quamobrem cum controversia rationis solis definiri minime possit; & figura sphaerica satisfaciatur in Geographia, qualem tradere debuimus; a figura vera ejusdem determinanda abstinendum erat; præsertim quod ea, quæ a nobis tradita sunt de Analyfi moderna, & ejus ad problemata physico-mechanica applicatione in Mechanica, abunde sufficiant ad intelligendas analyticas solutiones problematis de figura Telluris, quas dederunt Geometræ recentiores. Elementa nostra Matheseos non eo fine conscripsimus, ut Matheseos cultores a lectione aliorum librorum avocemus; sed ut eos ad eandem præparemus, & aptos efficiamus, non sine multo temporis ac laboris compendio, & ut iis pervia sit Mathesis, qui intellectus perficiendi gratia in eadem versari debent, quo eodem felicius extra eandem utantur: id quod ex tota hac tractatione de studio Matheseos recte instituendo abunde elucescit.

§. 321. In gratiam eorum, qui intellectus perficiendi gratia in Geographia versantur, ut eodem prompte extra eandem utantur, non est quod addam. Geographiam omnem methodo synthetica concinnavimus, qua usi sumus in Geometria elementari & aliis Matheseos partibus, in primis etiam in parte Astronomiæ sphaerica, ad quam

proxime accedit. Quamobrem quæ eo sine ibidem inculcavimus, ea hic quoque observanda sunt. Neque vero existimandum est, propterea studium geographicum tanto negligi posse; cum ab eo sperandum non sit, quod non jam dederint disciplinæ aliæ, quibus ante operam navare tenemur, quam ad Geographiam pedem promoveamus. Etenim cum habitus omnis crebro exercitio acquiratur, & continuo exercitio conservetur ac perficiatur; non superflua videri debet opera, quæ Geographiæ analytice expendendæ impenditur. Neque est quod dicas, idem obtineri posse sola repetitione disciplinarum ceterarum. Præstat enim varietate obtinere, quod eorundem repetitio promittere videbatur. Quemadmodum nimirum varietas delectat, eorundem vero repetitio molesta accedit; ita quoque illa attentionem apprime hic necessariam excitat & conservat, quam hæc labefactat, ut difficilius conservetur. Exercitia itaque ad eundem habitum tendentia, quæ quoad hunc scopum eadem sunt, diversa tamen apparere debent; ita ut quasi continuo aliud agendo in eundem scopum collinees, & per diversa media finem tibi consequi videaris. Neque hoc singulare quidpiam ac insolitum existimandum. Sane in ipsa Arithmetica practica varietate exemplorum consequi studemus, quod repetitione ejusdem exempli obtineri poterat, si habitum acquirendum in se spectes.

§. 322. Hydrographia, quæ de navigatione per mare agit, apud nos nonnisi curiositatis gratia addiscitur. Quamobrem qui eam negligere voluerit, per nos negligat. Mathematicum tamen decet, ne candem ignoret. Quodsi vero eandem perlustrare volueris, eodem prorsus modo in eo versaberis, quemadmodum in Geographia. Eadem enim methodo conscripta est, qua Geographiam tradidimus, & perinde ac hæc, principiis astronomicis tota nititur; ut adeo hæc Matheseos pars longe utilissima fructus Astronomiæ sit &, si Astronomia non alium usum haberet, propter hunc solum, summo cum studio excoli mereretur. Qui animum sciendi cupidum possident, eos studium Hydrographiæ mirifice delectat; quatenus vident, quomodo ex principiis mathematicis, præsertim astronomicis, deducta fuerint quæ intellectui humano prorsus inaccessa videri poterant, & fecunditatem principiorum mathematicorum, quæ in se sterilia apparebant, ipso facto experiuntur. Plura non addimus: quæ enim dici poterant, ex anterioribus abunde intelliguntur.

§. 323. Quod studium Chronologiæ attinet, de eo non multa nobis dicenda sunt. Pleraque enim, quæ in Chronologia traduntur, non majorem requirunt attentionem, quam quæ acquirendæ cognitioni historiciæ sufficit. Qui nonnisi vulgarem Chronologiæ notitiam sibi comparare student, iis satisfaciunt definitiones diei,

& noctis, epochæ dici civilis, horæ, horæ astronomicæ, Europææ, & Judaicæ, minuti primi denique, atque secundi, ex capite primo. Ex secundo, perspectas sibi reddere debent definitiones omnes, una cum quantitate mensis lunaris communis, & embolismi, seu corollario primo definitionis 28. Ex capite tertio, sufficit annotasse, quæ de anno Juliano, & Gregoriano dicuntur. Si paulo curiosior fuerit, addet ea, quæ dicuntur de recente Sudaorum & Turcarum anno. Ex capite quarto, ad intelligendum calendarium addiscant, quid sit cyclus Solis, cyclus Lunæ, & cyclus Indictionum; atque periodus Juliana; & ex capite quinto, petant, quid sit epocha Rufforum, epocha mundi conditi Judaica, & epocha Muhamedica: qui vero in legendis Autoribus classicis versatur, addat definitiones epochæ Olympiadum, & epochæ Urbis conditæ. Denique, ad vulgarem Chronologiæ notitiam, sufficit aliqua Calendarii Juliani & Gregoriani cognitio, ex capite sexto haurienda, &, ubi quis curiosior fuerit, similem Calendarii Judaici, & Muhamedani, ex definitionibus potissimum capitis ultimi sibi comparat. Calculos enim, qui in problematis docentur, una cum corollariis, quibus eorum rationes continentur, tuto negligere poterit. Brevi adeo labore totum studium chronologicum absolvi poterit, in quo memoriæ omnes fere sunt partes. Me autem tacente, patet terminos nonnullos ex Astronomia per-

perspecto esse debere, ut definitiones chronologicae intelligantur.

§. 324. Qui accuratorem Chronologiae cognitionem appetunt, eam totam perlustrare tenentur: id quod nullo fere negotio fiet, ubi in Astronomia fuerint versati; cum eorum, quae in Chronologia intricata sunt, & hoc studium perplexum atque molestum reddunt, nonnisi cognitionem historicam suggeramus. Hisce principiis imbutus, & in Astronomia cum laude versatus, adeat Autores, quos supra suo loco commendavimus, ubi spinosis difficultatibus sese immergere voluerit, ut iudicium ferre queat, quid veri subsit iis, quae aliorum fide assumuntur. Neque enim existimandum est singula quae dicuntur, ad chronologiam historicam spectantia, ex monumentis Veterum, quae nobis supersunt, esse adeo aperta & explorata, ut de eorum veritate ambigi minime possit. Hoc omnino monendum esse duximus; ne, qui Elementa nostra Chronologiae perlegit, miretur, cur vulgo conquerratur studium Chronologiae esse abstrusum, perplexum, atque difficile; cum tamen nullum videatur, quod in eo collocandum, si comparetur cum eo, quod in tractandis ceteris Matheos partibus hactenus praecipimus.

§. 325. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, in Chronologia quoque quaedam invenient, quae ad ipsorum sunt palatum. Juvabit perpendere, quomodo mensurae tempo-

ris, ex motu siderum fuerint deductae & ad usum civilem aptatae, ut tempus civile cum astronomico in concordiam reducatur: quod posterius cum non uno modo factum sit, quatenus arbitrium humanum in determinationem insluit; observare hic licet, quae in veritatibus necessariis locum minime habent. Singularem quoque hic attentionem merentur, quae de characteribus temporis, praesertim artificialibus, & variis cyclis, atque periodo Juliana docentur. Denique probe perpendenda sunt, quae de Calendario Christiano, & Judaico traduntur. Etsi enim calendarium Judaicum principiis nonnullis nitatur superstitionis; calculus tamen, quo in computatione utendum, admodum ingeniosus est; ut ab Artis inveniendi cupido probe perpendi mereatur. Praebet Chronologia exemplum, quomodo veritates, quas cognovimus, ad usum vitae civilis aptentur; ubi summus rigor attendi nequit, id tamen agendum, ne ab eo longius recedas in praedictum finis intenti. Simile quid occurrit, ubi Jus naturae ad definienda negotia humana, tam privata, quam publica, adhibetur, cujus rigor summus observari nequit; ut adeo ex eodem condendum sit Jus civile, ac Jus gentium arbitrarium, quod ab eo quam minimum recedat, & quo cavetur, ne sine civitatum particularium & civitatis maximae, quam Gentes constituunt, excidamus. Suppeditat itaque Chronologia, modo in abstrahendo

fatis fueris acutus, nec destituaris illo acumine, quo abstracta in concretis pervidemus, principia generalia, quæ notionum directricium loco esse possunt in istiusmodi casibus. Qui in Philosophia nostra fuerint versati, iis fatis clara & perspicua erunt, quæ dicuntur. Nimis autem prolixi esse deberemus, si uberius explicanda essent, ne ceteris quoque obscura viderentur. Videmus adeo (id quod etiam haud pauca ante dicta ulterius confirmant), quam utile sit studium Philosophiæ verioris, qualem nos profitemur, cum studio mathematico conjungi; siquidem usus omnis, quem hoc præstat in intellectu perficiendo, compos fieri volueris. Ita demum obtinebitur, ut Mathesis prosit ad recte philosophandum: id quod sola applicatione, ad cognitionem Naturæ mathematicam promovendam, obtineri nequit; ut ut ea præclara sit, & maxime commendandum ingeniis excelsis, ut hoc cognitionis genus excolatur.

§. 326. Gnomonica disciplina tota practica est, in qua sola praxis intenditur. Quamobrem a perplexis quoque demonstrationibus abstinuimus, quas legere nolunt, qui intelligere poterant; ceteri autem non capiunt. Quod si quis theoriam omnem aspernatur, nec nisi constructionem horologiorum solarium curæ cordique habet; ei satisfaciunt definitiones, & problematum resolutiones. Si quæ problemata ipsi magis curiosa, quam utilia videntur; suo stabit judi-

cio in omittendis iis, quorum notitia se carere posse existimat. Descriptionem horologiorum solarium adeo perspicue exposuimus, ut eadem facilitate absolvi possit, qua figuræ in Geometria elementari delineantur, & alia ejus problemata construuntur. Ne tamen hæreat circa terminos, nec fatis intelligat quid fieri debeat; omnino consultum est, ut levem quandam Astronomiæ sphericæ, Geographiæ, & Chronologiæ notitiam sibi comparet; qualem commendavimus iis, qui non nisi historicam cognitionem sibi comparare student. Inprimis autem hic usui est, si ideas, quæ lumen praxi Gnomoniæ affundere debent, ne in ea prorsus cœcutias, imaginationi insinuari cures. Exempli loco esse potest, si ipsam descriptionem horologiorum solarium, applicatione actuali horologii æquinoctialis ad planum in quo describendum, ostendas. Usus hic habent machinæ gnomoniæ, quas in usum descriptionis horologiorum solarium commendat, & brevi quodam Tractatu descripsit PARDIES; quamvis instituto præsentī sufficiat horologium æquinoctiale simpliciter tantummodo modo descriptum, quemadmodum ex problemate quarto (§. 36 *Gnom.*) facile intelligitur.

§. 327. Etsi autem a perplexis & intricatis demonstrationibus, quales dedit CLAVIUS, & quas parum amant studio gnomonico sese mancipientes, consulto abstinuerimus, ne nobis scriberemus, dum alios erudire volumus;

id tamen agimus, ut, quanta fieri potuit brevitate ac facilitate, satisfacere-
mus iis, qui scientificam horologio-
rum solarium cognitionem appetunt,
ne ignorent genuinas constructionum
rationes. Ad hanc igitur qui adspi-
rant, eo modo in Gnomica versen-
tur, quo in Geometria elementari ver-
sandum esse docuimus, ubi secundus
cognitionis gradus intenditur. Haurit
Gnomonica principia sua ex Arithme-
tica, Geometria elementari, Trigonometria
utraque, Astronomiæ spherica
praesertim parte, Geographia, & Chronologia.
Antequam igitur ad illam
tractandam accedat scientificæ cogni-
tionis cupidus, harum tractationem
praemittere debet. Hoc pacto, in omni
Gnomonica nihil deprehendet, quod
non satis intelligat, & de cuius verita-
te dubium quoddam superfit. Quo-
niam vero, quemadmodum modo di-
ximus (§. 326), Gnomonica tota pra-
ctica est; qui eidem operam navat,
singula quoque horologia in charta
delineare tenetur. Quod si dicas, tibi
nunquam propositum esse, ut aliquan-
do horologium quoddam solare actu
construas; sed sufficere, ut intelligas,
quomodo construantur, & cur hoc
pacto construi possint; consequenter
te scopo tuo potiri posse, si tantum-
modo resolutiones problematum cum
schemate conferas; me per omnia
consentientem minime habes. Etenim
si horologia in charta ipsemet de-
lineas, non modo facilius & clarius eo-
rum constructionem intelligis, verum

etiam ipsorum ideam memoriæ firmius
imprimis. Quotiescunque veritates
practicæ cognoscere studemus; sua-
dendum omnino est, ut eas in nobis-
metipsis experiamur. Hinc etiam, non
dissentiente CONFUCIO, summo Sina-
rum Philosopho, in Moralibus incul-
care soleo, ut eorum, quæ docentur,
veritatem in nobismetipsis experiri stu-
deamus: quod quantam afferat utili-
tatem, in parte altera Philosophiæ pra-
cticæ universalis, a priori abunde de-
monstravimus. Qui adeo cognitio-
ni scientificæ operam navat, in omni
Mathesi solutiones problematum ipse-
met tentare tenetur, siue constructio-
nes geometricas, siue calculos arith-
meticos præcipiant.

§. 328. Qui ad tertium cognitio-
nis gradum adspirant, resolutionem
problematis tanquam incognitam sup-
ponere debent, & vi definitionis ho-
rologii, quod describi jubetur, inquir-
endum, quomodo describi debeat.
Etenim, ex datis ratiocinando, colli-
gendum quod quaeritur. Non datur
nisi definitio horologii describendi,
quippe quæ ex anterioribus tanquam
data supponi potest ac debet: quaeri-
tur modus idem describendi, quem
resolutio explicat. Modus adeo de-
scribendi horologium, ratiocinando
eruendus ex ejus definitione. Defini-
tio horologii specialis supponit defini-
tionem horologii solaris generalem.
Quamobrem facile patet, eam quoque
tanquam datam supponi debere; nisi
eam inter principia referre velis, quæ

vi eorum, quæ definitioni speciali insunt, in memoriam revocantur. Ex definitione adeo petendæ sunt primæ propositiones, quarum ope in memoriam revocantur principia, ex Astronomia vel aliunde cognita, ut ex illa ratiocinando colligi queat conclusio. Satis hæc intelliguntur ex superioribus, quæ de tertio cognitionis gradu acquitendo inculcavimus (§. 66 & seqq.). Non diffiteor, faciliorem fore operam, si demonstrationes problematum eo ordine concinnatæ essent, qui in methodo analytica observandus; non sumendo resolutionem tanquam hypothesin theorematism, quemadmodum in demonstrationibus syntheticis fieri solet (§. 51 & seqq.). Enimvero, si quis in Geometria elementari problemata analytice tractaverit, & methodum, qua ibidem usus, in aliis imitatus fuerit; ejus vires nec superabit analytica problematum gnomonicorum tractatio. Et quamvis tyronibus hoc difficile videatur, non tamen difficile erit eorum magistris, nisi quis intempestive docentium numero sese ingerat, qui discipulorum subsellia potiore jure occupare debebat. Elementa Arithmetica Germanica, methodo analytica, conscripsimus, eandemque in iis explicandis magis adhuc illustramus. Quodsi ergo quis ideam quandam exemplarem inde hauserit; ea ipsi facem præferet, non modo in Gnomonica, sed & in aliis Matheseos partibus; immo extra eandem in disciplinis aliis. Et si quis Elementa ista vel

non legit, vel legere nequit linguæ Germanicæ ignarus, aut etiam Batavæ, in quam conversa sunt; ideam tamen quandam animo concipiet vi analyticos demonstrationum, quam supra (§. 38 & seqq.) amplissime exposuimus. Non igitur opus esse judicamus, ut ad particularia descendamus.

§. 329. Ceterum Gnomonica in numero artium est, quemadmodum Mechanica practica, quæ machinarum compositarum structuram explicat. Quoniam in Gnomonica constructiones horologiorum solarium demonstrantur; ex ea discimus, quomodo Artes scientifica methodo tractandæ sint. Deducitur ea prorsus a priori, atque adeo methodi artes scientificæ tractandi ideam omnium optime exhibet. Artes ceteræ, si non omnes, saltem plurimæ, inventæ sunt a posteriori, etsi subinde in nonnullis a priori perfectæ. Ars poliendi vitra omnino a posteriori detecta, perinde ac constructio telescopii; etsi hæc deinde a priori, per principia dioptrica, magis fuerit perfectæ. Phænomena telescopiorum dudum ante a posteriori innotuerunt, quam earum accuratas & rigorosas demonstrationes dederint Mathematici. Idem dicendum est de speculis, quorum phænomena in Catoptrica demonstrantur. Ad Gnomonicam tamen quam proxime accedit Ars navigandi, & construendi globos artificiales, atque mappas geographicas, & hydrographicas. Quibus adeo animus fuerit scientiam artium excolendi,

di, illi hanc differentiam probe perpendere debent. Ex-Gnomonica imprimis videre licet progressum artis a priori continuandum; quomodo scilicet inventa anteriora non modo ansum suppeditent de aliis cogitandi, quorum cogitatio alias animum minime subiisset; verum etiam ad ulteriora inveniendae adiumento sint; ut adeo idem sit in arte, qui in scientia progressus, cum utrobique eadem deprehendantur rationes. Huc imprimis animum advertere debent, qui Artem inveniendi ad formam Artis reducere gestiunt, quemadmodum Logicam ad eandem redactam videmus. Nos, qui nullum Matheseos usum aspernamur, ad ea quoque animum advertimus, quæ vulgo non attenduntur; & usum, quem Mathesis habere potest in excolendo intellectu, ut eodem in omni Scientiarum genere, in quavis Arte, & in ipsis negotiis, tam privatis, quam publicis, prompte ac rite utamur, majorem facimus, quam quem per se habere potest; ut ut singula æquo pretio aestimantes, nec meritam detrahamus iis laudem, qui in aliqua Matheseos

parte excolenda omnem ætatem consumunt. Neque enim ea est hominis ætas, immo nec æ sunt ejus vires, ut unus omnia possit; & nisi essent, qui particulari studio scientiam egregie promoverent, nec is a Mathesi expectari poterat fructus in omni sua extensione, quem tantopere commendamus, & cui tantum statuimus pretium. Quamvis adeo in Gnomonica multa occurrunt, quæ magis curiosa, quam utilia videntur iis, qui utilitatem ex necessitate ad vitam commodè degendam metiuntur; immo quæ a severis inventorum censoribus ad lusus Mathematicorum referuntur, ipsis subinde Geometris excelsi ingenii, profundique acuminis non dissidentibus, propterea quod unusquisque suam amat & laudat Minervam; nobis tamen ea non contemnenda, sed magni faciendae videntur, quatenus analytica eorundem consideratio prodest ad augendam Artem inveniendi; immo etiam sola eorundem scientifica cognitio intellectum perficit, etiam si de eo perficiendo non cogites.

C A P U T XI.

De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris, & Architecturæ civilis.

§. 330. **P**Yrotechnia paucas continet demonstrationes, quæ ex Geometria elementari principia sua

mutuantur: quas negligere facile potest, qui soli praxi studet. Ceterum quæ ad praxin faciunt, non modo perspicue,

spicue, sed & distincte proposuimus; ut ideam distinctam eorum, quæ fieri debent, animo nullo negotio concipere detur. Nulli adeo dubitamus, quin studium pyrotechnicum per facile reddiderimus. Si quis praxi operam dare voluerit, is omnino ipso opere exequi tenetur, quæ præscribuntur: quo facto ipsemet in se experietur, resolutiones problematum eodem modo esse datas, quo resolutiones Geometriæ practicæ, veluti triangulorum constructionem, linearum perpendicularium descriptionem, in Geometria elementari exhibuimus. Quod si quis ante singulorum, quæ fieri iubentur, ideam distinctam sibi comparavit, quam ad ea facienda se conferat; is non solum ad id, quod faciendum, maiorem attentionem conferet, sed & maiore cum voluptate artem manuariam addiscet. Qui in nuda cognitione historica acquiescere volunt, iis quidem sufficere possunt, quæ tradimus; ubi tamen occasio offertur ipsis oculis usurpandi singula, quomodo parentur, eam negligere minime debent; cum hoc pacto ideæ efficiantur clariores, quatenus distincte explicatis insunt confuse percipienda.

§. 331. Quibus secundus cognitionis gradus curæ cordique est, non modo addere debent per paucas demonstrationes, quæ hinc inde adjiciuntur; verum etiam eorum, quæ ex principiis geometricis demonstrari nequeunt, rationes passim indicatas perpendere tenentur, & ad ea applicare studeant,

quæ sine illarum allegatione proponuntur. Dantur equidem nonnulla in Pyrotechnia, quæ Geometriæ sublimioris & Analyseos recentioris gnarus legibus mathematicis adstringere poterat, cum nunc solo arbitrio regantur; sed nobis minime vacat in talia inquirere. Hanc igitur telam aliis pertexendam lubentissime relinquimus, nobisque sufficit ea tradidisse, quæ ante perspecta habere debent, quam ingenii sui vires periclitentur.

§. 332. Pleraque, quæ in Pyrotechnia traduntur, sunt inventa, quæ artificum tentaminibus debentur, ubi casus multas sibi partes vindicat. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, & intellectum præsertim perficere intendunt, ut eodem extra Matheseos prompte ac rite utantur, hoc etiam inventorum genus probe expendere tenentur: neque enim rerum ceterarum, quemadmodum mathematicarum, tam exarsciata prostat theoria, ut suppetant principia, quorum vi a priori detegere licet omnia, quæ quæruntur. Empirica inveniendi methodus, qua utuntur artifices experientiæ quæ pollent omnem facientes usum qui a notionibus confusis expectari potest, in rebus utilissimis detegendis omne fert punctum, modo eadem rite uti noris: id quod tibi promittere poteris, si eundo per exempla, qualia suppeditat Pyrotechnia, eam revoces ad notionem distinctas. Qui vel ea legit, quæ in Prolegomenis de differentia Logicæ naturalis & artificialis docuimus, non modo

modo dicta plene intelliget, verum etiam iisdem facilem habebit fidem. Quod si attentius resolutiones problematum pyrotechnicorum expendas, easque tanquam inveniendas tibi proponas; methodo empiricæ inveniendi misceri rationalem, aut saltem misceri posse deprehendes: quemadmodum nemo hominum in actionibus suis totus empiricus est, ut non etiam rationi aliquæ deferantur partes. Et si forsân objecerit quispiam, te in modum inquirentem, quo eadem fuerint repertæ, haud raro, immo plerumque, incidere in alium ab eo, quo usi sunt inventores, prorsus diversum; non tamen inde conficitur, te nihil agere: sufficit enim si ostendere possis quod eo, quem concipis, modo reperiri potuerit quod quærebatur. Cum enim non alio fine in modum inveniendi inquiras, quam ut eundem in casu simili imiteris; eundem ex asse consecutus, si vel maxime de eo non cogitavit, qui quid invenit: id quod de omni analysi notandum, quam quasi divinando eruere stndemus. Ceterum, si quæ compositiones occurrunt, quarum nullam reddidimus rationem; in eam eo modo inquirendum, quo rationem compositionis pulveris pyrii casu detectæ eruimus (§. 17. & *segg. Pyrotech.*)

§. 333. Qui Architecturæ militaris nonnisi cognitionem historicam desiderant, ex definitionibus terminos sibi perspectos reddere tenentur; nec inconsultum est, si ad manus fuerit idea quædam materialis munimenti,

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

sive ex ligno, sive ex charta, sive etiam ex argilla parata. Cum enim terminos non alio fine addiscant, quam ut munimenta videntes singula suis nominibus indicare valeant, & ut nominibus auditis respondentes iisdem ideæ imaginationi præsentibus sistantur; ideæ hæc facilius memoriæ imprimuntur per conspectum ideæ materialis, quam notionibus distinctis, quibus definitiones constant. Quod si tamen hæc accedant, imprimuntur tanto firmitus, & jucundius, ut facilius eadem retineantur, nec sine voluptate labore hoc defungaris. Deinde sufficit munimenti unius vel alterius Protographiam saltem conficere, quæ nonnisi ambitum totius munimenti & operum externorum exhibet, ut hoc pacto idea munimenti integri acquiratur, nec ejus deinde conspectus adspicientem confundat. Idem tenendum est de operibus hostium campestribus, quorum in praxi offensiva & defensiva opus est. Neque Inconsultum est, ut, terminis intellectis, ichnographias munimentorum ad manusumat, & per eos easdem explicare discat. Rudis hæc Architecturæ militaris notitia usui est iter faciendis & loca munita invisendis; tum etiam prodest ad intelligendas novellas publicas, quando de obsidionibus urbium munitarum loquuntur.

§. 334. Qui cognitionem Architecturæ militaris scientificam sibi acquirere student, Elementa integra, eo quo conscripta sunt ordine, perlustrare debent. Ex capite igitur primo, principia sibi perspecta reddere tenen-

E c c tur,

tur, ex quibus omne de diversis muniendi formis iudicium pendet. Secundum hæc principia examinare debet diversas muniendi formas, quæ in capite secundo proponuntur. Neque parum sibi consulat, ubi deinceps ex STURMII Architectura militari hypothetica, simili examini alias adhuc muniendi formas subjiciat, vel ex aliis libris, quos de Architectura militari recensuimus, alias petat. Ita nimirum non modo principia ipsa sibi reddet multo clariora, eaque magis familiaria; verum etiam eorundem applicationem in suam magis rediget potestatem. Neque etiam contemnendus est calculus trigonometricus: quod qui faciunt, ejus utilitatem minime prospiciunt. Nemo non novit in qualibet muniendi forma non omnia sumi posse, principiis in capite primo expositis convenienter; sed per quædam assumpta determinari cetera. Horum adeo quantitas ex iis, quæ sumuntur, per calculum geometricum eruenda, siquidem accurate de eadem constare debet. Nullum equidem dubium est, ex iisdem, constructione geometrica, easdem lineas, eosdemque angulos determinari, & illarum magnitudinem, ope scalæ geometricæ, horum vero quantitatem, ope instrumenti transportatorii, investigari posse; nemo tamen est qui nesciat, methodum hanc, non modo supponere constructionem accuratissimam, verum etiam ne hac quidem supposita adeo accurate investigantur, quemadmodum per calculum trigonometricum eruuntur quan-

titates linearum & angulorum. Quod si excipias, in praxi acribian trigonometricam observandam non esse, immo nec semper observari posse, si vel maxime velis; utrumque largior: non tamen hinc recte infertur, quod inutile sit nosse angulorum ac linearum magnitudinem quam accuratissime. Etenim hinc non modo certus es, te in ea definienda nullum admisisse errorem, qui facile irreperere poterat eam mechanice investigando; sed & hinc attentior efficitur animus, ne in praxi a rigore magis recedas, quam par erat. Taceo, quod ad scientificam Architecturæ militaris cognitionem etiam requiratur, ut constet quomodo ex iis, quæ principiis in parte prima expositis convenienter sumuntur, investigentur cetera, quæ per ea determinantur. Ut vero tanto minus in dubium revocari possit utilitas calculi trigonometrici in Architectura militari; hoc unum adhuc probe perpendi velim. Subinde per ea, quæ in methodo muniendi sumuntur, vi principiorum generalium, molesta est constructio geometrica, si quidem accurata desideretur. Quod si vero lineæ aliæ supputentur, ex iis tanquam cognitis jam multo simplicior evadit & accuratior. Exemplum habemus in methodo muniendi *Blondelliana* (§. 15 1. *Arch. mil.*), cujus constructio, per calculum trigonometricum, ad *Paganianam* revocatur. Immo, ope hujus calculi, constructio, ex latere interno assumpto, potest revocari ad alteram, quæ ex externo procedit, & contra: id quod subin-

subinde esse potest, præsertim in munitionibus irregularibus. Munimenta irregularia expendimus capite tertio, & quænam hic sint observanda, exponimus. Enimvero in methodo muniendi irregulari inprimis opusest, ut principia generalia constanter ob oculos versentur, ne quid contra ea admittatur: id quod facile accidit, nisi per ea examinentur, quæ in delineandis munimentis irregularibus facis. Hic sane hand raro cœcutiunt, qui ea non satis perspecta habent, vel in eorum applicatione hæsitant. Unde apparet, quam necessaria sit scientifica Architecturæ militaris cognitio, cum irregularia munimenta sint frequentiora regularibus; ut adeo is demum Artis muniendi peritus sit dicendus, qui in delineandis munimentis irregularibus non hæret, nec cespitat. Denique qui rationes quoque operum campestrium, quæ capite ultimo describimus, perspicere voluerit, is duo scholia, quæ in fine adjicimus, attente perlegat, ut processus obsidionis ideam animo concipiat, & quænam obsessi defensionis gratia faciant, intelligat. Hinc enim multo clarius intelliguntur, quæ de illis præciuntur.

§. 335. Quodsi quis praxi Architecturæ militaris operam dare decreverit, ei scientificam ejus cognitionem quam maxime commendamus, experientia domestica deinde magis illustrandam, ac confirmandam. Ab eo autem cum expectetur, ut accuratas & nitidas munimentorum delineationes dare possit; in iis quoque deli-

neandis multum operæ consumere tenetur, donec tandem multiplici exercitio eum consequatur habitum, quo se commendare possit. Vulgo peritiam Architecturæ militaris ex munimentorum delineationibus æstimare solent, fallaci admodum judicio. Et si autem in Arte muniendi excellere possit, qui in iis delineandis parum excellat; cum tamen qui eidem totum sese dat, nec eam negligere debeat, quæ Artem orrant, nitidas quoque delineationes ab eo jure exigimus; tanto quidem magis, quo certius est, haud raro, immo plerumque contemni Artem ornatu isto destitutam. Qui vero praxi operam dare, ipsamque Artem exercere non decrevit, etsi castra sequatur; ei vix suademus, ut in habitu isto comparando tempus fallat, quod longe utilius in aliis ad discendis consumere poterit.

§. 336. Quibus tertius cognitio- nis gradus curæ cordique est, in Architectura quoque reperient militari, quæ attentionem ipsius merentur, sive in sola Mathefi versari voluerint, sive intellectum perficere studuerint, ut eodem prompte ac rite etiam extra eandem utantur. Cum Architectura militaris in numero disciplinarum prædicarum sit, ratio ultima eorum, quæ in eadem traduntur, finis est, qui per eam intenditur. Quamobrem hic probe perpendendum venit, quomodo ex fine, qui in definitione indicatur, deducantur principia, quæ in capite primo proposuimus; applicata vero deinde ad eadem Geometria, cetera

hinc deriventur, sine quibus forma muniendi concipi nequit, multo minus munimenta actu excitare licet. Hinc enim non solum addiscere datur, quæ ad cognitionem Artis mathematicam venandam usui sunt; verum etiam quomodo in disciplinis practicis versandum, ut satis adæquatas nanciscaris ideas, quæ praxi sufficiunt. Satis autem adæquata est, si in ea singula, quæ fieri debent, determinentur; quemadmodum ex tractatione Architecturæ militaris abunde elucescit, modo attentionem tuam in ea desiderari minime patiaris. Diversæ dantur muniendi formæ; sed, ubi eas juxta principia in capite primo proposita examines, non omnes cum iis æque consentiunt. Unde aliæ aliis tanquam meliores præferuntur. Docet autem progressus Architecturæ militaris, quod primo inventæ muniendi formæ defectibus fuerint obnoxia, quos experientia detexit, primum ab inventoribus non animadversas, iis autem mederi studuerint, qui recentiores excogitarunt. Etsi in usum Artis inveniendi non inutile foret, eo sine expendere omnes muniendi formas, quæ hætenus publici juris factæ, & quidem eo ordine, quo luci publicæ expositæ fuerunt; nostri tamen instituti ratio minime ferebat, ut in tantas ambages descenderemus. Ne tamen hac in re prorsus deessemus Lectori ad tertium cognitionis gradum adspiranti, ea tradidimus, quæ ad ideam quandam hujus facti animo concipiendam sufficiunt, profuturam iis, qui in aliis

disciplinis practicis Architecturæ militares non infeliciter imitari voluerint. Non alia sane de causa exposuimus methodum muniendi *Belgicam*; utut propter defectus, quibus laborat, hodie antiquatam, ut nullius usus esse videatur, nisi quatenus adhuc extant munimenta bene multa hac methodo constructa, & iisdem subjunximus methodos muniendi Gallorum. Constat enim formam muniendi Belgicam, tanquam omnium optimam, celebratam fuisse; ejus autem navis animadversis, Gallos primum publicasse formas alias, quibus hisce mederi tentarunt. Ceterum applicatio Trigonometriæ ad Architecturam militarem, in usum tertii cognitionis gradus, etiam aliquam attentionem meretur; non modo quod hoc ipso confirmetur, quod in Arte inveniendi locum mereatur; verum etiam ut ejus amplissimus usus in majore luce constituatur.

§. 337. Architecturæ civilis cognitionem historicam acquisiturus legat definitiones, & problemata; exceptis iis, quæ ad delineationes Ordinum architectonicorum; & eorum usum in ordinandis januis, atque fenestris spectant, & quæ de Ichnographia & Orthographia ædium agunt. Quodsi desit occasio ædificia juxta regulas architectonicas constructa contemplandi; Ichnographias & Orthographias externas ædificiorum æri incisas perlustret, ut ideam ædificii integri, juxta regulas architectonicas constructi, animo imprimat. In primis autem

autem terminos, & constructionem Ordinum architectonicorum sibi familiares reddat, ne in ornatu, qui inde petitur, cœcutiat. Hoc pacto obtinebit, ut non solum libros de Architectura civili conscriptos sine hæsitacione legere, sed quæ usui suo esse possunt, etiam addiscere, ac data occasione ad eundem transferre, queat. Historica igitur cognitio non ob solam curiositatem, sed & ob utilitatem, quam unicuique præstat, acquiritur. Sane qui peregrinantur, quemadmodum Germani facere solent studiis academicis absolutis, cognitione ista animi imbutum habere debent; ne in ædificiis, aliisque operibus architectonicis, spectandis ignorent, quid videant, laudaturi aliis, quod cur laudent, nullam asserere valent rationem. Male adeo sibi consulunt, qui studium architectonicum, quod ea fini intra paucas hebdomades absolvi poterat, in Academiis prorsus negligunt, non alia de causa, quam quod architecti fieri nolint. Perfacile autem hoc studium est, præsertim si ultra cognitionem historicam progredi nolueris. Quod si otium suppetat, ruditer saltem delineare Ordinem aliquem architectonicum, veluti Toscanum, qui delineatu omnium facillimus, juvat; non modo ut idea Ordinis, sed etiam membrorum memoriæ firmitus insigatur: id quod tanto magis suadendum, cum norim plerosque fieri desertores studii architectonici, quod tædiosum videatur terminorum notitiam sibi comparare.

§. 338. Scientificam Architecturæ cognitionem desiderans Elementa integra, eo quo conscripta sunt ordine, perlegat, & eam attentionem afferat, quæ ad singula rite percipiendâ sufficit. Qui vel in Elementis Geometriæ versatus fuerit, ei attentio huc afferenda nulla fere videbitur: Mathematicum vero prorsus ignarus non majorem hic requiri experietur, quam qua in legendo libro alio quocunque utendum; immo minorem, cum omnia distincte explicentur, quod vulgo fieri non solet; nec occurrant verba, quorum dubius est sensus; præter doctrinam vero de Ordinibus architectonicis nihil occurrat, cujus non habeat Lector ideam vulgari experientia acquisitam. Nemo autem hic expectet demonstrationes, quales in Geometria dedimus; sufficit enim addisci eorum, quæ præcipiuntur, rationes, ut intelligatur, cur hoc potius modo fieri debeant, quam aliter. Inprimis etiam probe perpendat in Ordinibus architectonicis multa esse arbitraria; quorum etsi dentur, atque a nobis data sint rationes, absit tamen, ut quis rationes istiusmodi desideret, quales sunt ceterorum, quæ necessarias habent. Sane in Arithmetica, quæ rigidas demonstrationes admittit, cum veritates numerorum non minus necessariae sint, quam linearum & figurarum in Geometria, eorum, quæ arbitraria sunt, veluti legis numerandi & notarum numericarum, non dari possunt rationes, quæ veritatibus necessariis conveniunt. Qui praxi architectonica sefe

dedunt, iis in primis opus est scientifica Architecturæ cognitione : Architectus enim in promptu habere debet rationes, quas reddat quærentibus, cur hoc vel illud ita fecerit (§. 3. *Arch. civ.*). Obtinebit præterea, ne cœca sit aliorum imitatio ; quam haud raro esse fallacem, ne opus probetur intelligentium iudicio, experientia loquitur. Non desunt exempla, quibus quod dictum est, confirmari poterat ; sed nostrum jam non est perstringere ea, quæ ab aliis minus recte facta sunt, cum jam docere id unice intendamus, quomodo tractandum sit studium architectonicum, ut recte fiant omnia. Industriam præterea suam exercere debent in delineationibus architectonicis, quicunque Artem exercere decreverunt, & quæ paulo ante de delineationibus munimentorum annotavimus (§. 335), ea quoque hic notanda veniunt. Ex elegantia delineationum vulgo iudicium fertur de peritia Architecti ; etsi male, ac subinde non sine damno fundatoris. Quamobrem cumdandum non modo sit aliquid opinioni, sed & qui in Arte quadam excellit, ea negligere non debeat, quæ ad ornatum faciunt ; nemo erit, qui ab Architecto elegantiam in delineandis ædificiis, aliisque operibus architectonicis, jure non desideret ; quamvis non probemus contemni propterea Artem in eo, qui eadem excellit, quia elegantiam in delineando non possidet. Qui enim hoc faciunt, suo, & aliorum, quibus a consilio esse debebant, hoc faciunt damno.

Immo si quis desideret deliquationes elegantes ; aliorum opera eadem perfici poterunt ; modo, qui in Arte excellit, ea suppeditet, quæ ad eas perficiendas necessaria sunt.

§. 339. Qui denique ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos quoque juvabit Architectura civilis. In Architectura civili, regulæ omnes deducuntur ex fine, quem loquitur definitio ejusdem. Finis hic in eo consistit, quod ideam ædificii animo concipere, & juxta eam ipsum extruere debeamus, ita ut scopo fundatoris ex æsse satisfaciatur. Quamobrem hinc potissimum animum advertere tenetur, qui tertium cognitionis gradum intendit, quomodo ex hoc fine deriventur regulæ omnes, ita ut rationes earundem tandem in hanc rationem ultimam resolvantur. Monuit jam VITRUVIUS, & nos in Elementis nostris a priori ex ipso fine Architecturæ, ostendimus, regulas Architecturæ omnes redire ad firmitatem, utilitatem seu commoditatem, & venustatem atque ornatum ædificii, vel alterius operis architectonici cujuscunque. Quamobrem regulæ omnes rationem sufficientem, vel in firmitate, vel in utilitate, vel in venustate atque ornatu, vel hisce binis, aut omnibus simul sumtis agnoscunt. Sufficit itaque inquirere, quomodo ex hisce fontibus, vel immediate, vel mediate fuerint deductæ. Cum paucissimæ sint, quæ Geometriæ auxilium postulant ; hæc disquisitio plurimum proderit ei, qui disciplinas practicas a Mathesi sejunctas accurata metho-

methodo pertractare voluerit. Notandum, Paterea, si quis ideam ædificii animo concipit, dato fundatoris scopo, cum inventorem agere, ac regulis Architecturæ civilis uti, tanquam principiis in ratiocinando. Quamobrem qui ad modum, quo hoc facit, animum attendit; is hinc addiscere valet, quomodo theoriæ ad tractanda negotia, quæ levi brachio tractari minime possunt, dextre ac rite applicentur. Suademus ergo ut ædificiorum, supposito fundatoris scopo, inveniat constructio etiam ab iis, qui Artem exercere non intendunt: quod ut facilius succedat, ante in examinandis ædificiis juxta regulas architectonicas non inutiliter versabitur, quam ad telam istam pertexendam se accingit. Non adeo levem, nec contemnendæ utilitatis deprehendet demonstrationem, qui ædificium, dato fundatoris scopo, construendum sibi tanquam problema proponit, veluti *construere in data area, datoque loco, ædificium, quod huic fundatoris scopo ex asse satisfaci*; deinde quomodo extruendum sit eodem modo exponat, quo resolutiones problematum per universam Mathesin exhibuimus, & tandem demonstret pro datis circumstantiis scopo fundatoris ex asse satisfieri, siquidem hoc modo extruatur. Etenim qui in expediendis negotiis, tam privatis, quam publicis, eam certitudinem consequi voluerit, quam consequi datur; plurimum hinc lucis scœnerabitur, quam aliunde vix ac ne vix quidem adeo commode expectet. Non igitur

erubescimus studium Architecturæ civilis, hoc modo instituendum, commendare iis, qui ad negotia publica gerenda sese præparant; ut eorum rite tractandorum ideam quandam exemplarem animo insinuent. Plura addere possem, quomodo prudentia Architecti prodesse possit in gerendis negotiis; nisi principiis, quæ in Philosophia practica tradimus, imbutus per se hoc videre possit, ubi ea, quæ hic commendamus, exercitia non neglexerit.

§. 340. Atque ita tandem nos satis docuisse confidimus, quomodo studium mathematicum tractandum sit, ut omnem consequamur usum, qui ab eo expectari potest. Non loquor nisi experta; ac ingenue profiteor, me nunquam ea, quæ hæcenus in Philosophia conscripsi, & in posterum, si Deo ita visum fuerit, additurus sum, daturum fuisse, nisi adminiculis istis adjutus fuisset. Eadem experientia fretus docere quoque poteram, quomodo Mathesi uti possimus ad distinctas, & fecundas, in Philosophia prima, notiones venandas; & quomodo studio mathematico perfici possit etiam appetitus; sed cum hoc a præsentis instituto alienum sit, quæ hic dici poterant, alii occasione reservamus. Ne tamen dixisse videamur, quæ absorta sunt, unum saltem alterumque exemplum in medium afferre lubet. Poteramus hic tantummodo provocare ad ea, quæ alibi jam tradidimus, veluti quod notio generum, & specierum (*not. §. 72, 73 Log.*) atque individui,

exformulis algebraicis derivari possit (*not.* §. 74 *Log.*); & ipse modus, quo Deus universalia, eorundemque nexum, in singularibus inuenitur, ex iisdem formulis eliciatur (*not.* §. 275 *part. 1. Theol. nat.*); sed ne lectorem ablegemus ad alibi quærenda, nec hic repetamus alibi dicta, consultius visum fuit, exempli loco, alia quædam proferre. Inter notiones difficiles referri solet notio determinati & indeterminati. Enimvero nos eandem derivavimus ex exemplis mathematicis: qua etiam de causa, singula quæ, in Ontologia, de determinato & indeterminato docuimus, exemplis mathematicis illustramus. Neque enim dantur alia hisce clariora, & notionem in Philosophia longe utilissimam felicius illustrantia. In formula algebraica quacunque, veluti si $\frac{a+b}{2}$ dicatur numerus major, summa existente a , & differentia b ; numeri a & b dicuntur indeterminati; quia tam a , quam b explicari potest per numeros infinitos; consequenter de a affirmari potest, tum quod sit 6, tum quod sit 12, tum quod sit 19, & ita porro in infinitum, & de b affirmari potest, tum quod sit 2, tum quod sit 4, tum quod sit 5 & ita porro in infinitum. Indetermi-

nata igitur dicitur summa, quatenus consideratur ut id, de quo affirmari potest numerus, 6, 12, 19 &c. nullus tamen adhuc de eadem affirmatur: quæ est ipsa notio indeterminati (§. 105 *Ontol.*). At si summa dicatur 6, determinata dicitur; quia jam constat, quinam numerus de ea sit affirmandus: quæ est ipsa notio determinati (§. 112 *Ontol.*). Idem patet de differentia b . Ordinis quoque notio distincta inter eas refertur, quæ difficiles sunt: sed ex seriebus infinitis, quarum termini ordine dicuntur progressi, haud difficulter eruitur. Ex. gr.

$$\text{in serie } \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 \\ - \frac{1}{7.8}Cv^2, \text{ \&c. in infinitum, ubi } A$$

terminum primum, B secundum, C tertium denotat; terminus sequens determinatur ex præcedente eodem modo, ac ideo ordo in progressu terminorum adesse dicitur. Ex identitate determinationis nascitur similitudo (§. 217 *Ontol.*). Ordo igitur hic est similitudo obvia in modo, quo termini se invicem consequuntur; quemadmodum vult definitio nostra ordinis (§. 472 *Ontol.*). Sed pauca hæc sufficiant.

Finis Commentationis de Studio Matheſeos recte instituendo.

Tab. I Tom V.

Fig. 1

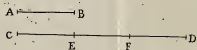


Fig. 2

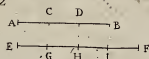


Fig. 3



Fig. 4

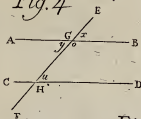


Fig. 5



Fig. 6

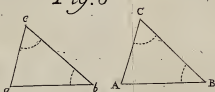


Fig. 7

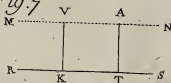


Fig. 8

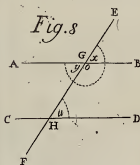


Fig. 10

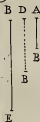


Fig. 11



Fig. 12

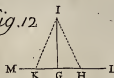


Fig. 9

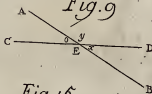


Fig. 13

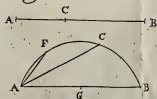


Fig. 14

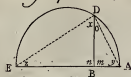
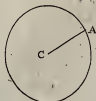


Fig. 15



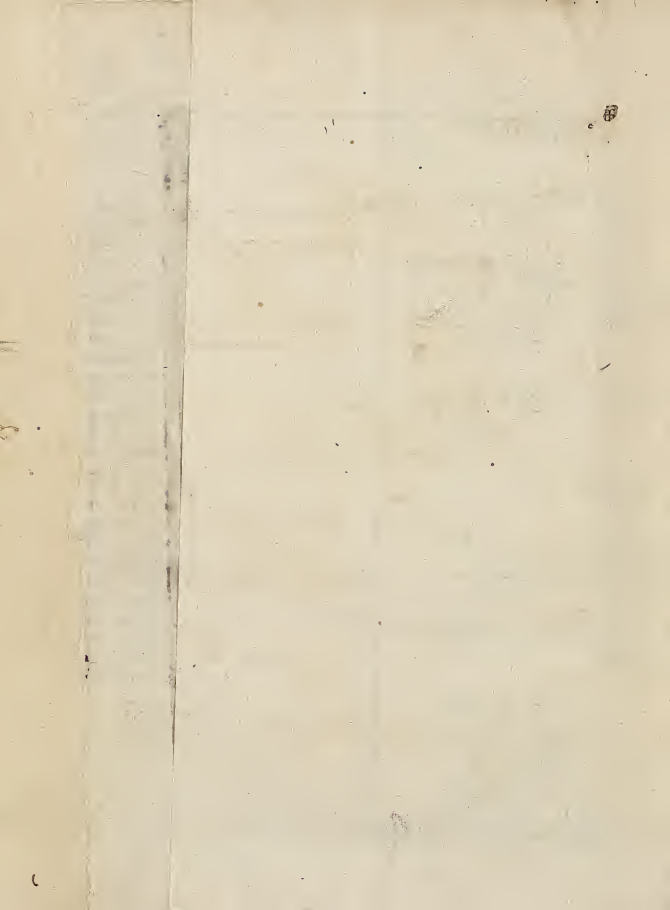


Fig. 16.



Fig. 21.

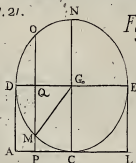


Fig. 24.

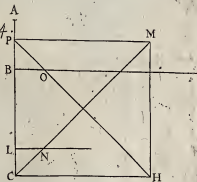


Fig. 20.

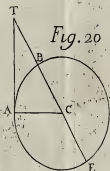


Fig. 18.



Fig. 26.

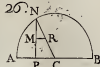


Fig. 25.



Fig. 23.

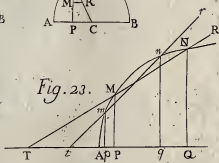


Fig. 19.

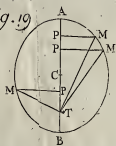
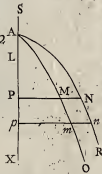


Fig. 17.



Fig. 22.



Tab. III Tom. V.

Fig. 27



Fig. 28

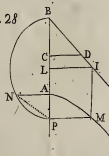


Fig. 29

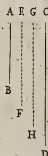


Fig. 30

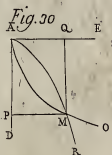


Fig. 31



Fig. 37

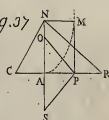


Fig. 33

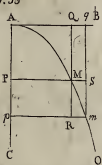


Fig. 36

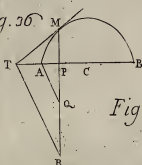


Fig. 39

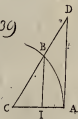


Fig. 32

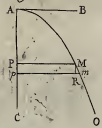


Fig. 38

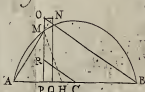


Fig. 34

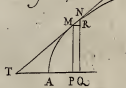
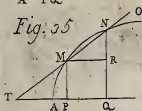


Fig. 35



9.



Fig. 40

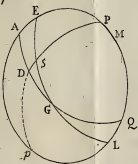


Fig. 43

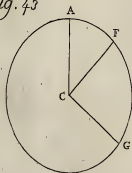


Fig. 41

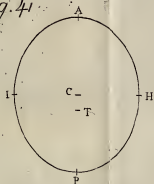


Fig. 44

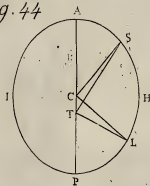


Fig. 42

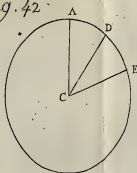
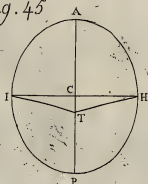


Fig. 45





INDICES
IN
TOMOS QUINQUE
ELEMENTORUM
MATHESEOS UNIVERSÆ.

7

INDICES
IN
TOYOTOMI
ELEMENTORUM
ARITHMETICAE



I.

CONSPECTUS ELEMENTORUM MATHESIOS UNIVERSÆ.

TOMUS I.

I.	De Methodo mathematica brevis commentatio,	pag. 1
II.	Elementa Arithmetica,	15
III.	Geometria,	95
IV.	Trigonometria planæ,	211
V.	Analyses finitorum,	233
VI.	infinitorum,	417

TOMUS II.

VII.	Elementa Mechanicæ & Staticæ,	1
VIII.	Hydrostaticæ,	253
IX.	Aërometria,	279
X.	Hydraulica,	331

TOMUS III.

XI.	Elementa Opticæ,	1
XII.	Perspectivæ,	77
XIII.	Catoptrica,	103
XIV.	Dioptrica,	171
XV.	Sphæricorum & Trigonometria Sphærica,	291
XVI.	Astronomia,	341

TOMUS IV.

XVII.	Elementa Geographiæ & Hydrographiæ,	1
XVIII.	Chronologia,	85

XIX.	Elementa Gnomonica,	pag. 151
XX.	Pyrotechnia,	197
XXI.	Architecturæ militaris,	237
XXII.	Architecturæ civilis,	287

TOMUS V.

XXIII.	De præcipuis scriptis mathematicis brevis Commentatio,	I
Cap. I.	<i>De Cursibus, Operibus atque Lexicis mathematicis,</i>	3
Cap. II.	<i>De Arithmetica,</i>	21
Cap. III.	<i>De Geometria,</i>	24
Cap. IV.	<i>De Scriptis analyticis,</i>	38
Cap. V.	<i>De Trigonometria,</i>	55
Cap. VI.	<i>De Statica & Mechanica,</i>	60
Cap. VII.	<i>De Hydrostatica, Aërometria & Hydraulica,</i>	68
Cap. VIII.	<i>De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perspectiva,</i>	73
Cap. IX.	<i>De Astronomia,</i>	79
Cap. X.	<i>De Chronologia, Geographia & Gnomonica,</i>	99
Cap. XI.	<i>De Architectura civili,</i>	109
Cap. XII.	<i>De Pyrotechnia,</i>	118
Cap. XIII.	<i>De Architectura militari,</i>	120
XXIV.	Commentatio de studio mathematico recte instituendo,	129
Cap. I.	<i>De diversis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur,</i>	131
Cap. II.	<i>De modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa,</i>	190
Cap. III.	<i>De Studio Arithmetice, Geometria & Trigonometria plana in specie,</i>	200
Cap. IV.	<i>De Studio Algebra seu Analyseos mathematicæ in specie,</i>	209
Cap. V.	<i>De Studio Mechanicæ,</i>	317
Cap. VI.	<i>De Studio Hydrostaticæ, Aërometrie & Hydraulicæ,</i>	326
Cap. VII.	<i>De Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ,</i>	333
Cap. VIII.	<i>De Studio Sphæricorum & Trigonometriæ sphericæ,</i>	346
Cap. IX.	<i>De Studio Astronomiæ,</i>	350
Cap. X.	<i>De Studio Geographiæ, Chronologiæ & Gnomonicæ,</i>	389
Cap. XI.	<i>De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris & Architecturæ civilis,</i>	399

FINIS TOTIUS CONSPECTUS.

II. INDEX.

INDEX

Ostendens paragraphos, in quibus definitiones & propositiones Elementorum Euclidis continentur.

Notes velim, Ar. designare Arithmeticam, G. Geometriam, An. Analyfin finitorum.

Elementi I.

Def. 1. G. §. 6. 8. 9.

Def. 22. G. §. 104.

Ax. 3. Ar. 91.

2. 10. 12.

23. 88.

4. 90.

3. 11.

24. 89.

5. 91. 92.

4. 17.

25. 90.

6. 93.

5. 28.

26. 91.

7. 94.

6. 29.

27. 92.

8. G. §. 161.

7. 36.

28. 93.

9. Ar. §. 84.

8. 54.

29. 98.

10. G. §. 250.

9. 54.

30. 100.

11. 50.

10. 65. 78.

31. 99.

12. 145.

11. 66.

32. 101.

13. 262.

12. 66.

33. 103.

14. 170.

14. 32.

34. 81.

Prop. I. 198.

15. 37.

35. 102.

4. 179.

16. 37.

36. 111.

5. 184.

17. 39.

Post. I. 20.

6. 253.

18. 135.

2. 21.

7. 202.

19. 34.

3. 131.

8. 204.

20. 87.

Ax. I. Ar. 87. 89.

9. 209.

21. 97.

2. 88.

10. 210.

Eff. 3.

Pr.

Pr. 11. G. §. 212.

12. 216.

13. 147.

14. 147.

15. 156.

16. 188.

17. 247.

18. 189.

19. 189.

20. 190.

21. 300.

22. 205.

23. 208.

26. 251.

27. 255.

28. 255.

29. 233.

30. 232.

31. 258.

32. 239. 240.

33. 257.

34. 335. 337.

35. 383.

36. 383.

37. 385.

38. 385.

41. 386.

44. 391.

45. 391.

46. 338.

47. 417.

48. 417.

Elem. II.

Pr. 1. An. 91.

2. 93.

3. 86.

4. Ar. 261.

An. 95.

Pr. 5. An. §. 88.

6. 94.

7. 90.

8. 90.

9. 89.

11. 258.

Elem. III.

Def. 1. G. 171.

2. 47.

3. 47.

4. 225.

5. 225.

6. 45.

7. 77.

8. 70.

9. 56.

10. 46.

Pr. 1. 295.

3. 291.

4. 332.

5. 288.

6. 287.

7. 303.

8. 302.

9. 173.

10. 203.

14. 298.

15. 299. 301.

16. 304. 305.

17. An. 291.

18. G. 308.

19. 309.

20. 313.

21. 315.

22. 350.

25. 295.

26. 315.

27. 315.

Pr. 28. G. §. 289.

29. 289.

30. 293.

31. 317.

318.

319.

32. 323.

35. 381.

36. 379.

37. 380.

Elem. IV.

Def. 3. G. §. 116.

6. 117.

Pr 5. 294.

297.

6. 353.

7. 351.

11. An. 279.

12. G. 355.

15. 357.

Elem. V.

Def. 1. Ar. 30.

2. 142.

3. 126.

4. 131.

5. 219.

6. 155.

7. 158.

8. 155.

9. 156.

10. 159. 216.

11. 159. 216.

13. 173.

14. 169.

15. 190.

16. 193.

17. 193.

18. 194. 195.

Def. 19.

Def. 19. Ar. §. 194.

20. 195.

Pr. 4. 185.

5. 188.

6. 188.

7. 168.

8. 203. 205.

9. 177.

10. 204. 206.

11. 167.

12. 155.

15. 178.

16. 173.

17. 193.

18. 190.

19. 188.

22. 194.

23. 198.

Elem. VI.

Def. 1. G. 175.

2. An. 261.

3. 258.

4. G. 227.

5. Ar. 159.

Pr. 1. G. 389.

2. 268.

3. 269.

4. 267.

5. 207.

6. 183.

8. 329.

9. 274.

10. 275.

12. 271.

13. 327.

16. 378.

17. 377.

18. 360.

Pr. 19. G. §. 398.

20. 403.

23. 376. 388.

30. An. 258.

33. G. 314.

Elem. VII.

Def. 1. Ar. §. 3. 4.

2. 10.

3. 30.

4. 30.

5. 142.

6. 72.

7. 73.

11. 75.

12. 79.

13. 76.

14. 80.

15. 66. 69.

18. 246.

19. 248.

20. 155.

22. An. 248.

23. Ar. 74.

24. 126.

26. 159.

27. 217.

Ax. 7. 210.

9. 212.

Pr. 1. 230.

2. 228.

11. 188.

12. 187.

13. 173.

14. 194.

16. 207.

17. 178.

18. 178.

19. 297. 299.

Pr. 20. Ar. §. 298.

22. 198.

Elem. VIII.

Pr. 11. Ar. §. 259.

12. 259.

13. 260.

Elem. IX.

Pr. 21. An. §. 72.

22. 75.

23. 75.

24. 72.

25. 73.

26. 74.

27. 73.

28. 72.

29. 74.

30. 79.

35. 119.

36. 248.

Elem. X.

Def. 1. Ar. §. 31.

2. 31.

6. 39.

7. 43.

Pr. 3. 230.

5. 163.

6. 160.

7. 163.

8. 164.

117. G. 421.

Elem. XI.

Def. 1. G. §. 444.

3. 486.

4. 494.

6. 476.

8. 498.

9. 564.

11. 445.

Def. 12.

Def. 12. G. §. 472.

13. 456.

14. 470.

15. 470.

16. 470.

17. 470.

18. 467.

19. 467.

20. 468.

27. 475.

28. 475.

29. 475.

30. 462.

Pr. 1. 478.

2. 480. 481.

3. 482.

4. 484.

5. 491.

6. 492.

7. 483.

8. 492.

9. 495.

10. 496.

Pr. 11. G. §. 505.

12. 502.

13. 488.

14. 497.

15. 500.

16. 499.

17. 501.

18. 506.

19. 508.

21. 452.

28. 537.

29. 535.

30. 535.

31. 535.

32. 573.

33. 578.

34. 580.

Elem. XII.

Pr. 1. G. 408.

2. 408.

5. 573.

6. 573.

7. 543.

Pr. 8. G. §. 578.

9. 580.

10. 547.

11. 573.

12. 578.

14. 573.

15. 580.

18. 579.

Elem. XIII.

Pr. 8. An. 294.

9. 275.

10. 279.

12. 268.

13. 299.

14. 305.

15. 302.

16. 311. &

seqq.

17. 308. &

seqq.

18. 301. 304.

307. 310.

311.

FINIS INDICIS SECUNDI.

III. IN-

III.

INDEX AUTORUM,

Qui in Commentatione de præcipuis scriptis mathematicis recensentur.

Notes velim Numerum Romanum Caput, ceteros vero §. §. ejusdem designare.

A.

A Balphatus Asphahamenfis, III. 13.
 Albategnius, IX. 2. 12.
 Alberti, Andreas, VIII. 21.
 de Albertis, Leo Baptista, XI. 1. 2. 3.
 Alexander, Dominicus Jacobus, VI. 27. 31.
 Albaxen, VIII. 2. 3. 31.
 Alimarus, Dorotheus, X. 20.
 Alingham, Wilhelmus, I. 8.
 Alphonfus IX. IX. 25.
 S. Andreas Hierosolymitanus, X. 2.
 Anonymi, VI. 26. VII. 8. IX. 2. 57. XI. 15.
 26. 30. XIII. 17. 27.
 Apollonius Pergæus, I. 1. 24. III. 11. 13.
 25. 28. 29. IV. 1. VII. 14.
 Aratus, X. 2.
 Archimedes, I. 24. 34. III. 11. 12. 13. 29.
 VI. 1. VII. 1. 14.
 Ardäfer, Joannes, III. 34.
 des Argues, XI. 24.
 Aristæus, III. 13. IV. 1.
 Aristarchus Samius, I. 34. VII. 14.
 Athenæus, I. 30.
 Auxout, I. 31. 37.
B Achetus, Casparus, IV. 2.
 Bacon, Rogerius, VIII. 5.
 Baker, Thomas, IV. 8.
 Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

Baldus, Bernhardinus, I. 30. XI. 1.
 Balianus, Johannes Baptista, VI. 5. VII. 10.
 Bara, J. VIII. 20.
 Baratteri, Johannes Baptista, XI. 26.
 Barlaamus Monachus, II. 5.
 Barrowius, Isaacus, III. 2. 11. 19. 29. IV.
 8. 23. VIII. 14.
 Bartholinus, Erasmus, IV. 6.
 Bartschius, Jacobus, V. 10.
 Bayerus, Johannes, IX. 35.
 Johannes Hartmannus, II. 16.
 Johannes Matthias, VI. 22.
 de Beaune, Florimundus, IV. 6.
 Bedford, Arturus, X. 6.
 Beeren, Thomas Leonhardus, XII. 1.
 Behr, Johannes Henricus, XIII. 25.
 de Belidor, VII. 18. XII. 8. XIII. 34.
 Berger, Christianus Philippus, VI. 27.
 IX. 36.
 Bernoulli, Daniel, VII. 12.
 Jacobus, IV. 18. 21. IX. 39.
 Johannes, IV. 14. 18. 19. 31. 33.
 35. 36. X. 21.
 Nicolaus, IV. 14. X. 21.
 Beroaldus, Franciscus, VI. 10.
 Besson, Jacobus, VI. 20.
 G g g Beve-

- Beveregius*, Guilielmus, X. 5.
Beyerus, Johannes Hartmannus, III. 31.
de Beze, I. 37.
Bierum, Henricus, X. 33.
de Billy, Jacobus, III. 26.
Bion, Joannes Theobaldus, I. 13.
 Nicolaus, IX. 35. X. 35. 38.
de Birac, XIII. 37.
Biton, I. 30.
Blanchini, Franciscus, IX. 8. 39. X. 7.
Bleau, Guilielmus, IX. 35. X. 39.
le Blond, XI. 9.
Blondel, Franciscus, I. 37. X. 7. XI. 10.
 XII. 8. XIII. 427.
Bäckler, Georgius Andreas, VII. 16. XI.
 5. XII. 7. XIII. 36.
Bäcklerus, Joannes, III.
Bœthius, Anicius Manlius Severinus, II. 1.
Bombelle, XIII. 27.
Bombelli, Raphaël, IV. 3.
Bonannus, Philippus, VIII. 19.
Bone, Edmundus, III. 39.
Bonjour, Guilielmus, X. 7.
Borellus, Johannes Alphonfus, III. 13.
 VI. 3.
de Borgsdorf, Ernestus Fridericus, XIII. 9.
Borromini, Franciscus, XI. 19.
Bose, Georgius Matthias, IX. 43.
Bosse, Abrahamus, VIII. 20.
Boyle, Robertus, VII. 3.
Braikenridge, Guilielmus, IV. 37.
Branca, XI. 9.
Brand, Augustinus, XII. 6. 7.
Braunius, Ernestus, XII. 1.
Bremond, I. 36.
Briennius, Manuel, I. 34.
Briggins, Henricus, V. 11.
Brown, Wilhelmus, VIII. 15.
Brunetti, Franciscus Xaverius, IV. 39.
Buchnerus, Joannes Sigismundus, XII. 1.
de Buffon, IV. 27.
Bulter, XI. 29.
Bullialdus, Ismaël, III. 23. IV. 17. V. 16.
 IX. 3. 18. 20. 28. 41.
Buonarotti, Michael Angelus, XI. 7.
- Byrgius*, Justus, III. 39. IV. 38. V. 10.
 14. IX. 2.
- C.**
Calvisius, Sethus, X. 3. 7.
de Camus, VI. 19.
Cantziernus, Bernhardus, III. 32.
Capellus, Angelus, IX. 44.
Carré, IV. 20.
Cartesius, Renatus, IV. 6. 20. VIII. 7.
Casatus, Paulus, VI. 2.
Cassini, Johannes Dominicus, I. 37. IX. 6.
 30. 53. X. 7. 24.
 Jacobus, IX. 6. 30.
Castellus, Robertus, XI. 17.
Castronius, Benedictus Maria, X. 37.
Caswellus, Johannes, I. 34.
Cataneo, Petrus, XI. 9.
Cavalerius, Bonaventura, III. 12. 24. IV.
 17. V. 15.
Ceva, Joannes, VII. 9.
 Thomas, I. 35.
Chamberus, Joannes, II. 5.
de Chambray, Roland Freard, XI. 9.
Chambers, E., I. 19.
Chamberus, Johannes, II. 5.
de Champdoré, Duræus, XI. 7.
Cherubim, VIII. 10.
Cheyneus, Georgius, IV. 22.
Christmannus, Jacobus, X. 8.
Claramontius, Scipio, IX. 39.
Clarke, Joannes, IV. 39. VI. 16.
 Samuel, VIII. 12.
Clavius, Christophorus, I. 24. II. 12.
 III. 33. IX. 24. 38. X. 7. 9. 26.
du Clos, I. 37.
Coehorn, XII. 4. 7. 27. XIII. 6. 26. 27.
Coetfius, Henricus, X. 32.
Collins, Joannes, I. 34. IV. 34.
Colombonus, Angelus Maria, X. 38.
Colson, Joannes, IV. 27.
Combacchius, Johannes, VIII. 5.
Commandinus, Fridericus, III. 8. VII. 16.
Commentarii Academiæ Scientiarum Im-
 perialis Petropolitanae, I. 39.

Commentarii de Bononiensi Scientiarum &

Artium Virinto atque Academia, I. 40.

Conradi, Johannes Michael, VIII. 17.

Copernicus, Nicolaus, IX. 2. 13. 26. 39.

Cotes, Rogerus, IV. 30. VI. 13.

Crabtrius, Guilielmus, IX. 4.

Craige, Johannes, IV. 23.

de Cronzas, IV. 13. 19.

Cunitia, Maria, IX. 27.

Cunn, Samuel, II. 17. III. 39.

Curio, Jacobus, IX. 25.

D.

Dafypodius, Conradus, I. 15. III. 4.

Decbales, Claudius Franciscus Mil-

liet, I. 4. II. 12. III. 2. 29. V. 20. VI.

II. VII. 5. 15. X. 11. 14. XI. 23.

XII. 1. XIII. 15.

Deidier, XIII. 27.

Demontiosius, Ludovicus, XI. 1.

Deran, Philippus, XI. 24.

Derham, Wilhelmus, VI. 26. IX. 39.

Desaguliers, J. Theoph. VIII. 15.

Desargues, VIII. 20.

Desgodetz, Antonius, XI. 13.

Detonvilleus, III. 14.

Dieussart, Carolus Philippus, XI. 9.

Dilichius, Wilhelmus, XIII. 15.

Diophantus Alexandrinus, I. 23. 27.

IV. 2. 9.

Ditton, Henricus, VI. 15.

Rumphredus, IV. 39.

Dodartus, I. 37.

Doegen, Matthias, XIII. 18.

Domckey, VI. 16.

Doppelmeyer, J. Gabriel, IX. 20. X. 31. 35.

E.

Ecchellenfis Maronita, Abrahamus, III.

13.

Eifenschmid, Joannes Casparus, V. 10.

Elrich, Daniel, XII. 1.

Eratosthenes, IV. 1.

Errardus, XIII. 27.

Eslerus, Joannes, IX. 24.

Euclides, I. 1. 2. 4. 7. 23. 24. 29. 32. 34.

II. 6. 4. III. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 10. IV.

1. VII. 14. VIII. 1. X. 15.

Eulerus, Leonhardus, VI. 18. VII. 12.

Eustachius de Divinis, I. 35.

Eutocius, I. 34.

F.

Faber Stapulensis, Jacobus, II. 3.

Fabry, Honoratus, IV. 37. VIII. 26.

Fäsch, Joannes Ludolphus, I. 22.

Faulhaber, Joannes, IV. 38. XIII. 30.

du Fay, Abbas, XIII. 5.

Fermatius, I. 31. IV. 8.

Fenillee, Franciscus, X. 22.

Ludovicus, IX. 9.

Fineus, Orontius, III. 2.

Fischer ab Erlachen, Johannes Bernhar-

du, XI. 18.

Flamstadius, Joannes, I. 34. IX. 7. 28.

31. 34.

von Flemming, Joannis Fridericus, XIII. 37.

Flussates Candalla, Franciscus, III. 2.

de Fontenelle, Bernhardus, I. 37. IV. 33.

Fournier, Georgius, X. 14.

Frenicle de Bessy, I. 31. 37.

Freytag, Adamus, XIII. 1.

Frezier, XI. 25.

Frisius, Gemma, II. 14.

Frontinus, Sextus Julius, VII. 13.

G.

Galileus Galilaei, III. 39. VI. 4. VIII. 6.

IX. 39. 41.

Gallonus, IV. 25.

Gaubil, IX. 9.

Ganppe, Joannes, X. 33.

Gauricus, Lucas, IX. 10. XI. 1.

Gautier, Henricus, XI. 27.

Gaza, Theodorus, X. 2.

Gellibrand, Henricus, V. 12.

Gemma Frisius, II. 14.

Germanus, Georgius, I. 24.

Ghetaldus, Marinus, I. 1. IV. 6. 9. VII. 1.

Ghislerius, Antonius, IX. 56.

Girardus, Albertus, I. 23.

Glafer, Johannes Christophorus, XIII. 35.

Goldmann, Nicolaus, III. 39. XI. 11.

G g g 2

Gooden,

Gooden, Jacobus, V. 19.
Gurdanius, Georgius, X. 18.
de Gottignes, Ægidius Franciscus, IV. 15.
Goulon, XIII. 31.
de Graef, Abrahamus, I. 6. IV. 12.
Grandus, Guido, I. 35. III. 16.
Gravesand, G. J. IV. 12. VIII. 25.
Gray, Joannes, I. 36.
Gregorius à S. Vincentio, I. 35. III. 14.
 Jacobus, IV. 22. VIII. 14. 15.
 David, III. 2. IV. 22. VIII. 15.
 IX. 22. 40.
Griendel von Aach, Johannes Franciscus,
 VIII. 19. XIII. 14. 21.
de Grotte, Alexander, XIII. 7.
Gruber, Bernhardus, X. 37. 38.
 Sebastianus, XII. 25.
Guarinus, X. 27.
Guinée, IV. 11.
Guldinus, Paulus, III. 18. IV. 8.
Gulielminus, Dominicus, I. 40. VII. 11.
 15. XI. 26.

H.

H *Adley*, J. VIII. 15.
 Halfpenny, Guilielmus, XI. 22.
Halley, Edmundus, III. 13. 28. IV. 12.
 IX. 3. 7.
du Hamel, Johannes Baptista, IX. 39.
Hanke, Johannes, IX. 43.
Hartmannus, XIII. 26.
Harriot, Thomas, IV. 5.
Harris, J. I. 18. IV. 6.
Harsdörffer, Philippus, I. 42.
Hartsaker, Nicolaus, VIII. 9.
Hafius, Johannes Matthias, III. 37. XIII. 33.
Hansen, Christianus Augustus, III. 16.
Hawney, Wilhelmus, V. 18.
Hayes, Carolus, IV. 24.
Hazan, Isaacus, IX. 25.
Heer, Christophorus, XIII. 14. 30.
Heidenmann, Christophorus, XIII. 14.
Henrichius, Georgius, II. 10. IV. 3.
ab Herberstein, Ferdinandus Ernestus Co-
 mes, III. 26.
Herigoni, Petrus, I. 1. II. 12. III. 2. VIII. 1.

Herlinus, Christianus, III. 4.
 Ludovicus Andreas, XIII. 11.
Hermannus, Jacobus, 3. VI. 17.
 VII. 11. 15.
Heron Alexandrinus, I. 30. VII. 16.
Hertel, Christianus Gottlieb, VIII. 18.
Herward ab Hohenburg, Johannes Geo-
 rgius, II. 18.
Hevelius, Johannes, XI. 1. 31. 35. 39.
Hipparchus, IX. 1. 32. X. 2.
de la Hire, Philippus, III. 14. 15. 33.
 IV. 11. VI. 10. VII. 19. IX. 6. 30.
 43. 44. X. 28.

*Histoire de l'Académie Royale des Scien-
 ces*, I. 37.
Hodgson, Jacobus, X. 15.
Hook, Robertus, VIII. 19. IX. 3.
Horocius, Jeremias, IX. 4. 17. 39.
Horrebowius, Petrus, IX. 41. 50. 51. 54.
Hortensius, Martinus, V. 6.
de l'Hospital, Marchio, IV. 11. 19. 20. 23.
 39. VI. 12.

Hofius, I. 29.
Hugenius, Christianus, I. 31. 35. III. 14.
 20. 25. IV. 6. 14. VI. 5. 7. 8. 12. 24.
 VIII. 8. 13. 18. IX. 39. 48. X. 21.
Hulsius, Levinus, III. 39.
Hyde, Thomas, IX. 32.

I.

I *Acquier*, Franciscus, VI. 16.
 Intieri, Bartholomæus, IV. 37.
Joannes de Sacro Bosco, I. 24. IX. 24. X. 9.
Joannes Peccamus, VIII. 4.
Jones, Wilhelmus, IV. 21. 30. 32. 34.
Jordanus, II. 3.
Isaacus Monachus, X. 2.
Julius Africanus, I. 30.
Jungnickel, Andreas, VI. 2.
Jurin, Jacobus, X. 12.

K.

K *Eill*, Joannes, III. 8. IV. 34. 35. 36.
 VI. 9. 12. 23. X. 18.
Keplerus, Joannes, III. 12. V. 10. VII. 3.
 VIII. 6. IX. 16. 17. 18. 27. 32. 39. 40. 55.
Kersey, Joannes, IV. 9.
Kinck,

Kinckhuysen, Gerhardus, IV. 12.
Kircherus, Athanasius, I. 2. III. 40. VIII. 16.
Klunnius, Joannes Albertus, IX. 44.
Kolbans, Joannes Christophorus, VIII. 17.
Kresa, Jacobus, V. 22.

L.

de *L Agny*, I. 37.
Lalovera, Antonius, III. 26.
Lambion, Lambertus, XIII. 30.
Lamy, Bernhardus, III. 6. IV. 10. VI. 2.
 VII. 5. VIII. 21.

Landsbergius, J. H. XIII. 12.
Langhansen, Christophorus, IX. 43.
Langley, Batty, III. 36. XI. 29.
 de *Lanis*, Franciscus Tertius, VII. 4.
Lansbergius, Philippus, I. 26. V. 7. IX.
 13. 16. 17. 28.

Lauterbach, Joannes Balthasar, XI. 14.
van Leeuwenhoek, Antonius, VIII. 19.
Leibnitius, Godofredus Guilielmus, I. 11.
 12. 21. 34. II. 15. IV. 10. 20. 22. 23. 31.
 33. 34. 35. IX. 16.

Leotaudus, Vincentius, II. 12.
Leupoldus, Jacobus, VI. 20. VII. 19.
Leutmannus, Joannes Georgius, IV. 26.
 VIII. 18.

Leyborn, Wilhelmus, I. 5.
Liebknecht, J. G. X. 13.
Limpergh, Petrus, VI. 23.
Longomontanus, Christianus Severinus,
 IV. 14. 16. 27.

Lorenzini, Laurentius, III. 22.
Lorinus, Bonajutus, XIII. 19.
 de *Lorme*, Philibertus, XI. 24.
Lorthorp, Joannes, I. 36.
Lucas Paciulus de Burgo S. Sepulchri, II.
 6. IV. 3.

Ludovicus, Ferrariensis, IV. 3.
Ludolphus à Ceulen, III. 21.

M.

Mac Laurin, Colinus, IV. 37.
Massejus, Scipio, XI. 17.
Maginus, Joannes Antonius, IX. 55.
 le *Maitre*, Alexander Christianus, XIII. 20.
 de *Malefieux*, III. 6.

Mallet, Allain Maneffon, III. 30. XIII. 28.
Mansfredi, Eustachius, I. 40. IX. 52. 53.
 56. X. 7.

Gabriel, I. 40. IV. 20.

Maphæus, Thomas Pius, X. 7.

Maraldus, IX. 6.

de *Marchettis*, Angelus, III. 7. 27.

Marinonius, Joannes Jacobus, VIII. 13.

Mariottus, I. 31. VI. 11. VII. 2. 10. 19.
 VIII. 13.

Marolois, XIII. 27.

de *Martino*, Nicolaus, III. 16.

Martius, Georgius Conradus, XIII. 25.

Maurolycus, Franciscus, I. 32. II. 9. VII. 14.

de *Maupertuis*, IX. 25. 39.

S. Maximus Martyr, X. 2.

de *Medrano*, Don Sebastian Fernandez,
 XIII. 24.

Megerlinus, Petrus, IX. 41.

Melder, Gerhardus, XIII. 1.

Menechmus, IV. 8.

Menelaus, VII. 14.

Mercator, Nicolaus, I. 5. IV. 21. IX. 23. 27.

Mersennus, Marinus, I. 31. 37. VII. 14.

Merius, Adrianus, II. 14. III. 34. X. 39.

Meyer, Cornelius, IX. 26.

Mezzavacca, IX. 56.

Michaëlis, Georgius, X. 32.

Mieth, Michael, XII. 2.

Nilnes, Jacobus, III. 14.

Miscellanea Berolinensia, I. 38.

Mastlinus, Michaël, IX. 2. 24.

de *Moirve*, Abrahamus, IV. 14. 29.

Molerus, Elias, IX. 43.

Molyneux, Wilhelmus, VIII. 8.

de *Monmort*, Remundus, IV. 14.

Moore, Jonas, I. 3.

Morinus, Johannes Baptista, IX. 27. 58.

Morlandus, Samuel, II. 15.

Motte, Benjaminus, I. 36.

Muet, XI. 15.

Müller, Johannes Ulricus, X. 32.

Münsterus, Sebastianus, X. 8. 29.

Mubammedes Tixinus, IX. 32.

van *Masschenbroek*, Petrus, X. 23.

G g g 3 *Mydor*.

Mydorgius, Claudius, III. 14. VII. 14.
N.

N*Eperus*, Joannes, II. 18. V. 8. 14.
Neubauer, Christianus, XIII. 8.

Newton, Joannes, V. 13. IX. 20. 28.

Newton, Isaacus, I. 34. IV. 12. 16. 18. 20.

21. 22. 23. 26. 27. 30. 35. VI. 13. VII.

6. 11. VIII. 12. 15. IX. 16. 40. X. 6.

Nicéron, Joannes Franciscus, VIII. 22.

Nicomachus, II. 1. 6.

Nieuventys, Bernhardus, IV. 33.

Noël, Franciscus, IX. 9. 22.

Norwood, Richardus, V. 17.

O.

de **O***Merique*, Hugo, IV. 16.

Ori, Rabbi, X. 8.

Origanus, David, IX. 55.

de *l'Orme*, Philibertus, XI. 2. 6.

Oswaldus, Erasmus, IX. 10.

Otho, L. Valentinus, V. 4.

Oughtredus, Guilielmus, I. 27. IV. 4. V.

16. VI. 2. 26. VII. 1.

Ozanam, I. 7. 17. 33. 43. III. 15. 39. 33.

IV. 10. 11. V. 20. 21. XIII. 24.

P.

de **P***agan*, Comes, III. 23. IX. 19. 28.

XIII. 2. 17. 27.

Palladius, Andreas, XI. 4. 5. 9. 10.

Palma, Johannes Baptista, III. 26.

Pappus Alexandrinus, I. 34. III. 13. 17.

28. 29. IV. 1. VI. 1. VII. 14.

Pardies, Ignatius Gaston, III. 6. VI. 2. 11.

X. 36.

Parent, VI. 11.

Pascal, III. 14. IV. 14.

Paschalius, Julius, VI. 20.

Patoun, Archibaldus, X. 17.

Peletarius, Jacobus, III. 2.

Pemberton, Henricus, IV. 16. 27. 30.

Pena, Joannes, VIII. 1. 6.

Perrault, I. 37. VI. 3. 6. 24. XI. 2.

Petavius, Dionysius, X. 2. 5.

Philander, Guilielmus, XI. 1.

Philo, I. 30.

Philosophical Transactions, I. 36.

Picardus, I. 31. VII. 10. 19. X. 24. 28.

Pitiscus, Bartholomæus, V. 3. 5.

Pivot, X. 21.

Polenus, Joannes, II. 15. VI. 13. IX. 40.

Polynier, Petrus, III. 7.

Porphyrius, I. 34.

Porta, Joannes Baptista, VIII. 6.

Portius, Lucas Antonius, VII. 16.

Post, Petrus, XI. 16.

Preſtet, Joannes, IV. 9. 10.

Pfellus, II. 2.

Peolomans, Claudius, I. 34. V. 1. IX. 2.

10. 11. 32. 58. X. 9.

Purbachius, Georgius, V. 7. IX. 2. 11. 24. 25.

Puzzo, Andreas, VIII. 24.

Q.

Q*uadrus*, Joannes Ludovicus, X. 38.

Quartaironius, Dominicus, X. 7.

R.

R*abuel*, Claudius, IV. 7.

de *Ramellis*, Augustinus, VI. 2.

Ramus, Petrus, III. 5. VII. 14.

Ranzovius, Henricus, IX. 58.

Raphſon, Joſephus, IV. 12. 35.

de *Rees*, K. F., II. 14.

Regiomontanus, Joannes, V. 2. 14. IX. 2.

11. 24. 25.

Reidius, I. 56.

Reinholdus, Erasmus, III. 38. IX. 26.

Rembold, Johannes Christophorus, VIII. 23.

Renau, X. 21.

Reyherus, Samuel, II. 18.

Reyneau, Carolus, IV. 25.

Reticus, Georgius Joachimus, V. 3. IX. 39.

Rhodius, Ambrosius, VIII. 4.

Riccatius, Jacobus, I. 40.

Ricciolus, Joannes Baptista, IX. 5. 22. 28.

32. 39. X. 4. 10. 11.

Riccius, Michaël Angelus, IV. 21.

Richardus, Claudius, III. 13.

Richerus, I. 37.

Rimpler, Georgius, XIII. 10. & ſeqq.

Rifnerus, Fridericus, VIII. 2. 3.

Rivius, Gualterus H., XI. 2.

Rizettus, Joannes, I. 40.

Rober-

Robervallius, Aegidius Personerus, I. 31.
37. IV. 8.
Robins, Benjamin, VII. 12.
Romerus, Claus, I. 37. VII. 10. IX. 50.
51. 54.
Robault, Jacobus, VI. 2.
Rolle, IV. 13.
Romanus, Adrianus, I. 25.
Ronayne, IV. 32.
Rondelli, Geminianus, V. 15.
Rosetti, Donatus, XIII. 7. 20.
de Rossi, Dominicus, XI. 12.
Rostius, Joannes Ludovicus, IX. 45.
Rothmannus, Christophorus, IX. 2.
Rozard, XIII. 23.
Rudolphus, Christophorus, IV. 3.
Ruggieri, Ferdinandus, XI. 20.
de Rufenstein, Henricus Rufus Baro,
XIII. 3.

S.
Saccherius, Hieronymus, III. 9.
de Saint Julien, Chevalier, XII. 5. 7.
XIII. 24. 27.
Salmasius, Claudius, XI. 1.
Santini, Vincentius, III. 16.
Sardius, XIII. 27.
Scaliger, Josephus, I. 24. X. 1.
Scamozzi, Vincentius, XI. 8. 9.
Scarlet, Eduardus, VIII. 15.
Scheffele, Michaël, III. 39.
Scheinerus, Christophorus, VIII. 11. IX. 39.
Scheiter, Joannes Bernhardus, XIII. 8. 27.
Schenbelius, Joannes, III. 3.
Schenbler, Joannes Jacobus, X. 34.
Schickardus, Wilhelmus, IX. 2. 35.
Schildknecht, Wendelinus, XIII. 16.
Schmidius, Joannes Andreas, III. 6.
Schonerus, Joannes, III. 5. V. 2. IX. 25.
35. 37. 46. 58.
Andreas, IX. 46.
à Schooten, Franciscus, III. 25. IV. 6. 7. 14.
Schottus, Casparus, I. 2. 41. II. 12. III.
40. VI. 28. 29. VII. 16. IX. 48.
Schreckenfuchsius, Erasmus Oswaldus, IX. 24.

Schvventerus, Daniel, I. 42. III. 31.
Schyrlaus de Rheita, Antonius Maria, IX. 42.
Scipio Ferreus, IV. 5.
Severus, III. 13.
Sererius, Josephus, I. 13. 20.
Serlius, Sebastianus, XI. 4.
le Seur, Thomas, VI. 16.
Seyler, Joannes Christianus, XI. 9.
Sharpins, Abrahamus, III. 35. IX. 7.
Simenovitz, Casimirus, XII. 1.
Slusius, Renatus, IV. 8.
Smith, Jacobus, XI. 2. 3.
Robertus, IV. 30. VIII. 26.
Snellius, Willebrordus, I. 1. III. 21. V. 6.
VII. 7. IX. 2. 19. 23.
Speckle, Daniel, XIII. 13.
Stadius, Joannes, IX. 55.
Stengel, Johannes Peterfon, X. 32.
Stephanus de Angelis, III. 24.
Stevinus, Simon, I. 23. VI. 1. 3. VII. 14.
Stifelinus, Michaël, II. 7. IV. 3. V. 14.
Stirling, Jacobus, IV. 26. 28.
Stone, Edmondus, IV. 19.
Srada, Jacobus, VI. 20. XI. 4.
Strauchius, Aegidius, IX. 35. X. 5.
Streete, Carolus, IX. 28.
Thomas, IX. 20.
Sturmius, Joannes Christophorus, I. 9.
III. 11. X. 30. XIII. 22.
Sturmius, Leonhardus Christophorus, I.
10. III. 38. VII. 19. X. 73. XI. 7.
II. 21. XIII. 5. 10. 27.

Sully, Henricus, VI. 27.
Survirey de St. Remy, XII. 3.
Sutherland, Wilhelmus, XI. 28.
Sürtinger, Daniel, XIII. 10.
Svitzer, Stephanus, VII. 16.

T.
Tacquet, Andreas, I. 28. II. 11. III.
2. 11. 33. V. III. 14. IX. 15. 38.
Tartaglia, Nicolaus, II. 8. III. 2.
Tatius, Achilles, X. 2.
Taylor, Jacobus, I. 8.
Brook, IV. 31.
Teyler, Joannes, XIII. 35.
Theo-

Theodosius, I. 1. 4. 24. III. 11. 29. VII. 14.
Torricellius, Evangelista, I. 31. 37. III.
 12. VI. 5.
Traberus, Zacharias, VIII. 16.
Trapezuntius, Georgius, IX. 10.
Trevigar, L. IV. 39.
Trevv, Abdias, III. 32.
de Tschirnhausen, Ehrenfried Waltherus,
 IV. 12.
Tycho de Brahe, IX. 2. 27. 32. 47.

V.
V*Alk*, Gerardus, IX. 37.
Varcinus, Amatus, I. 4.
Varenius, Bernhardus, X. 12.
Varignonius, IV. 19. VI. 3. 4. 14. VII. 11.
de Vauban, Comes, XIII. 5. 17. 23. 26.
 27. 32..
Ubaldu, Guidus, VI. 2. VII. 14.
de la Vergne, Jacobus, XIII. 21.
Veteranus, Simon Laurentius, I. 28.
Victoria, X. 2.
Vieta, Franciscus, I. 1. 24. 25. IV. 4. 9. X. 7.
Vignola, Jacobus Barozzius, XI. 7. 9. 10.
de Ville, Antonius, XIII. 17. 27.
Villemot, Philippus, IX. 16.
Vingboon, Philippus, XI. 16.
Virdungus, Joannes, IX. 25.
Vitalis, Hieronymus, I. 16.
Vitellio, I. 31. VIII. 3.
Vitruvius, XI. 1. 10.
Viviani, Vincentius, I. 33. III. 13. 22. 26.
Placq, Adrianus, V. 11. 21.
Ungb Beigh, IX. 32.
Vogel, Johannes, XI. 23.
Voigrel, Nicolaus, III. 38.
Urinus, Benjamin, V. 9.
Uttenhoeffer, Casparus, X. 34.

W.
W*aller*, Richardus, X. 24.
Wallisus, Joannes, I. 34. II. 12.

IV. 17. 18. VI. 7. 8. VII. 5.
Waltherus, Bernhardus, IX. 2. 25.
Wardus, Joannes, X. 18.
Sethus, V. 16. IX. 18. 19. 20.
Warnerus, Waltherus, IV. 5.
Weidlerus, Joannes Fridericus, III. 38.
Weigeliu, Ethardus, X. 7. 10.
Weinig, Joannes Christophorus, VII. 2.
Wells, Eduardus, II. 12.
Welperus, Eberhardus, X. 29. 30.
Wernerus, Joannes, IX. 2. 25.
Wertmüller, Johannes Jacobus, XIII. 29.
Whiston, Guilielmus, III. 2. IV. 12. IX.
 23. 28.
Wideburgius, Joannes Bernhardus, IX. 43.
Wilhelm, Joannes, XI. 23.
Wilhelmus, Landgravius Hassiæ, IX. 2.
Willichius, Jodocus, II. 2.
Wilson, Henricus, III. 33. V. 16. X. 16.
Wing, Vincentius, IX. 2. 20.
de Witt, Joannes, IV. 6. IX. 38.
Wolfius, Christianus, I. 11. II. 13. III.
 10. VII. 7.

Jeremias, XI. 21.
Wormbser, David, XIII. 19.
Wotton, Henricus, XI. 1.
Wren, Christophorus, VI. 7.
Wurstisus, Christianus, IX. 24.
a Wurtzelbauer, Joannes Philippus, IX. 49.
 X.

X*ylander*, Guilielmus, II. 2. I. V. 2. 3.

Z.
Z*Abn*, Joannes, VIII. 16.
Zanottus, Franciscus Maria, I. 40.
a Zesen, Philippus, XIII. 28.
Zimmermann, Joannes Jacobus, IX. 29.
 41. 43.
Zumbach de Kæsfeld, Lotharius, IX. 36.
van Zyl, Joannes, IV. 23.

FINIS INDICIS TERTII.

IV. IN-



IV.

I N D E X

R E R U M E T V E R B O R U M

T O M O I.

C O N T E N T O R U M.

Notes velim, literam *c* Commentationem de methodo mathematica, *a* Arithmeticam, *g* Geometriam, *t* Trigonometriam planam, *f* Analysin finitorum, *i* Analysin infinitorum; & numeros §§. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime præcedentem.

A.

A Baci Pythagorici constructio, a. 109.
necessitas, 110.

Abscissa, f. 37.

Additio. Definitio, a. 61. quomodo ab-
solvatur, 96. 98. in numeris concretis,
99. examen, 101. 107. hujus funda-
mentum, 103. signum, 63. quomodo
addiscatur, 97.

Additio iterata ejusdem numeri quid sit,
a. 62.

Equalitas. Definitio, a. 15. signum, 18.
19. unde colligatur, 87. 88. 91. 93.
94. 175. 176. 177.

Equalitas angularum unde colligatur,
g. 167.

Equatio. Definitio, f. 133. natura expli-
cata, 329. reductio per analogias, 259.
266. 268. 289. transformatio in aliam,
354. in locales resolutione, 620.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Equatio algebraica quænam dicatur,
f. 378.

Equatio biquadratica quomodo constru-
atur, 616. & seqq. 622. quomodo resol-
vatur, 362. quomodo ad cubicam re-
ducatur, 361.

Equatio Circulorum superiorum generalis,
517.

Equatio Cissoidis, 548.

Conchoidis, 518.

Equatio cubica. Definitio, 139. quomo-
do resolvatur, 358. quomodo constru-
atur, 607. & seqq. 622.

Equatio Ellipsis, 420. 431. 432. 454.
evolutæ quomodo inveniatur,
i. 321.


exponentialis. Definitio, 270.

Equatio hyperbolæ respectu axis, f. 459. &
seqq. 534. intra asymptotos, 488. 490.
respectu diametri, 500. 502.

H h h

Equatio

Æquatio hyperbolarum infinitarum, f. 425.
Æquatio parabolæ externæ, 419. *internæ* respectu axis, 388. respectu diametri, 416.
Æquatio parabolarum infinitarum, 519.
Æquatio simplex. Definitio, 138. constructio geometrica, 252.
Æquatio quadratica. Definitio, 139. constructio geometrica, 253. reductio ad inventionem linearum reciprocarum, 263. 265.
Æquationum superiorum constructio geometrica, 605. & seqq.
Æquemultiplicium proportio, a. 219.
ex Æquo proportionalia, 194. 198.
Aggregatum. Definitio, 61.
Algebra. Definitio, f. 132. applicatio ad problemata arithmetica determinata, 144. & seqq. indeterminata, 223. & seqq. ad Geometriam elementarem, 250. & seqq. sublimiorem, 367. & seqq. Trigonometriam planam, 316.
Alternatio rationum, a. 173.
Altitudo figuræ. Definitio, g. 115. qualis linea sit, 227.
Altitudo oblongi, 229.
 quadrati, 229.
Altitudo trianguli quomodo inveniatur, 394. quomodo ex lateribus computetur, 287.
Altitudo trianguli rectanguli, 228.
Altitudines, quomodo metiamur, g. 284. & seqq. t. 75. 83.
Anagrammata omnia possibilia detegendi modus, f. 131.
Analysis mathematica. Definitio, f. 1.
Analyseos perfectæ exemplum, a. 84. 85.
Angulus. Definitio, g. 54. quomodo denominetur, 55. describatur, 155. alteri æqualis construat, 208. metiendi modus, 152. bisectio 209. 269. 270. trisectio, f. 629. quantitas a cruribus independens, g. 140. quomodo hæc æstimetur, 58. 59.
Anguli quomodo distinguantur, g. 58.

quomodo in figura rectilinea per calculum eruuntur, t. 54.
Angulorum æqualitas unde  gatur, g. 141. 142.
Angulorum æqualium quales sint mensuræ, ibid.
Angulorum circa idem punctum constitutorum ratio ad rectum, 159. 160.
Angulorum congruentia, 166.
 similium ratio, 174.
Angulus acutus. Definitio, g. 66. relatio ad rectum, 146.
Anguli alterni. Definitio, g. 68. ratio intra parallelas, 233.
Anguli contigui. Definitio, g. 60.
Angulus contactus. Definitio, 76. qualis sit, 305. 306.
Angulus deinceps positus. Definitio, 62. qualis sit, 63. 64. quando in campo eum metiri teneamur, 150. 151.
Angulorum deinceps positorum ratio ad rectum, 147. quotiædem sint graduum, 148.
Angulus ad centrum. Definitio, g. 72. qualis sit, 73. ratio ad angulum ad peripheriam, 313.
Angulus extra centrum. Definitio, 74. 75. mensura, 315.
Anguli homologi. Definitio, g. 110.
Angulus obliquus. Definitio, 66.
Angulus obtusus. Definitio, 66. relatio ad rectum, 146.
Angulorum obtusorum sinus, t. 6.
Anguli oppositi. Definitio, g. 69.
 oppositus externus, ibid.
 internus, ibid.
Angulus ad peripheriam. Definitio, g. 70. Mensura, 314.
Anguli ad peripheriam quando æquales, 315.
Angulorum in polygono summa quomodo inveniatur, 343.
Angulorum in polygono regulari quantitates, 345. quomodo inveniuntur, 344. 349.
Angulus segmenti. Definitio, g. 77.
Anguli majoris segmenti mensura, 323.
 Anguli

Anguli minoris segmenti mensura, g. 322.
Angulus in segmento. Definitio, g. 70.
Angulus in maiore segmento qualis, 318.
 ratio ad angulum maioris segmenti, 323.
Angulus in minore segmento qualis, 319. ratio
 ad angulum minoris segmenti, 323.
Angulus in semicirculo qualis, 317.
Angulus rectus. Definitio, g. 65. mensura
 qualis, 143. 144.
Anguli recti quando æquales, 145.
Angulus solidus. Definitio, 445. 448. prop-
 rietates, 446. & seqq. æqualitas, 449.
 similitudo, 451. magnitudo, 452.
Anguli verticales. Definitio, g. 67. ratio
 ad se invicem, 156.
Annulli area quomodo inveniatur, 433.
Antecedens rationis, a. 126.
Antilogarithmus, t. 31.
Arcus. Definitio, g. 41. quomodo bise-
 cetur, 293. perficiatur, 295. trisegetur,
 f. 629. per datum numerum multiplice-
 tur, 326. in communi mensura per cal-
 culum inveniatur, t. 49.
Arcuum ichnographiæ quomodo perficien-
 dæ, g. 365. & seqq.
Area curvæ elementum, i. 99.
Arithmetica. Definitio, a. 1.
Arithmetica practica. Definitio, a. 1. an sit
 methodus inveniendi, 2.
Arithmetica infinitorum. Definitio, i. 333.
 usus in Geometria, 348. & seqq.
Arithmetica irrationalium. f. 59. & seqq.
Arithmetica speciosa. Definitio, f. 2.
Arithmetice proportionalia. Definitio, a.
 323. proprietates, 324. & seqq.
Artis characteristica præstantia, a. 52.
Artis inveniendi regulæ ab Algorithmis ab-
 stractæ, a. 125.
Asymptotus Cissoïdis, f. 549.
 Conchoidis, 537.
Asymptoti Hyperbolæ. Definitio, 474.
Asymptoti curvarum algebraicarum quo-
 modo determinentur, t. 46.
Atramentum in Geometria practica quale
 commendandum, g. 124.

Axioma. Definitio, c. 30. quænam propo-
 sitiones in hunc numerum referantur,
 31. abusus circa ea vitandus, 32. quo-
 modo numerus minuatur, 33. quænam
 cum axiomatis confundantur, 34.

Axiomata mathematica, a. 81.

Axis conjugatus. Definitio, f. 461.

Axis sphaeræ, g. 470.

Axis transversus. Definitio, f. 459.

B.

B*Aculi* quomodo in linea recta terræ
 insigantur, g. 125.

Basis figuræ. Definitio, 112. 113.

Binomium quomodo ad dignitatem quam-
 cunque evehendum, f. 95. & seqq.

Biquadratum. Definitio, a. 252.

C.

C*alculus differentialis*. Definitio, i. 1.
 regulæ, 10. & seqq. usus in deter-
 minandis tangentibus, 20. & seqq. in
 determinandis maximis & minimis, 61.
 & seqq.

Calculus differentio-differentialis. Definitio,
 i. 293. usus in determinandis evolutis
 curvarum & radio osculi, 313. & seqq.
 item puncto flexus contrarii, 301. &
 seqq.

Calculus exponentialis. Definitio, i. 263.
 regulæ, 266. 267. usus, 271. & seqq.

Calculus integralis. Definitio, i. 91. usus
 in quadrandis curvis, 97. & seqq. in re-
 ctificatione curvarum, 143. & seqq. in
 cubandis solidis, 196. & seqq. in doctrina
 Logarithmorum, 255. in methodo
 tangentium inversa, 72. & seqq.

Calculus literalis in integris, f. 27. & seqq.
 in fractis, 41. & seqq. pro potentiis, 54.
 & seqq. usus in inveniendis theorema-
 tis, 72. & seqq.

Calculus potenciarum, f. 54. & seqq.

Calculus summatorius. Definitio, i. 91.

Calculi universalis idea, a. 95.

Cathetus. Definitio, g. 96.

Centrum. Definitio, g. 37.

Centrum Hyperbolæ. Definitio, f. 461.

H h h 2

Gen.

- Centrum sphaerae*, g. 470.
- Chorda*. Definitio, g. 38. quamnam maxima, 299. quomodo ex arcu inveniatur, 171. quomodo ex alia Chorda data, i. 184.
- Chordarum proprietates*, f. 320. & seqq. relatio ad se invicem, g. 301. in circulo ductarum proprietates & symptomata, 289. 290. 291. 292. 298. 312. se mutuo secantium proprietates, 334. 381.
- Chorda arcus dimidii* quomodo invenitur, g. 423.
- Chordae arcuum multiploarum* quomodo inveniuntur, f. 326.
- Circinus* qualis esse debeat, g. 133.
- Circulus*. Definitio, g. 37. descriptio, 131. 132. 294. per quam determinetur, 294. quando alterum secet, 197.
- Circuli ad triangulum sibi aequale* reductio, g. 410. subtangens, i. 23. subnormalis quomodo determinetur, 38. rectificatio, 153. 157. 158. quadratura, 124. area quomodo. inveniatur, g. 429. & seqq.
- Circulo* quomodo quadratum circumscribatur, g. 351. quomodo polygonum regulare, 335.
- Circuli concentrici*. Definitio, g. 44. symptomata, 137.
- Circuli eccentrici*. Definitio, g. 44. quanam sint, 49. 287. 288.
- Circuli se extus tangentes* quales sint, g. 49.
- Circuli se intus tangentes* quales sint, 287.
- Circuli se mutuo secantes* quales sint, 288.
- Circuli superiorum generum*. Definitio, f. 516. aequatio, 517.
- Circulorum aequalitas* unde colligatur, g. 171.
- Circulorum congruentia* unde colligatur, g. 164. 296.
- Circulorum ratio* ad se invicem, 409. 412.
- Circulorum sectio*, 203.
- symptomata, 287. & seqq.
- Circulorum infinitorum* maxima applicata,
- i. 65. subtangens, 24. subnormalis, 39.
- Cissois Dioclis*. Definitio, f. 571. aequatio, 548. genus, 550. proprietates, 545. & seqq. subtangens, i. 31. subnormalis, 43. quadratura, 133.
- Citationum* usus in demonstrando, c. 44.
- Combinationes* omnes possibiles quomodo inveniuntur, f. 220.
- Combinationum* numerus quomodo inveniatur, 219.
- Commensurabilia*. Definitio, a. 31. quanam sint, 160. ratio ad se invicem, 163. 164. rationis exponens, 166.
- Communicantia irrationalia*, f. 61.
- Complementum ad totum* quid dicatur, a. 9.
- Compositio* rationum, 190.
- Compraesentia* quid significet, 27.
- Conchilis*, f. 535.
- Conchois Nicomedis prima & secunda*. Definitio, f. 535. aequatio, 538. proprietates, 536. 537. punctum flexus contrarii, i. 310. quadratura, 138. subtangens, 49. subnormalis, 49.
- Conchoidum* species, f. 540. 543.
- Conchoides infinitae*, 541.
- Congruentia* Definitio, g. 3. quid sit, 161.
- Congruentia* angulorum, 166. linearum, 163. magnitudinum, 162.
- Conoides parabolicum* quomodo cubetur, i. 201. 214. 352. quomodo superficies ejus complanetur, 223.
- Conoidis hyperbolici* cubatio, i. 208. 209.
- Conus*. Definitio, g. 467. proprietas, 468. constructio, 523. ad prisma reductio, 547. quomodo soliditas inveniatur & superficies, g. 548. i. 199. 220. 352. quomodo superficies ad triangulum, g. 519. ad sectorem reducat, 520.
- Conus rectus*. Definitio, g. 467.
- scalenus. Definitio, g. ibid.
- Coni truncati* constructio, 524. soliditas & superficies computanda, 549.
- Coni superiorum generum*. Definitio, f. 527.
- Conorum* aequalitas unde colligatur, g. 542. ratio ad se invicem, 572. & seqq.

Cono-

Conorum aequalium proprietates, g. 580. quinam maiorem superficiem habeat, i. 87.
Conorum similitudinum ratio, 570. 578.
Consequens rationis terminus, a. 126.
Contraharmonice proportionalium inventio, f. 194. 195.
Convergentia linearum. Definitio, g. 83. proprietates, 262.
Conversio rationum, a. 193.
Corollarium. Definitio, c. 49. quando demonstratione indigeat, 50.
Corpora Platonica, g. 454.
Corpus. Definitio, g. 444. quomodo construatur, 529. quomodo soliditas invenitur, 559.
Corporis cavi soliditas quomodo invenitur, g. 563.
Corpus irregulare. Definitio, 453. quomodo soliditas invenitur, 559. 561.
Corpus regulare. Definitio, 453. proprietates, 455. quomodo soliditas ac superficies invenitur, 558. & seqq. quomodo hæc corpora construuntur, 525. & seqq. quot eorum sint, 530.
Corporum similium proprietates, g. 565. & seqq. ratio inter se, 578. f. 128.
Cossecans. Definitio, t. 11.
Cosinus. Definitio, t. 11. quomodo invenitur, 16. angulorum multiplo- rum quomodo invenitur, f. 325.
Cotangens. Definitio, t. 11.
Crus anguli. Definitio, g. 54.
Cubatio solidorum rotatione genitorum, i. 197.
Cubus, cubicus numerus. Definitio, a. 248. logarithmus qualis, 339. quomodo in progressionem arithmeticam resolvatur, f. 171.
Cubicorum numerorum in serie naturali progressionem differentiarum, f. 84. summatio, 200.
Cubocubus, a. 252.
Cubus cubi, ibid.
Cubocubocubus, ibid.
Cubus, solidum. Definitio, g. 459. pro-

prietates g. 460. 461. quale corpus, 530. constructio, 513. quomodo superficies & soliditas invenitur, 511. 512. quomodo dato corpori æqualis invenitur, 576. parallelepipedo æqualis construat- ur, f. 628.
Cubi duplicatio, f. 615.
Cuborum ratio inter se qualis, g. 534.
Cubi diametri ad sphaeram ratio, 552.
Curva. Definitio, g. 22. quadratura, i. 100. & seqq.
Curva algebraica. Definitio, f. 377. divi- sio, 381. 382. quomodo natura inve- stigetur, 579. & seqq. puncta quotcun- que inveniantur, 631.
Curvarum algebraicarum æquatio genera- lis, f. 385. subtangens, i. 32.
Curva primi, secundi, tertii &c. generis. Definitio, f. 381.
Curva ex evolutione descripta, i. 313.
Curva exponentialis. Definitio, i. 269. constructio, 268. quadratura, 285. sub- tangens, 271. & seqq. subnormalis quo- modo invenitur, 283.
Curva mechanica. Definitio, f. 381.
Curva normalis constantis, i. 235. subnormalis constantis, 227. subtangens constantis, 242. tangentis constantis, 250.
Curva transcendens. Definitio, f. 380.
Cyclois. Definitio, f. 573. proprietates, f. 574. & seqq. quadratura, i. 131. 132. 182. rectificatio, 168. subtangens, 52. circulus eam osculans, 328. sui evolu- tionem seipsam describit, 330.
Cyclois punctum flexus contrarii habens, 304.
Cylindrus. Definitio, g. 465. constructio, 518. quomodo superficies & soliditas invenitur, 541. superficiei ad paral- logrammum reductio, 516.
Cylindrorum æqualitas unde colligatur, 535. ratio inter se, 572. & seqq.
Cylindrorum aequalium proprietates, 580. similitudinum ratio, 570. 578.

Cylindrus rectus, g. 465.

scalenus, 465.

D.

D*Ecagoni regularis circulo inscribendi*
latus quomodo inveniat, f. 275.

Definitio quid sit, c. 13. quomodo dividatur, 16. quotuplici modo consideretur, 30.

Definitiones superflue num dentur in Mathesi, 56.

Definitio nominalis quænam sit, c. 17. quomodo ad eam perveniat, 19. & seqq. quomodo realitas demonstratur, 23. 24.

Definitio realis quænam sit, 18. quomodo inveniat, 25. & seqq. quomodo possibilitas demonstratur, 29.

Demonstratio quam habere debeat formam, c. 46. 47. quænam circa eam observanda, 39. & seqq.

Demonstrationes quomodo tyronibus facilitentur, g. 158. num superflue dentur in Mathesi, c. 56.

Denominator rationis. *Definitio*, a. 36. f. 113. num. 117. & quando cum exponente idem, 115.

Determinari eodem modo quænam dicantur, g. 119.

Diagonalis. *Definitio*, g. 111. in quadrato quomodo se habeat ad latus, 421. in polygono quocunque quomodo omnis inveniat per calculum, t. 51. 53.

Diameter circuli. *Definitio*, g. 39. quomodo circumulum dividat, 135. quomodo inveniat, 328. 434. quam rationem ad peripheriam habeat, 413. 414. quomodo inveniat, 425. quanta sit, 426. 427.

Diameter curvæ. *Definitio*, f. 368. quomodo in Parabola, 414. 415. in Ellipsi, 449. 450. 452. in Hyperbola determinetur, 492. 493.

Diameter conjugata. *Definitio*, f. 374. *transversa*. *Definitio*, f. 373.

Differentia. *Definitio*, a. 64.

Differentiales, t. 31.

Differentiale. *Definitio*, i. 6. signum, 81. gradus, 296. quomodo integretur, 95. quomodo denuo differtietur, 267. & seqq.

Differentiale areæ. *Definitio*, i. 97. arcus, 144.

Differentiale exponentiale quomodo integretur, i. 267.

Digitus. *Definitio*, g. 25.

cubicus, *Definitio*, g. 477.

quadratus. *Definitio*, g. 118.

Dignitas. *Definitio*, a. 250. gradus, 252. signa, 254.

Dissimilitudo. *Definitio*, a. 24.

Distantia. *Definitio*, g. 15. exemplum, 16. puncti a linea & plano, 225. puncti a puncto in plano 192. punctorum peripheriæ a centro circuli, 193.

Distantiæ locorum quomodo inveniantur, g. 194. 195. 228. & seqq. t. 56. 65. 74.

Divergentia linearum. *Definitio*, g. 83. proprietates, 161.

Dividendus. *Definitio*, a. 69.

Diviso. *Definitio*, a. 69. signum, 71. exan en, 124. regulæ, 117. 119. 120.

Divisio ejusdem per majus & minus, 202. majoris & minoris per idem, 182.

Divisio rationum, 193.

Divisor. *Definitio*, 69.

Dodecaëdron. *Definitio*, g. 475. constructio, 528. quale corpus, 530. quomodo sphaeræ inscribatur, f. 310. quomodo latus sphaeræ inscribendi inveniat, 308. hujus ratio ad radium, 314.

Dolii soliditatem in mensura fluidorum reperire, g. 588. & seqq.

DURERI curvæ fornicum qualis sit, f. 601. E.

E*fficientes*. *Definitio*, a. 66.

Elementum areæ, i. 98.

lineæ curvæ, 144.

solidi rotatione geniti, 197.

superficie ejusdem, 219.

Ellipsis. *Definitio*, f. 410. descriptio, 426. 435. 436. 515. 594. 598. 600. proprietates,

tates,

ates, f. 421. & seqq. quod sit sectio conica, 57. maxima applicata, i. 66. osculator, 61. plus, 325. quadratura, 126. & seqq. rectificatio, 172. subtangens, 25.

Ellipsis Apolloniana, f. 522.

Ellipses infinitæ. Definitio, f. 522. maxima applicata, i. 66. subnormalis, 40. subtangens, 26.

Elliptoides. Definitio, f. 522. cubicales, ibid. biquadraticæ, ibid.

Epicyclois. Definitio, f. 576. superior, ibid. inferior, ibid.

Error in metiendis altitudinibus admissus quomodo æstimetur, t. 76. & seqq. in metiendis distantis admissus quomodo æstimandus, 58. & seqq. 66. & seqq.

Evoluta, i. 313.

Examen quomodo differat a demonstratione, a. 102.

Examen additionis, a. 101. & seqq. subtractionis, 106. 107. multiplicationis, 122. divisionis, 124. extractionis radicum, 289. angulorum rite dimensionum, g. 151.

Experientia quid sit, c. 34. ejus objectum, 35. quomodo Mathematici circa eam versentur, 36. 37.

Exponens dignitatis. Definitio, a. 251.

Exponens rationis. Definitio, a. 136. quando sit terminus primus, 138. quomodo se habeat ad unitatem, 140. quomodo exprimitur, 141.

Exponens rationis potentiarum qualis sit, 290.

Extensionis notio, g. 2.

Extractio radices quadratæ, a. 269. & seqq.

Extractio radices cubicæ, a. 282. & seqq.

Extractio radices ex dignitate. Definitio, 256.

Extractio radices ex linea recta, g. 331.

Extractio radices ex æquatione quadrati-

ca, f. 143. cubica, 358. biquadratica, 362. quacunque per approximationem, 363. & seqq. ex serie infinita, 366.

Extractio radices indeterminatæ, 98. & seqq. F.

F*actum*. Definitio, a. 66. ex quoto in divisorem, 212.

Facta quales numeri, 211. æqualium factorum, 201. 208.

Facti Logarithmus, 337.

Factores. Definitio, 66.

Factorum & efficientium quando eadem ratio, 178.

Familia curvarum. Definitio, f. 383.

Figura. Definitio, g. 32. 33. in campo designatio, 369.

Figura æquiangula, 105. æquilatera, 88. circulo inscripta, 116. circulo circumscripta, 117. curvilinea, 37.

Figura irregularis. Definitio, 106. constructio, 359. 360. 361.

Figura mixtilinea, 34. multilatera, 104. obliquangula, 97. plana, 36.

Figura polygonæ, 104. quadrilatera, 97.

Figura rectilinea. Definitio, 34. divisio in partes æquales, 441.

Figura regularis. Definitio, 106. proprietates, 348. 401. quomodo circulo inscribatur, 342.

Figura rectangula, 97.

Figura congruentes quales sint, 177.

Figura inter se æquiangulæ, 109. æquilateræ, 108.

Figura similes quales sint, 175. 176. earum ratio, 406. circulo inscriptarum & circumscriptarum ratio, 408.

Fluidi quantitatem in dolio non pleno determinare, 600.

Fluxio. Definitio, i. 6. signum, 9.

Focus. Definitio, f. 325.

Focus Parabola, quomodo inveniatur, f. 396. & *seqq.* proprietates, 418.

Focus Ellipsis quomodo inveniatur, 463. proprietates, 434. 457. 458.

Focus Hyperbola quomodo inveniatur, 463. proprietates, 464. 465. 470. 503. 504.

Fractio. Definitio, a. 38. scriptio, 59. 60. quando integro major, minor, eidem æqualis, 221. quænam major, minor altera, 225. quomodo ad minores terminos reducat, 231. & *seqq.* quomodo ad eandem denominationem, 235. quomodo in aliam datæ denominationis convertatur, 303.

Fractiois Logarithmus quomodo inveniatur, 351. & *seqq.* quomodo valor ad communem mensuram reducat, 304.

Fractioes quænam æquales, a. 225. quod sint rationes, 129.

Fractioinum algorithmus, 236. 237. 239. & *seqq.* 243. identitas unde colligatur, 226. reductio ad alias æquales, 227. in infinitum certa lege decrecentium summa quomodo inveniatur, i. 334.

Fractio decimalis. Definitio, a. 361. scriptio, 306. 364. 365. logarithmus quomodo inveniatur, 366. 368. quomodo alia ad eam reducat, 305.

Fractio decimalis exacta. Definitio, 370.

Fractio decimalis approximans. Definitio, 370.

Fractioinum decimalium algorithmus, 373. & *seqq.*

Fractioes sexagesimales. Definitio, 385. algorithmus, 391. & *seqq.* quomodo scribantur, 387.

Fractio spuria quænam dicatur, 222. quomodo ad integra reducat, 223.

G

Geometria. Definitio, g. 1.

sublimior. Definitio, f. 367.

Geometrice proportionalia quænam dicantur, a. 323.

Gradus. Definitio, g. 41. inæqualitas in circulis inæqualibus, 42.

H.

Harmonica proportio. Definitio, f. 186. *Harmonice proportionum* inventio, 187. & *seqq.*

Helix, f. 569.

Heptagonum. Definitio, g. 104.

Heterogenea quænam sint, a. 32.

Hexædrum. Definitio, g. 475. quomodo sphaeræ inscribatur, f. 304. sphaeræ inscribendi latus quomodo inveniatur, 302. hujus ad sphaeræ semidiametrum ratio, 314.

Hexagonum. Definitio, g. 104.

Hexagonum regulare quomodo construat, 358. quomodo circulo inscribatur, 357.

Homogenea quænam sint, a. 32.

Hyperbola. Definitio, f. 459. descriptio, 471. 472. quod sit sectio conica, 513. quadratura, 7. 120. 123. rectificatio, 175. 179. subtangens, 27. circulus eam osculans, 317. recta ad eam perpendicularis, 74. 75.

Hyperbola intra asymptotos constructio, f. 489. proprietates, 475. & *seqq.* subtangens, i. 29. subnormalis, 42. quadratura, 123.

Hyperbola æquilatera. Definitio, f. 505. proprietates, 506. & *seqq.* descriptio, 531. 532.

Hyperbola Apolloniana quænam dicatur, 425.

Hyperbola infinita. Definitio, f. 425. subtangens, i. 28. quadratura, 118.

Hyperboloides. Definitio, f. 425.

Hypothenusa. Definitio, g. 95.

I.

Ichographia arearum quomodo perficienda, g. 363. & *seqq.*

Icosædrum. Definitio, g. 475. constructio, 527. quale corpus, 530. quomodo sphaeræ inscribatur, f. 311. sphaeræ inscribendi latus quomodo inveniatur, 311. hujus ad semidiametrum sphaeræ ratio, 314.

Inæqua-

Inæqualia. Definitio, a. 15. eorum ad se invicem, 16. 17. 21.

Inclinatio plani ad planum. Definitio, g. 476.

Incommensurabilia. Definitio, a. 31. ratio ad se invicem, 163. 164. quod dentur, g. 422.

In directum situm quid significet, g. 61.

Infiniteſima. Definitio, i. 2.

Inſinitimum quomodo ad dignitatem quamcunque elevetur, f. 102. 103. 104.

Inſiſtere quando angulus dicatur, g. 56.

Inſtrumentum transportatorium quodnam & quale ſit, g. 153. 154.

Inſtrumenti transportatorii rectilinei conſtructio, t. 42. uſus, 43. 44.

Integrorum per fractiones diviſio, a. 245. ad fractiones reductio, 224.

Inverſio rationum, 169.

Irrationalium ad eandem denominationem, f. 59. 146. ad ſimpliciorum expreſſionem reductio, 61. algorithmus, 67. 68. ratio rationalis quomodo inveniat, 64.

Judicium quando & quomodo acuatur ſtudio Matheſeos, t. 53. 54.

L.

L Amellarum Neperianarum conſtructio, a. 113. uſus, 115.

Latus Coni. Definitio, g. 467.

Latus educere ex dignitate quid ſignificet, a. 256.

Latus figuræ. Definitio, g. 35. quomodo quodlibet in figura rectilinea per calculum eruatur, t. 52.

Latus hexagoni regularis quomodo ſe habeat ad radium circuli circumſcripti, g. 356.

Latus numeri polygoni. Definitio, f. 208. quomodo inveniat, 213.

Latus pentagoni regularis quomodo ex data diagonali inveniat, f. 294.

Latus polygoni regularis circumſcripti quomodo ex latere inſcripti inveniat, g. 424.

Wolſii Oper. Mathem. Tom. V.

Latus potentia. Definitio, a. 252.

Latus quadrati parallelogrammo vel triangulo æqualis quomodo inveniat, g. 395.

Latus rectum. Definitio, f. 388.

tranſverſum. Definitio, 459.

Latera homologa quænam dicantur, g. 110.

Latera polygonorum regularium in fractionibus decimalibus radii, g. 47.

Limites æquationis quomodo inveniantur, f. 356.

Linea. Definitio, g. 10. termini, 11. proprietas, 12. 13. uſus, 14. quænam breviffima inter duo puncta, 191.

Linea, pars digiti, 25.

Linea curva. Definitio, g. 23.

Linearum congruentia, 163.

Lineæ convergentes. Definitio, 83. unde convergentia colligatur, 262. 263.

Lineæ divergentes. Definitio, 84. unde divergentia colligatur, 261.

Linea normalis, 78.

obliqua, 80.

Linea parallela. Definitio, g. 81. quomodo alteri ducatur, 258.

Linearum parallelarum ſymptomata, 230. & ſeqq. 238. & ſeqq. 260.

Linea perpendicularis. Definitio, 78. quando ſit, 79. quomodo ducatur.

Linearum proportionalium inventio, g. 271. & ſeqq. 327. 338. duarum mediarum in continua proportionem inventio, f.

624. proprietates, g. 377. 378.

Lineæ reciproca. Definitio, f. 261. quomodo inveniantur, 262. & ſeq.

Linea recta. Definitio, g. 17. differentia ab alia, 18. quomodo gignatur, 19. ducatur, 121. biſecetur, 210. in partes æquales, 274. proportionales dividatur, 275. quomodo media & extrema ratione ſecetur, f. 258. quomodo eam metiamur, g. 126 & ſeqq. quando centro applicata in peripheria terminetur, 173.

Linearum rectarum ſectio qualis ſit, g. 250. congruentia, 168. & ſeqq.

Linea recta ad planum perpendicularis. Definitio, 486.
Linea secantium. Definitio, f. 562. proprietates, 563.
Linea sinuum. Definitio, 560. proprietates, 561.
Linea tangentium. Definitio, 562. proprietates, 563.
Locus geometricus. Definitio, f. 584.
 planus, 585.
 solidus, 585.
 primi, secundi, tertii &c. ordinis, 585.
Locus ad circulum. Definitio, 584. constructio, 589.
Locus ad rectam. Definitio, 584. constructio, 586.
Locus ad ellipsin quomodo construatur, 588.
Locus ad hyperbolam quomodo construatur, 590. 591.
Locus ad parabolam quomodo construatur, 587.
Logarithmica. Definitio, f. 552. proprietates, 554. & seqq. circulus osculator, i. 332. quadratura, 134. & seqq. 274. & seqq. rectificatio, 177. subnormalis, 280. subtangens, 54. 243.
Logarithmi. Definitio, a. 334. proprietates, 337. & seqq. quomodo fuerint computati, 346. quomodo in Logarithmica, f. 555. in Hyperbola, i. 256. per arcus tractorie represententur, 253. quomodo inveniuntur, 255. quomodo eisdem respondentes numeri inveniuntur, 260. differentiale quomodo integretur, 266.
Logarithmorum Canonis constructio, a. 346.
Logarithmus hyperbolicus binarii, i. 257.
Logarithmus secantis quomodo inveniatur, t. 30.
Logarithmus sinus quomodo inveniatur, i. 261. t. 28.
Logarithmus tangentis quomodo inveniatur, t. 29. i. 262.
Logistica speciosa. Definitio, f. 2,

Logistica linea. Vide Logarithmica.
Logistici solidi cubatio, i. 31. & seqq.
Logistica spiralis. Definitio, f. 557.
Logistica spirales infinitae p. 559.

M.

Magnitudo scalaris. Definitio, a. 250.
Majoritas unde colligatur, 89. 90. ejus signum, 22. 23. 204.
Majus. Definitio, a. 20.
Mathesis quomodo & quando judicium acuat, c. 53. 54.
Maxima chorda in circulo, i. 64. g. 299.
Maxima vel minima applicata in curvis algebraicis quomodo determinetur, i. 63.
Media proportionalis linea quomodo invenitur, g. 327. quomodo inveniuntur duae in proportionem continua, f. 624.
Medii arithmetici inventio, a. 330.
Medius proportionalis numerus quinam dicatur, 156. quomodo inveniatur, 301.
Mensura. Definitio, g. 23. 24.
Mensura anguli. Definitio, 57. quo radio describitur, 139.
Mensura anguli ad peripheriam, 314. extra centrum, 316.
 figura. Definitio, 118.
Mensura linearum. Definitio, 25. divisio, 26. diversitas in diversis locis, 26. unius ad aliam reductio, 130. ex qua materia fieri debeat, 127. & seqq.
Mensura numeri, communis, maxima, communis maxima. Definitio, a. 77. 78. communis maxima quomodo invenitur, 228. 230.
Mensura solidi. Definitio, g. 477.
Mesologarithmus, t. 31.
Methodus mathematica. Definitio, c. 12. cur ita dicatur, 52. forma, 2. 13. 14. 15. ab objectionibus vindicata, 55. & seqq.
Methodi tangentium inuerse exempla, 286. & seqq.
Methodus de maximis & minimis. Definitio, i. 61.
Mensuri quid significet in Geometria, g. 23. quid

quid in Arithmetica, a. 74.
Minuendus numerus quinam dicatur, a. 64.
Minus. Defin. 9, a. 20. unde colligatur,
 89. 90. 206. signum, 22. 23.
Minutæ physitales, a. 385.
Minutum primum, secundum &c. Definitio,
 a. 388.
Minutum primum, secundum &c. gradus, g.
 41. qualis sit fractio, 43.
Miraculosa in definitionibus geometricis
 admittenda, g. 469.
Multa. Definitio, a. 7.
Multiplacatio. Definitio, a. 66. quid sit,
 67. signum, 68. regulæ, 111. 112. 115.
 116. examen, 121.
Multiplicandus. Definitio, 66.
Multiplicator, 66.
Multitudo. Definitio, 8.
 N.
Nomen rationis, a. 136.
Normalis linea. Definitio, g. 78.
Normæ constructio & usus, 212. 216. exam-
 en, 321.
Nota numerica, a. 49. 51.
Note fractionum decimalium. Definitio,
 372.
Notio. Definitio, c. 4. differentia, 5. &
 seqq. qualis in definitionibus mathema-
 ticis admittatur, 13. & seqq.
Notio adequata. Definitio, c. 10. gradus,
 11.
Notio clara. Definitio, 6. divisio, 8. 9.
 confusa, 9.
 distincta. Definitio, 8. divisio, 10.
 12.
 inadequata, 12.
 obscura, 7.
Numerare quid in Arithmetica significet,
 a. 74.
Numerandi lex, 44. 46.
Numerus. Definitio, 10. & seqq. quomo-
 do scriptus enunciatur, 55. quomodo
 occulte scribatur, 53. 54.
Numeri compositi inter se. Definitio, a. 80.
Numeri dati cur in divisione & multipli-

catione non debeant esse homogenei,
 70.
Numeri heterogenei inter se, 35. 36.
 homogenei, 36.
Numeri primi inter se, a. 39.
Numerorum nomina, 45. 47. 48. notæ, 49.
 51. progressio, 50.
Numerus abstractus quinam, a. 34.
 angulorum. Definitio, f. 208.
 209.
 compositus, a. 76.
 concretus, 34.
Numerus cubicus. Definitio, a. 248. ge-
 nesis, 276. & seqq. tabulæ horum nu-
 merorum quomodo construantur, f. 85.
Numerus determinatus, a. 13.
 effabilis, 39.
 fractus, 38.
Numerus heptagonus. Definitio, f. 206,
 quomodo inveniatur, 211. summatio,
 212.
Numerus hexagonus. Definitio, 206. quo-
 modo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus indeterminatus, a. 13.
 ineffabilis, 43.
Numerus integer. Definitio, 37. quid ex-
 primat, 139. quando radicem perfe-
 ctam non habeat, 293. 294.
Numerus irrationalis. Definitio, a. 43. per
 lineas expressio, g. 420. f. 630.
Numerus impar. Definitio, a. 72. proprie-
 tates & symptomata, f. 72. & seqq.
Numerus numerans, a. 33. 34.
 numeratus, 33.
Numerus octogonus. Definitio, f. 206. quo-
 modo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus par. Definitio, a. 72. proprie-
 tates & symptomata, f. 77. & seqq.
Numerus pentagonus. Definitio, f. 206.
 quomodo inveniatur, 211. summatio,
 212.
Numerus perfectus quinam sit & quomo-
 do inveniatur, f. 248.
Numerus polygonus. Definitio, 206. quo-
 modo inveniatur, 210. summatur, 212.
 Iii 2

Numerus primus in se, 475.
Numerus pronicus Definitio, f. 196. quomodo inveniatur, 198.
Numerus pyramidalis primus, secundus &c. triangularis, pentagonalis &c. Definitio, f. 214. summatio, 216. 217.
Numerus surdus, a. 43.
Numerus triangularis. Definitio, f. 206. quomodo inveniatur, 211. summatur, 212.

Numerorum proportionalium symptomata analytice investigata, f. 173. & seqq.

O.

O *Bliqua linea*. Definitio, g. 80.
Oblongum. Definitio, 100. constructio, 339.

Ostædram. Definitio, g. 475. constructio, 526. quale corpus, 530. quomodo sphaerae inscribatur, f. 307. latus sphaerae inscribendi quomodo inveniatur, 305. hujus ad radium ratio, 314.

Ostogonum. Definitio, g. 104.

Ostogoni regularis latus quomodo inveniatur, f. 272.

Opponi quænam dicantur, g. 85. 86.

Ordinata ratio, a. 194.

Ordinatim applicata. Definitio, f. 370.

Ordo Mathematicorum an jure taxetur, c. 57.

Ordo naturæ quinam, 57.

sebolæ quinam, 57.

Osculatio curvarum, i. 314.

P.

P *Parabola*. Definitio, f. 388. constructio, 393. 400. 401. proprietates respectu axis, 390. & seqq. respectu diametri, 416. 417. quod sit sectio conica, 511. circulus osculator, i. 323. ad eam perpendicularis, 72. 78. quadratura, 103. 104. 107. 349. 350. rectificatio, 146. hujus dependentia a quadratura hyperbolæ, 147. subnormalis, 36. subtangens, 21.

Parabola externa proprietas, f. 419.

secundi generis rectificatio, i. 150.

Parabola Apolloniana quænam dicatur, f. 519.

Parabola infinita seu *superflua* generum. Definitio, f. 519. constructio, 581. 583. circuli osculatores, i. 323. quadratura, 105. 106. rectificatio, 152. subnormalis, 37. subtangens, 22. quod sint sectiones conorum superiorum, f. 528.

Paraboloides cubicales, biquadraticales, surfolidales &c. Definitio, f. 519.

Parallela linea. Definitio, g. 81. quomodo ducatur, 258. symptomata, 255. & seqq. 260.

Parallelismi constructio & usus, 258. 259.

Parallogrammum. Definitio, g. 102. bisectio, 439. in partes æquales divisio, 440. proprietates, 335. 337.

Parallogramma quotnam sint, 336.

Parallogrammorum ratio, 388. proprietates, 388. æqualitas unde colligatur, 383. 384. 389. similium proprietates, 396 & seqq.

Parallopipedum. Definitio, g. 462. proprietates, 463. 464. descriptio in plano, 510. constructio, 514. bisectio, 537. 111. superficies & soliditas quomodo inveniatur, 536.

Parallopipedorum æqualitas unde colligatur, 535. ratio, 572. & seqq. æqualium proprietates, 580. similium ratio, 578.

Parameter. Definitio, f. 388.

Pars aliquanta. Definitio, a. 30.

Pars aliquota. Definitio, a. 30.

Partes. Definitio, a. 9. quando similes, 170.

Partium similium ratio ad totum, 170. inter se, 171.

Pennæ optima quænam sint, g. 123.

Pentagonum. Definitio, 104.

Pentagoni regularis latus circulo inscribendi quomodo inveniatur, f. 279.

Perimeter, g. 31.

Peripheria circuli, 37. 41.

Permutatio rationum, a. 173.

Perpen-

Perpendicularis linea. Definitio, g. 78. quomodo dicatur, 210. 212. 216. symptomata & proprietates, 213. & seqq. 217. 224.
Perpendicularis ad curvam quanta sit, i. 76. 85.
Perpendicularis ad parabolam, 72. 78.
Perpendicularis ad hyperbolam æquilataram, 74.
Perpendicularis ad hyperbolam scalenam, 75.
Pertica cubica, g. 477. quadrata, 118.
Perturbata ratio, a. 198.
Pes, g. 25. cubicus, 477. quadratus, 118.
Planum, g. 36.
Planum plano parallelum, 498. ad planum perpendiculare, 494.
Plura. Definitio, a. 7.
Polus conchoidis, f. 535.
Polygonum. Definitio, g. 104.
Polygonum regulare quomodo construatur, g. 352. t. 48. quomodo circulo inferibatur & circumscribatur, g. 353. 355. t. 46. quomodo circulus eidem circumscribatur, g. 347. ejus ad circumscriptum & circumscriptum relatio, 416. proprietates, 407. area quomodo inveniat, 402. 416.
Polygonorum similium proprietas, g. 403. 406.
Polynomium quomodo ad dignitatem quancunque evehatur, f. 101.
Posulatum. Definitio, c. 30. quænam propositiones huc referantur, 31.
Potentia. Definitio, a. 250. signa, 254. logarithmus, 339. quomodo prodeat, 341. quomodo ex additione numerorum imparium procreetur, f. 170. 171.
Potentiarum proportio, 259. 260.
Potentie numerorum naturalium quancunque quomodo summentur, f. 203. 205.
Potentia hyperbolæ. Definitio, f. 477.

quomodo determinetur, 478. & seqq.
Potestas. Definitio, a. 250. signa, 254.
Practica Italica, a. 316. & seqq.
Prisma, rectum, obliquum, triangulare, quadrangulare &c. Definitio, g. 456. proprietates, 457. 458. in plano descriptio, 510. constructio, 515. superficies & soliditas quomodo inveniat, 539.
Prismatum ratio, 572. & seqq. æqualitas unde colligatur, 535.
Prismatum aequalium proprietates, 580. similitum ratio, 578.
Prismatis triangularis ad pyramidem reductio, 543. 545. ad parallelepipedum ratio, 538.
Problema quale sit & quibus constet partibus, c. 48. quomodo algebraice solvatur, f. 141.
Problema Deliacum, f. 626.
Problemata arithmetica, f. 144. & seqq. arithmetica indeterminata, 223. & seqq. geometrica 250. & seqq. geometrica indeterminata per Algebram soluta, 255. & seqq.
Problematis Kepleriani solutio, i. 193.
Productum quid dicatur, a. 66.
Progressio arithmetica. Definitio, a. 333. proprietates, f. 106. summa quomodo inveniat, 107. 108.
Progressionis arithmetica problemata per Algebram soluta, f. 164. & seqq.
Progressio geometrica. Definitio, a. 322. proprietates, f. 118. & seqq. summa quomodo inveniat, 120.
Progressionis geometrica problemata per Algebram soluta, f. 182. & seqq.
Progressionum geometricarum ab unitate incipientium proprietates, f. 126.
Proportio. Definitio, a. 155.
Proportio æquemultiplicium, 219.
Proportionum regula, 301. & seqq.
Proportio continua. Definitio, i. 156. contraharmonica, f. 193. discreta, a. 156.
Proportionalitas quid sit, a. 157.

Proportionales quantitates quamnam dicantur, 155.

Propositionis partes, c. 39. 40.

Propositiones Elementi II. EUCLIDIS analytice demonstratæ, f. 86. & seqq.

Punctum. Definitio, g. 6. theoria, 7. 8. 9.

Punctum flexus contrarii. Definitio, i. 301. quomodo determinetur, 302. 309.

Punctum regressus, 301.

Pyramis. Definitio, g. 472. proprietates, 473. 474. in plano descriptio, 512. constructio, 515. 521. ad prisma triangulare reductio, 543. 545. 546. superficies ac soliditas quomodo inveniantur, 548. i. 351.

Pyramidum æqualitas unde colligatur, g. 542. ratio, 572. & seqq.

Pyramidum æqualium proprietates, 580. *similium* ratio, 578.

Q.

Quadratrix curvæ, i. 234.

Quadratrix DINOSTRATIS. Definitio, f. 164. subtangens, i. 55.

Quadratrix Tschirnhusiana, f. 566 568.

Quadratorum numerorum in serie naturali differentiarum, f. 81. 83. quomodo summentur, 200. quomodo duorum summa in duo alia quadrata dividatur, 230. logarithmus, a. 338. Vid. numerus quadratus.

Quadratum. Definitio, g. 98. constructio, 338. area quomodo inveniantur, 370. & seqq.

Quadratorum ratio ad se invicem, 374. additio, 419.

Quadrati quadratum, a. 252.

Quadrato-cubus, ibid.

Quadratocubocubus, ibid.

Quadratoquadratum, ibid.

Quadratoquadratocubus, ibid.

Quadratum Cubi, ibid.

Quadratum surdesolidi, ibid.

Quadrata reciproca quomodo construantur, f. 285. 286.

Quadrilateri circulo inscripti proprietates, g. 350. f. 324.

Quadrilaterorum similium proprietates, g. 350.

Quantitas quid sit, a. 13. 14. quomodo ad dignitatem evehatur, 255. f. 95. quomodo differentietur, i. 12. & seqq.

Quantitatum signa, a. 57. 58.

Quantitatum permutatio quomodo invenitur, f. 129.

Quantitas affirmativa, f. 16.

Quantitas constans. Definitio, f. 375. signum, 376.

Quantitas exponentialis. Definitio, i. 264. signum, 265. constructio, 268.

Quantitas infinite parva. Definitio, 2. quando habeatur pro nulla, 3.

Quantitas nihilo major, f. 16. minor, 16.

Quantitas positiva. Definitio, f. 17. quomodo prodeat, 17.

Quantitas privativa. Definitio, 16. quomodo prodeat, 17.

Quantitas variabilis. Definitio, 375. signum, 376.

Quantitates continue æquidifferentes. Definitio, a. 322. proprietates, 324. & seqq.

Quantitates discretim æquidifferentes. Definitio, a. 322. proprietates, 324. & seqq.

Quantitates harmonice proportionales. Definitio, f. 186. quomodo inveniantur, 187. & seqq.

Quantitates incommensurabiles num denitur, a. 165.

Quantitates positiva & privativa quando se mutuo destruant, f. 21. num rationem ad se invicem habeant, 24.

Quantitates privativæ quid sint, 19. 20. num inter se homogeneæ, 23. quod positivis heterogeneæ, 23.

Quartus æquidifferens numerus quomodo invenitur, a. 331.

Quartus proportionalis numerus quomodo invenitur, 302.

Quotus. Definitio, a. 69. logarithmus, 343.

343. ad dividendum ratio, 174. ex divisione. Si per factorem unum prodicens, 210. quando numerus rationalis, 161. quando irrationalis, 162. ex divisione radices per radicem quando numerus integer, 291.

Quoti quando numeris divisus proportionales, a. 181.

R.

Radius circuli. Definitio, g. 39. eorum æqualitas, 40.

Radius circuli octogono regulari circumscribendi quomodo inveniatur, 274.

Radius circuli decagono regulari circumscribendi quomodo inveniatur, f. 178.

Radius circuli parabolam osculantis quomodo inveniatur, i. 322.

Radius curvædinis. Definitio, i. 314. quomodo determinetur, 320.

Radius evolutæ. Definitio, i. 314.

Radius osculi. Definitio, i. 314. quomodo determinetur, 320.

Radix binomia. Definitio, a. 258.

Radix cubica. Definitio, a. 248. ratio ad cubum, 249. quomodo extrahatur, 282. & seqq.

Radix multinomia, 258.

polynomia, ibid.

trinomia, ibid.

Radix quadrata. Definitio, a. 246. relatio ad quadratum, 247. quomodo extrahatur, 169. & seqq.

Radix æquationis. Definitio, f. 134. quomodo transmutetur, 333. & seqq. quomodo in falsam mutetur, 332.

Radix æquationis vera, 135.

falsa, 136.

imaginaria, 137.

Radix pronica quomodo extrahatur, 199.

Radix ex æquatione biquadratica quomodo extrahatur, f. 362.

Radix ex cubica quomodo extrahatur, 355.

Radix ex quacunque per approximationem quomodo extrahatur, 363. & seqq.

Radix ex quadratica quomodo extraha-

tur, 143.

Radix ex dignitate quomodo extrahatur, a. 256.

Radix ex serie infinita quomodo extrahatur, f. 366.

Radix ex quantitate irrationali composita quomodo extrahatur, 360.

Radices imaginariæ quænam dicantur, 71.

Radices rationales ex æquatione quomodo extrahantur, f. 351. & seqq.

Radices universales quænam dicantur, 70.

Radicum extrahendarum theorema generale, f. 98. & seqq.

Radicum signum, a. 295.

Radicum imaginariarum algorithmus, f. 71.

Radicum quadratarum surdorum ratio, g. 420.

Radicum universalium algorithmus, f. 70.

Ratio. Definitio, a. 126. termini, 126. 127. genera, 130. usus, 132.

Rationum symptomata demonstrata, a. 169. & seqq. analytice investigata, f. 124.

Rationum identitas. Definitio, a. 149. 150. natura, 151. designatio, 152. 153. unde colligatur, 168. 177.

Rationum similitudo in quo consistat, 154. unde colligatur, 167.

Ratio æqualitatis. Definitio, 130.

Ratio composita. Definitio, a. 159. exponens, 214. quando una alteri æqualis, 218.

Ratio dupla, 142.

duplicata, 159. 216.

inequalitatis, 131.

inequalitatis majoris, 132.

Ratio inequalitatis minoris. Definitio, 132. nomina quomodo inveniantur, 147. memoriæ facile mandentur, 148.

Ratio irrationalis, 134. 135.

Ratio major, 158.

minor, ibid.

multiplex, 142.

multiplex superparticularis, 145.

superpartiens, 146.

multiplicata, 159.

Ratio

Ratio quadruplicata, 159.
rationalis, 134. 135.
sesquialtera, 143.
sesquitercia, ibid.
subdupla, 142.
subduplicata, 159.
submultiplex, 142.
submultiplex subsuperparticularis, 145.
submultiplex subsuperpartiens, 146.
submultiplicata, 159.
subquadruplicata, 159.
subsesquitercia, 143.
subsesquialtera, ibid.
subsusuperparticularis, ibid.
subsusuperpartiens, 144.
subsusuperparticularis, 143.
subtripla, 142.
subtriplicata, 159.
triplicata, 159. 216.
Ratio summae numerorum in infinitum certa lege decrefcentium ad totidem terminos maximo æquales, i. 341. & seqq.
Recta. Vid. *linea recta*.
Rectæ in tres partes continue proportionales divisio, f. 603.
Rectangulum. Definitio, g. 100. area quomodo inveniatur, 375.
Rectangulorum ratio, 376.
Rectificatio curvæ. Definitio, i. 143. methodus, 144.
Regula quale instrumentum, g. 121. ex qua materia parari debeat, 122.
Regula aurea quænam dicatur, a. 307.
Regula centralis BAKERI, f. 623.
Regula Conchoïdis, 535.
Regula de quinque, a. 312.
Regula Renaldiniana polygonum regulare circulo inscribendi confutata, f. 292.
Regula Societatis, a. 314.
Regula trium sive de tri quænam sit, 307. ubinam locum habeat, 307. usus in vita communi explicatus, 308. & seqq.
Regula trium composita, 312. 313.
 directa, 311.
 inversa, ibid.

Residuum. Definitio, a. 64.
Rhombus. Definitio, g. 29. instructio, 340. area quomodo inveniatur, 387.
Rhomboides. Definitio, 101. constructio, 341. area quomodo inveniatur, 387.
 S.

Scala geometricæ constructio, g. 277. usus, 278.

Scholion in Mathesi quid sit, c. 51.

Scrupulum primum, secundum &c. g. 388.

Secans. Definitio, 7. quomodo inveniatur, 26. i. 166. arcus multiplex quomodo inveniatur, f. 328.

Secantium proprietates, g. 302. 303. ex eodem puncto ductarum relatio, 380.

Secans complementi. Definitio, r. 11.

Sectio circuli per rectam qualis, g. 52. per circum qualem, 53.

Sectiones conicæ. Definitio, f. 386. quænam sint, 387. & seqq.

Sectiones conicæ superiorum generum, 528. & seqq.

Sectio linearum. Definitio, g. 50.

Sectio media & extrema ratione facta, f. 258.

Sectionis planorum theoria, g. 478. & seqq.

Sectio rectarum mutua, 51.

Sector circuli. Definitio, g. 46. ad triangulum reductio, 415. area quomodo inveniatur, 435. i. 154. & seqq.

Sectoris elliptici quadratura, i. 186. 192. hyperbolici quadratura, 189. 194.

Segmentum circuli, majus, minus. Definitio, g. 44. area quomodo inveniatur, 436. & seqq. i. 170.

Segmenti spherici soliditas quomodo inveniatur, i. 199.

Segmentum superficiei sphericæ quomodo inveniatur, i. 222.

Semicirculorum sectio, g. 202.

Semidiameter. Definitio, 39.

Semiordinata. Definitio, f. 370.

Series convergentes. Definitio, f. 52. divergentes, ibid.

Serliana curva fornicum qualis sit linea, f. 598.

Exponentium indeterminatorum tam rationum quam dignitatum, f. 13. 14. operationum arithmeticarum, 8. & seqq.
Signa quantitatum, f. 3. & seqq.
Signa rationum universalium, 114.
Similia. Definitio, a. 24. qualia sint, 25. differentia interna, 26. quomodo a LEIBNITIO definita, 27.
Similitudo. Definitio, a. 24. signum, 28. 29. principium, g. 120.
Similitudo corporum, 564. & seqq. polygonorum regularium ejusdem ordinis, 404. 405.
Sinus sive **Sinus rectus**. Definitio, t. 2. proprietates, 3. mensura, 13. ex dato arcu quomodo inveniatur, i. 160. graduum 18. f. 277. gr. 22. min. 30. f. 273. gr. 30. t. 15. gr. 36. f. 281. gr. 45. f. 270. arcus dimidii, t. 17. dupli, t. 18. arcus differentiae, t. 20. angulorum multiplo- rum, f. 325. arcuum exiguae differen- tia quomodo inveniatur, t. 19. & seqq.
Sinus artificialis, t. 31.
Sinus canon quomodo construatur, t. 15. & seqq.
Sinus complementi. Vide **Cosinus**.
Sinus totus. Definitio, t. 2. proprietates, 4.
Sinus versus. Definitio, t. 2. proprietates, 4. quomodo ex arcu inveniatur, 163.
Situs eundem quænam habeant, g. 5.
Situs planorum theoria, 478. & seqq.
Solidum. Definitio, g. 444. quomodo da- to æquale inveniatur, 577.
Solidi cissoidales cubatio, i. 210. hyperbolici, 216. 217. logistici, 211. 212.
Sphæra. Definitio, g. 470. proprietates, 471. ad pyramidem reductio, 550. i. 200. ad cylindrum circumscriptum ratio, g. 551. i. 201. soliditas quomodo inve- niatur, g. 556. i. 199. superficies quo- modo inveniatur, g. 556. i. 221.
Sphærarum similitudo, g. 571. ratio, 579.
Sphæroidis elliptici soliditas quomodo in- veniatur, i. 203. & seqq.
Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Spiralis ARCHIMEDIS. Definitio, f. 569. proprietates, 570. subtangens, i. 50.
Spiralium quadratura, i. 137.
Spirales infinitæ. Definitio, f. 572. sub- tangens; i. 50. 51.
Spiralis parabolæ punctum flexus contra- rii quomodo determinetur, i. 312.
Stereometria doliorum, g. 582. & seqq.
Strues lignorum quomodo metiamur, 382.
Subnormalis. Definitio, f. 408. quomodo inveniatur, i. 35.
Subnormalis curvæ exponentialis quomodo inveniatur, i. 283.
Subnormalis ellipsos quomodo determi- netur, f. 440. i. 37.
Subnormalis hyperbolæ quomodo determi- netur, f. 491.
Subnormalis parabolæ quomodo determi- netur, f. 440. i. 36.
Subtangens. Definitio, f. 408.
Subtangens curvæ algebraicæ quomodo in- veniatur, i. 20. & seqq.
Subtangens curvæ exponentialis quomodo inveniatur, i. 271. & seqq.
Subtangens ellipsos quomodo determine- tur, f. 440. 448. i. 25.
Subtangens hyperbolæ quomodo determi- tur, f. 491. i. 27.
Subtangens parabolæ quomodo determine- tur, f. 410. i. 21.
Subtractio. Definitio, a. 64. signum, 65. regulæ, 103. in numeris concretis, 104. examen, 106.
Subtrahendus, 64.
Summa. Definitio, a. 61.
Summandi numeri, ibid.
Superficies. Definitio, g. 28. termini, 29. 30.
Superficies corporis rotatione geniti quo- modo inveniatur, f. 219.
Superficiæ sphæræ ad circulum maximum ratio, g. 554.
Superficiæ corporum ratio analytice in- vestigata, f. 128.
Surdesolidum, a. 252.
secundum, ibid.
 K k k

Sur-

Surdesolidum tertium, a. 252.

Syllogismorum forma an in demonstrando attendenda, c. 47.

T.

T*Angere* quid significet in Geometria, g. 47.

Tangere circulum extus, intus, ibid.

Tangens circulum quomodo ducatur, g. 311. f. 291. ejus ad secantem ex eodem puncto ductam relatio, g. 379.

Tangens curvam quomodo inveniatur, i. 161.

Tangens in Trigonometria. Definitio, t. 7. proprietates, 8. & seqq. quomodo inveniatur, 26. arcus multipli quomodo inveniatur, f. 327.

Tangentis 45° magnitudo, t. 32.

Tangentium circulum proprietates, g. 304. 307. & seqq. 325. 326.

Tangentium & secantium ex eodem puncto ductarum relatio, g. 334.

Tangens artificialis, t. 31. complementi, 11.

Tangentium methodus inversa. Definitio, i. 224. in quo consistat, 225. exempla, 226. & seqq.

Termini rationis, a. 126.

Terminorum usus in rebus distincte concipiendis, a. 56.

Tetraëdram. Definitio, g. 475. constructio, 525. quale sit corpus, 530. quomodo sphaera inscribatur, f. 301. latus sphaerae inscribendi quomodo inveniatur, 299. hujus ad radium ratio, 314.

Theorema. Definitio, c. 38. quænam in eo consideranda, 39. & seqq.

Theorema Newtonianum evahendi binomium ad dignitatem quamcunque, f. 91. & seqq.

Torum. Definitio, a. 9. relatio ad partem, 84. 86.

Trafforia, i. 250. & seqq.

Trapezoides. Definitio, g. 103.

Trapezium, ibid.

Triangulum. Definitio, g. 87. per quam terminetur, 182. 206. 268. 266. constructio, 180. 205. 234. area quomodo inveniatur, 392. i. 107. divisio in partes æquales, g. 440. ratio ad parallelogrammum, g. 386. 391. i. 348.

Triangulorum æqualitas unde colligatur, g. 179. 204.

Triangulorum æqualium proprietates, 393.

Triangulorum congruentia, 179. 204. 251.

Triangulorum proprietates, 188. & seqq. 239. 240. 244. 246. 247. 268. 297. 300. t. 33. 35. resolutio trigonometrica, t. 36. & seqq. similitudo, g. 183. 207. 235. 237. 252. 267.

Triangulorum similium proprietates, 396. & seqq.

Triangulum acutangulum. Definitio, g. 93.

Triangulum aquicurvum. Definitio, g. 89. constructio, 199. per quam determinetur, 200. proprietates & symptomata, 184. 248. 253. similitudo, 201.

Triangulum æquilaterum. Definitio, g. 88. constructio, 198. proprietates & symptomata, 185. 186. 187. 241. 254.

Triangulum obliquangulum. Definitio, g. 94.

Triangulum obtusangulum. Definitio, 92. proprietates, 221. & seqq. 241.

Triangulum rectangulum. Definitio, 91. proprietates, 218. & seqq. 241. 244. 329. 417.

Trianguli regularis circulo inscribendi latus quomodo inveniatur, f. 268.

Trigonometria canonica a Tabularum necessitate liberata, i. 167.

Trigonometria plana. Definitio, t. 1.

Trochois. Definitio, f. 573.

proprietates, 574. & seqq.

U.

V*ariationes* omnes quantitatum combinatarum & permutatarum quomodo inveniuntur, f. 222.

Vertex anguli, g. 54.

curvæ, f. 369.

figuræ, g. 114.

Uncia potentiarum quinam numeri dicantur, f. 9. *Quales sint numeri*, 218.

Unitas. Definitio, a. 4.

Unitates eedem quænam sint, a. 5. 6.
diversæ quænam sint, ibid.

Unum. Definitio, a. 3.

Virgula pithometricæ constructio, g. 582.

& seqq. 595. 598.

Z.

Z *Ensus*, a. 253.

Zensicubus, ibid.

Zensizensizensus, ibid.

Zensizensus, ibid.

Zensurdesolidus, ibid.

FINIS INDICIS QUARTI.

V.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO II.

CONTENTORUM.

Notes velim, literam *m*. Mechanicam, *f*. Hydrostaticam, *a*. Aërometriam
b. Hydraulicam, & numeros §§. designare: ubi vero nulla
 numeris adscribitur litera, eos referri ad
 proxime antecedentem.

A.

A *cceleratio motus* gravium qua lege fiat, *m*. 85. & seqq.

Acceleratio motus aquæ quomodo fiat, *b*. 249. & seqq.

Attionis & reactionis æqualitas & contrarietas, *m*. 528. 529.

Æquilibrium in aëre æquiponderantium quomodo tollatur, *a*. 158.

Æquiponderantia in aëre quando non æquiponderent in aliis fluidis, *f*. 58.

Æquilibrium fluidorum diversæ gravitatis specificæ, *f*. 36. homogenorum, 34.

Æquiponderatio. Definitio, *m*. 122. theoria, 144. & seqq.

Aër. Definitio nominalis, *a*. 3. existentia, 13. 14. quod telluri circumfundatur, 44. quod comprimì possit, 15. 17.

quomodo intra vas comprimatur, 65. quomodo ope antliæ in data ratione dilateretur, 52. num comprimatur in ratione ponderum, 72. & seqq. quod sit elasticus, 18. quod gravis, 21. quod rarefiat, 23. quod condensetur, 24.

Aër inferior quod superiore densior, *a*. 154. specificè gravior, 155.

Aëris compressi in vase ope antliæ ratio ad primitivum, *a*. 66. & seqq. compressi in vase in aqua submerso elàter quantus sit, 108. compressi vi elastica quomodo aqua moveatur, *b*. 87. 89. & seqq.

Aëris densitas ubi eadem, *a*. 46. 47.

Aëris ex vase educti per antliam quantitas quomodo inveniatur, 103.

Aëris pes cubicus quantum ponderet, 56. 57.

Kkk 2

Aëris

Aëris rarefactione quomodo aqua expellatur, *b.* 91.

Aëris residui in vase ope antlia evacuato ratio ad primitivum, *a.* 50. 51.

Ärometria. Definitio, 1. quænam in ea tradenda, 2.

Alarum molendini situs optimus quomodo determinetur, *b.* 316.

Altitudines jactuum sub diversis angulis quomodo sint inter se, *m.* 504. 505.

Altitudo ascensus ponderis super plano inclinato quomodo se habeat, 269. 270.

Altitudo jactus quomodo se habeat ad parametrum, 503.

Altitudo maxima, ad quam grave oblique projectum ascendit, 499. 501. 502.

Altitudo viva fluminis, *b.* 228.

Alveus fluminis. Definitio, *b.* 185.

artificialis, 186.

naturalis, *ibid.*

Amplitudo semitæ projectilis. Definitio, *m.* 489. quomodo sit ad semitam, 491. & seqq.

quando semiparametro æqualis, 495. quando maxima, 494. quomodo maxima inveniat, 497. quomodo

ceteræ ex ea eruantur, 496.

Anemometerum. Definitio, *a.* 181. constructio, 182.

Angulus directionis. Definitio, *m.* 240.

Angulus elevationis in motu projectorum. Definitio, *m.* 478. quomodo determinetur, ut projectile feriat locum datum, 506.

Angulus incidentiæ. Definitio, 550.

Angulus reflexionis. Definitio, 551.

Antlia attractiva constructio, *b.* 110.

Antlia Ctesibiana constructio, 113. & seqq.

Antlia pneumatica. Definitio, *a.* 38. inventor, 39. constructio, 40. usus, 41.

& seqq. capacitas quomodo determinanda, 54. 55.

Antlia pneumatica quomodo inter se comparandæ, 53.

Aqua quomodo vires ad agitandas machinas concipiat, *m.* 900. per exiguum

orificium in vas immittatur, 149. per sectionem canal. horizont. is fluat, *b.* 235. & seqq. quo derivari possit, 9.

quomodo ex loco uno in alterum derivetur, 13. & seqq. in locum excelsiorem deducatur, 126. 127. per siphonem ascendat, 66. ope catenarum situ-

lis instructarum elevetur, 116.

Aqua proficiens quantum ascendat, *b.* 49. & seqq. 56. 57.

Aquæ gravitas specifica, *f.* 77.

Aqua libere fluentis in alveo qua de causa acceleretur, *b.* 200. quantum acceleretur, 201. & seqq.

Aquæ quantitas in vas inversum ascendens, dum eidem immergitur, quomodo determinetur, *a.* 109. & seqq.

Aquæ saltus per lumen horizontale, *b.* 58. & seqq. per verticale, 49. & seqq.

Aquarum quantitates per tubos effluentes, *b.* 20. & seqq.

Arcus circuli centrum gravitatis, *m.* 165.

Ars libellandi. Definitio, 904. regulæ, 911.

Ascensus aquæ proficientis, *b.* 49. & seqq. 56. 57.

Ascensus celeritate per descensum acquisita factus quomodo se habeat, *m.* 339.

Ascensus in lineis curvis demonstratus, *m.* 334. & seqq.

Assarium. Definitio, *b.* 104. constructio, 106.

Axis quid significet in Mechanica, *m.* 756. 757.

Axis in peritrochio. Definitio, 756. theoria & praxis, 792. & seqq.

Axis oscillationis. Definitio, 379.

B.

Barometerum. Definitio, *a.* 89. theoria, 124. & seqq. constructio, 131.

Baroscopium. Definitio, 89. sensibilibioris constructio, 136. & seqq.

Baroscopii compositi constructio, 134. inclinati theoria, 141. & seqq.

Basis corporis gravis quid sit, *m.* 221.

C.

C.

Calcando quomodo machina moveatur, *m.* 886. 888.

Calcatio quid sit, 874.

Canalis quid dicatur, *b.* 3.

Cavitas corporis specificè gravioris quanta esse debeat, ne fluido leviori supernatet, *f.* 111.

Celeritas. *Definitio*, *m.* 13. quod tempori proportionalis, 14. 15. quid proprie sit, 16. quomodo a Mathematicis consideretur, 114. quando eadem ex ictu corporum resultet, 334. quando in conflictu non mutetur, 590. quando mutetur, 560. 562. 576. quanta aquæ per foramen vasis erumpentis, *b.* 48.

Celeritas absoluta. *Definitio*, *b.* 305.

Celeritas acquisita per descensum perpendicularem, *m.* 92. in plano inclinato, 29. 192. 303. & *seqq.* in curva, 308.

Celeritas aque in alveo an major in fundo, quam superficie, *b.* 206. per canalem declivem fluentis num augeatur obpressionem a superiori, 243. & *seqq.*

Celeritas corporum elasticorum in concursu quomodo determinetur, *m.* 571.

Celeritas fluidi per siphonem effluentis, *b.* 81. & *seqq.* vi aëris compressi ejectioni, 92. & *seqq.*

Celeritas in motu composito quomodo invenitur, *m.* 252.

Celeritas media in fluminibus quomodo invenitur, *b.* 238. & *seqq.* aquæ per canalem horizontalem fluentis, 263. & *seqq.*

Celeritas penduli in puncto infimo qualis sit, *m.* 401.

Celeritas projectilis quomodo invenitur, 514.

Celeritas respectiva. *Definitio*, *b.* 305.

Celeritates quando in conflictu corporum permutentur, *m.* 563. 565.

Celeritates acquisitæ in conflictu corporum elasticorum quomodo se habeant, *m.*

603. & *seqq.* in diversis planis inclinatæ eodem tempore quomodo se habeant, 301. 302.

Celeritates amissæ in conflictu corporum elasticorum quomodo se habeant, *m.* 603.

Celeritates aquarum per tubos effluentium, *b.* 36. & *seqq.*

Celeritas terminalis in motu corporum quænam dicatur, *m.* 727. quomodo determinetur, 728. & *seqq.*

Celeritates terminales in fluminibus. *Definitio*, *b.* 237. quomodo inveniantur, 239.

Celeritatum locus in motu gravium quænam sit curva, *m.* 99.

Celeritatum quadratorum summa in conflictu corporum elasticorum quod conservetur, 593.

Centrum gravitatis. *Definitio*, *m.* 122. cur pro gravi corpore sumi possit, 125. quando idem cum centro magnitudinis, 141. quomodo determinetur, 157. quomodo mechanice determinetur, 186. quomodo se habeat ante & post conflictum, 598. 560.

Centrum gravitatis arcus circuli, *m.* 165. conici, 174. conici truncati, 184. conoidis hyperbolici, 179. parabolici, 175. 176. truncati, 185. corporis humani, 187. cylindri, 143. lineæ rectæ, 142. lunulæ HIPPOCRATIS, 169. parabolæ, 159. 162. parabolæ truncatæ, 170. parabolæ infinitarum, 160. 161. 163. parabolici mixtilinei spatii, 189. parallelepipedici, 172. parallelogrammi, 172. perimetri trianguli, 190. perimetri figuræ irregularis cujuscunque, 191. pyramidis truncatæ, 184. pyramidis, 174. sectoris circuli, 166. segmenti circuli, 168. segmenti sphaeræ, 177. segmenti sphaeroidis elliptici, 180. semicirculi, 167. sphaeræ, 178. sphaeroidis truncati, 185. sphaeroidis elliptici, 181. dimidii, 182. trianguli, 158.

Centri gravitatis status num mutetur ab actione corporum in se invicem, *m.* 602.

Centrum gravitatis commune duorum corporum seu ponderum quomodo determinetur, 144. 149. quomodo plurimum, 151. 192. ponderum æqualium, 145.

Centrum magnitudinis. Definitio, *m.* 132.

Centrum motus. Definitio, *m.* 228.

Centrum oscillationis. Definitio, *m.* 423. quomodo determinetur, 426. 429. 432. quomodo in figuris in latius agitata, 445. & seqq.

Centrum oscillationis conii, *m.* 459. 466. conoidis parabolici, 462. hyperbolici, 464. infinitorum parabolicorum, 463. cylindri, 457. hemisphærii, 461. 467. lineæ rectæ, 433. parabolæ, 440. 441. 451. 453. parabolarum infinitarum & curvarum agnatarum, 440. 442. 452. rectanguli, 435. 448. solidorum rotatione genitorum, 454. sphæræ, 460. sphæroidis elliptici, 465. trianguli æquicruri, 436. 437. 438. 449. 450.

Centrum percussiois. Definitio, *m.* 527. quando cum centro oscillationis idem, 547. quando idem cum centro gravitatis, 549.

Centrum velocitatis, *b.* 268.

virium. Definitio, *m.* 654.

Ceræ gravitas specifica, *f.* 77.

Circuli area quomodo inveniatur, *m.* 198.

Clavicula. Definitio, *b.* 5. constructio, 7. 8.

Clepsydra divisio, 45. & seqq.

Cochlea. Definitio, *m.* 760. theoria, 847.

& seqq. praxis, 852. & seqq.

Cochlea mas, *m.* 760.

fœmina, ibid.

Cochlea ARCHIMEDIS quomodo construatur, *b.* 122. & seqq.

Cochlea infinita seu perpetua. Definitio, *m.* 855. theoria, 856. 858. & seqq. praxis, 862. & seqq.

Compressio. Definitio, *a.* 5.

Compressio aëris in vase sub aqua detento, *a.* 106.

Conatus. Definitio, *m.* 18.

Condensatio. Definitio, 6.

Condensatio aëris quomodo æstimanda, 114. & seqq.

Coni centrum gravitatis, *m.* 184. centrum oscillationis, 459. 466. soliditas quomodo inveniatur, 202. 204. 205. quomodo superficies, 202. 203.

Conoidis hyperbolici centrum gravitatis, *m.* 179. centrum oscillationis, *m.* 464.

Conoidis parabolici centrum gravitatis, 175. 176. centrum oscillationis, 462.

Conoidis truncati centrum gravitatis, 185.

Conoidum parabolicorum infinitorum centrum oscillationis, *m.* 463.

Corpora æqualium basium quantum ab aëre premantur, *a.* 45.

Corpora gravia num eadem celeritate descendunt, *m.* 133. 134.

Corporis humani centrum gravitatis, 187.

Corporis pars immergenda in fluido quando inveniatur, *f.* 105.

Corporis specificæ gravioris gravitatio in fluido specificæ leviori, *f.* 55. & seqq.

Corporum in aëre æquilibratorum æquilibrium quando tollatur, *a.* 158.

Corpus motu reflexo qua via ab uno termino ad alterum accedat, *m.* 558.

Corpus asperum. Definitio, *m.* 935.

Corpus durum, 520.

elasticum, 522.

fluidum, *f.* 3.

molle, *m.* 521.

solidum, *f.* 4.

Cunei theoria, *m.* 865.

Currus onustus cur difficilius trahatur super plano inclinato, quam horizontali, 277.

Curva, in qua grave descendens eam constanter ei ponderi absoluto æquali premit, 672.

Curva in qua grave descendens eam constanter eadem vi, sed non ponderi absoluto

Curva æquali premit, 673. quæ a pondere descendente premitur in ratione dignitatis altitudinum, 675.
Curva accessus & recessus æquabilis. Definitio, 347. quomodo invenitur, 349.
Curva æquilibrationis. Definitio, 369. quomodo invenitur, 371. quomodo describatur, 373.
Curva brachystochrona. Definitio, 355. quomodo invenitur, 357.
Curva celerissimi descensus. Definitio, 355. quænam sit, 357.
Curva elastica BERNOULLI, 675.
Curva isochrona. Definitio, 331. quomodo invenitur in hypothesi Galilæana, 334. in hypothesi directionum convergentium, 336. hujus rectificatio, 338. quadratura, 339. quomodo invenitur in quacunque accelerationis hypothesi, 343.
Curva isochrona paracentrica. Definitio, m. 347. quomodo invenitur, 349.
Curva oligochrona. Definitio, 355. quomodo invenitur, 357.
Curva resistentia in motu gravium, 708. instantaneæ, 682. totalis, ibid.
Curva synchrona. Definitio, 366. quomodo construatur, 368.
Curva tantochrona. Definitio, 351. quænam sit, 352.
Cycloidis proprietates mechanicæ, m. 351. 357. 675. proprietates singulares, 311. 388. quomodo per data tria puncta describatur, 361.
Cyclois externa circularium segmentorum repræsentatrix, 358.
Cylindri centrum gravitatis, 143. oscillationis, 457. soliditas, 197. 200. 201. superficies quomodo invenitur, 200.

D.

Densitates quando sunt ut massa, f. 14. quando ut gravitates, 16. quando reciprocè ut volumina, 23.

Densitatum ratio, 24. 25.

Densitates fluidorum quomodo se habeant, f. 39. quomodo inveniantur, 67. respectivæ quando determinentur, 40.

Densitas aëris ubi eadem, a. 46. 47. quomodo crescat, 153. num inferioris ponderi atmosphærico proportionalis, 156.

Densus. Definitio, 8.

Deprimendo movere quid sit, m. 871.

Descensus gravium intra minutum secundum quomodo determinetur, 472. quantus sit, 473.

Descensus gravium in cycloide quomodo se habeat, m. 311. in lineis curvis demonstratus, 334. & seqq. in plano inclinato cum descensu per verticale collatus, 193. & seqq. cum descensu perpendiculari iisdem legibus adstrictus, 189.

Descensus specificæ gravioris in fluido leviori, f. 88. & seqq.

Diabetis constructio, 72. phenomena, 73. & seqq.

Diagonalis parallelogrammi quando motu composito describatur, m. 241. quo tempore describatur, 244.

Diameter gravitatis. Definitio, m. 126.

Dilatatio. Definitio, a. 7.

Directiones quomodo opponantur, 21.

Distantiæ ponderum a centro gravitatis communi quomodo se habeant, 144.

Distantiæ a centro gravitatis & centro motus qualis sit linea, 229.

E.

Effectus aëris compressi quomodo computentur, a. 83. & seqq.

Effectus pleni quomodo se habeant, m. 530.

Elaeteris æstimatio, m. 553.

Elaeteris vi quomodo machina moveatur, 897.

Elaeter aëris. Definitio, a. 9. quando non mutetur, 12. quando crescat & descenscat,

scat, 12. existentia, 18. mensura, 30.
 & seqq. quod calore intendatur, 146.
 frigore minuatur, 147.
Elaeteris aëris directio, 25. 26. mensura
 ejus, quo rarefiens expanditur, 148.
Elaeter aëris compressi quomodo se habeat
 ad elaterem dilatati, 78. quando for-
 tior, 79. quomodo determinetur, 81.
 magis compressi ad elaterem minus
 compressi quomodo se habeat, 80.
Elevatio quid sit, m. 873.
Ellipseos aequatio abscissis a foco compu-
 tatis, m. 667.
Epistomium. Definitio, h. 5. constructio,
 7. 8.
Ergata qualis machina, m. 877.

F.

Figura superficialis & solide magnitudo
 ex centro gravitatis determinata, m.
 192.

Figurarum per planum deorsum latum de-
scriptarum soliditas quomodo invenia-
 tur, 196.

Fluida homogenea quando in æquilibrio,
 s. 34. quodnam præponderet, 35.

Fluida heterogenea quando in æquilibrio,
 36.

Fluidi ex vase inverso exigui orificii effluen-
tis quantitas quomodo determinetur,
 a. 100. & seqq.

Fluidi gravicris in specificæ leviori pon-
 deratio, s. 87. & seqq.

Fluidi pondus quomodo invenitur, 62. 63.

Fluidi partes inferiores num comprimantur
 a superioribus, 71. 72.

Fluidi per siphonem effluentis acceleratio,
 h. 81. & seqq.

Fluidorum diversa gravitatis specificæ æqui-
librium, 36.

Fluidorum densitates quomodo invenian-
 tur, 67.

Fluidorum diversa gravitates specificæ quo-
 modo inveniantur, 66. 70. quomodo
 se habeant, 95.

Fluidorum indirecte ac directe imp-
tium juxta lineas parallelas theoria, h.
 367. & seqq.

Fluidorum variorum gravitas in pollice
 cubico Parisino, s. 698.

Flumen detumescere quando dicatur, h. 199.

Flumen intumescere quando dicatur, ibid.

Fluminum cursus theoria, h. 185. & seqq.

Fons naturalis quomodo arte construatur,
 h. 18.

Fontis intermittens constructio, h. 143.
 152.

Fontium salientium constructio, 128. &
 seqq. 152. & seqq.

Fritidii. Definitio, m. 933. quomodo æsti-
 manda, 940. & seqq. quomodo minuat-
 ur, 943. & seqq. 956. & seqq.

Fulera quomodo corpori supponenda, ut
 in data ratione premantur, m. 234.

Funis canabini contractio ob humiditatem
 aëris, a. 215. 216.

G.

Grave quando quiescat, m. 123. 124.
 222. quando firmiter insistat, 223.
 quando cadat, 222. num sit a lapsu im-
 mune quomodo inveniat, 224. quo
 motu descendat, 79. 85. & seqq. quo-
 modo in plano inclinato descendat,
 261. & seqq.

Gravium linea directionis, 212. & seqq.

Gravia heterogenea. Definitio, m. 131.

Gravia homogenea, 130.

Gravitas. Definitio, m. 4. quomodo spe-
 ctetur a Mathematicis in motu gravium,
 114. num in omni distantia eadem, 78.
 quod a polis versus æquatorem con-
 tinuo decreseat, 390.

Gravitates quando sunt ut volumina, s. 18.

Gravitatis actio diversa quomodo ex motu
 pendulorum colligatur, m. 389.

Gravitatis planum. Definitio, 128.

Gravitas absoluta. Definitio, m. 259.
 ad respectivam ponderis super plano
 inclinato quomodo sese habeat, 261.
 263.

Gravi-

Gravitas absoluta quomodo se habeant, f. 31.

Gravitas aeris evicta, a. 20. quod sit variabilis, 128. & seqq.

Gravitas specifica determinata, 27. & seqq.

Gravitas respectiva. Definitio, m. 260. quando in absolutam degeneret, 266. quando nulla, *ibid.* super plano inclinato quomodo crescat & decrescat, 265.

Gravitates respectivæ ponderum super diversis planis inclinatis quomodo sint ad se invicem, 264.

Gravitas solidi quomodo invenitur, f. 78. 79.

Gravitas specifica corporum quando eadem, 19. 30. quando diversa, 20.

Gravitates specificæ quomodo se habeant, 32. 33. 65. quando sint ut volumina reciproce, 29. quando ut massæ, 28. quando ut absolutæ, 26.

Gravitas specifica fluidorum quomodo invenitur, f. 37. 66. 70. quod ætate ac hieme non eadem, 69.

Gravitates specificæ fluidorum quomodo se habeant, 95.

Gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam solidi gravioris ratio quomodo determinetur, 73.

Gravitas specifica solidi quomodo determinetur, f. 75. 76. quomodo se habeat ad gravitatem fluidi, 101.

Gravitates specificæ solidorum æqualium quomodo se habeant, 103.

Gravitatio. Definitio, m. 5. in fulcra, a quibus sustentatur, 231. super plano inclinato qualis sit, 261.

Gravitatio corporum specificæ leviorum in fluido graviori, f. 94. & seqq.

Gravitatio specificæ graviorum in fluido leviori, 34.

H.

Hemisphæria evacuata quanta vi comprimantur, a. 59. & seqq.

Hemisphærii centrum oscillationis, m. 461. 467.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Horologii oscillatorii constructio, m. 994.

Hydracontiferii constructio, b. 168.

Hydraulica. Definitio, 1.

Hydrostatica. Definitio, f. 1.

Hygrometrum. Definitio, a. 197.

Hygroscopium. Definitio, 197. constructio, 220.

Hyperbole æquatio abscissis a foco computatis, m. 668.

Hypomochlium. Definitio, m. 753.

Hypothesis Galileana de motu gravium, m. 89. & seqq.

Hypothesis Baliani de motu gravium, 102. ejus impossibilitas demonstrata, 115.

I.

Ictus quomodo se habeant in conflictu corporum, m. 567.

Ictus perpendicularis ad obliquum ratio, 552.

Ignis vi quomodo machinæ agitentur, 931.

Impactus directus corporis unius in alterum. Definitio, 523.

Impactus indirectus sive obliquus. Definitio, 526.

Impetus. Definitio, 543.

Incessus hominum quomodo fiat, 226.

Incursum fluidorum eodem modo fieri quando dicatur, b. 276.

Instrumenta quænam ad vestem revocabilia, m. 750.

Instrumenti constructio, quo quantitas salis in aqua falsa exploratur, f. 108. & seqq.

L.

Lampadis constructio, quæ eandem quantitatem olei ellychnio affundit, b. 155.

Lapidis gravitas specifica, f. 77.

Lapsus. Definitio, m. 211.

Lapsus gravium unde pendeat, 222.

Lex motus, 71.

Libella. Definitio, m. 906. constructio, 907. & seqq. rectificatio, 910.

Libellatio aquarum quomodo instituenda, 911.

Libra theoria, m. 779. & seqq. constructio, 782. & seqq. examen, 787. usus, 788. & seqq.

Linea directionis. Definitio, m. 17.

Linea directionis gravium, 212. & seqq.

Linea horizontalis vera. Definitio, 207. qualis sit, 208.

Linea horizontalis apparens. Definitio, m. 209. qualis sit, 210. quando pro vera assumi possit, 218. quomodo ad veram reducatur, 216.

Linea rectæ-centrum gravitatis, 142. centrum oscillationis, 433.

Logarithmica proprietates, 682.

Lumen tubi quid sit, b. 4.

Lunula HIPPOCRATIS centrum gravitatis, m. 169.

M.

M*achina*. Definitio, m. 745.

Machina ingenti ponderi elevando apta, m. 969. ad conterendam materiam pulveris pyrii serviens, 989. & seqq. qua aqua insigni cum impetu elevatur, b. 166.

Machinæ, quibus aqua elevatur, b. 107. & seqq.

Machina composita. Definitio, m. 966. earum numerus, 967. quomodo inveniantur, 968.

Machinamenta hydraulica, b. 161. & seqq.

Magnetis gravitas specifica, f. 77.

Malluvii cum fonticulo saliente constructio, b. 145.

Manometri theoria, a. 151.

Manoscopium. Definitio, a. 160. constructio, 161. & seqq.

Marmoris gravitas specifica, f. 77.

Massa. Definitio, m. 6. quomodo æstimanda, 138. quorumnam corporum æqualis, f. 12.

Massæ corporum quomodo se habeant, f. 21. 22. quando sint ut volumina, 17.

Massæ bonæ ab adulteratis quomodo distinguantur, 83. & seqq.

Materia quamnam cum corpore gravitet, m. 136.

Mechanica. Definitio, m. 1.

Mechanice philosophari quid significet, m. 746.

Metallosum gravitates specificæ, f. 77.

Methodus centrobaryca GULDINI, m. 206.

Miscibilium quantitas in mixto quomodo invenitur, f. 81.

Mobile quando in curva ea lege incedat; ut radius vector verrat areas temporis proportionales, m. 652.

Mola alata, m. 982. frumentariæ, 975.

& seqq. jumentariæ, 981. manuariæ, 979. oleariæ, 983. & seqq. ferrariæ constructio, 992.

Moles. Definitio, 7. quomodo invenitur, 8.

Momentum gravium quid dicatur, m. 147.

Momenta corporum extra centrum gravitatis suspensorum, 153.

Momenta ponderum super plano inclinato spectantium, 271.

Motus. Definitio, m. 2. quando acceleretur, 76. quando in medio resistente nunquam extinguatur, 690. retardetur, 77. quando nullus sequatur, 75. cur naturalis rectilineus, 73. super plano inclinato descendens qualis sit, 284. & seqq. quando per reflexionem non mutetur, 555.

Motus aquabilis. Definitio, m. 24. theoria, 27. & seqq. 31.

Motus acceleratus. Definitio, 67. theoria, 101. & seqq.

Motus animalium explicandi principium, 226.

Motus compositus. Definitio, 238. theoria, 241. & seqq.

Motus corporis impingentis quando cesset, 544.

Motus in conflictu amissus quomodo determinetur, 541.

Motus ex percussione demonstratus, 530. & seqq.

Motus perfecte durorum, 532. & seqq.

Motus elasticorum, 560. & seqq.

Motus

Motus oblique impingentium quomodo determinatur, *m.* 616.

Motus curvatus qualis, 239. quænam ejus causa, 74.

Motus fluminum theoria, *b.* 210. & seqq.

Motus gravis ascendens qualis sit, *m.* 317.

quibus legibus adstringatur, 318. & seqq.

Motus gravium, qua lege acceleretur, 86.

87. in medio resistente, 708. & seqq.

Motus pendulorum demonstratus, 380. & seqq.

Motus projectorum demonstratus, 479. & seqq.

Motus rectilinei in compositum resolutio, 245. 246.

Motus retardatus. Definitio, *m.* 70.

Motus simplex. Definitio, 237.

Motus uniformiter acceleratus. Definitio, 67. ejus ratio, 80. & seqq.

Motus uniformiter retardati ratio, 97. & seqq.

Moveri quando dicatur corpus, 3.

N.

Nervi fidium mutatio quoad longitudinem ob humiditatem aëris, *a.* 218.

O.

Onus ferendum quomodo in data ratione distribuatur, *m.* 235.

Oscillatio. Definitio, 376.

Oscillatio penduli in cycloide quomodo determinetur, 387. quomodo efficiantur isochronæ, 382. & seqq.

Oscillationes pendulorum inter se comparatæ, 392. & seqq.

P.

Parabola curva temporis in motu gravium, *m.* 100. locus celeritatum in motu gravium, 99. via corporis projecti, 480. 482. quomodo describatur, 486.

Parabola æquatio abscissis a foco computatis, *m.* 666. centrum gravitatis, 159. 162. centrum oscillationis, 451. 453. usus in motu fluminum explicando, *b.* 229. & seqq.

Parabole truncatæ centrum gravitatis, *m.* 170.

Parabolarum infinitarum centrum gravita-

tis, *m.* 160. 161. 163. centrum oscillationis, 440. 442. 452.

Parallelogrammi centrum gravitatis, 172. area quomodo invenitur, 194.

Parallelopipedi centrum gravitatis, 172.

Pendulum. Definitio, *m.* 376. cur oscilletur, 380.

Penduli agitatio in latus, 444.

in planum, ibid.

Pendulorum intra cycloides suspensorum longitudines quomodo se habeant, 396. & seqq.

Pendulum simplex. Definitio, 377.

Compositum, 378.

Percussio fluidi. Definitio, *b.* 269. qualis sit, 270. 271. quænam in ea æstimanda respicienda, 272. 273. 274. theoria, 280. & seqq.

Perimetri figuræ irregularis cujuscunque centrum gravitatis, *m.* 191.

Perimetri trianguli centrum gravitatis, 191.

Peritrochium quid dicatur, 756.

Pes horarius. Definitio, *m.* 425. quantitas, 470. quomodo determinetur, 469. num sit mensura universalis, 471.

Plana diversa quomodo ab aëre preman- tur, *a.* 61.

Plana similiter inclinata quænam sint, *m.* 312.

Plani horizontalis determinatio, 219.

Plani inclinati longitudinis ad altitudinem ratio quomodo in praxi facile determinetur, *m.* 277. theoria & praxis, 261. & seqq.

Planum inclinatum. Definitio, 258. quomodo determinetur, super quo datum pondus data vi sustentetur, 268.

Poculi constructio, quo bibenti illuditur, *b.* 74.

Polyspasti theoria & praxis, *m.* 833. & seqq.

Pondus. Definitio, *m.* 748. quomodo hydrostatice invenitur, *f.* 104. quando in aëre minuatur, & augeatur, *a.* 157. ejus vi quomodo machina moveatur, *m.* 890. & seqq. potentia adjuvetur, 896.

Pondus columnæ atmosphericae quomodo invenitur, *a.* 59.

LII 2

Pondus

- Pondus corporis in vacuo* quomodo inveniat, a. 58.
- Pondus appensum* quando corpus in plano horizontali positum e situ horizontali dimovere nequeat, m. 233.
- Pondera super curvis* æquiponderantia, m. 374.
- Ponderum super planis inclinatis* æquiponderantium ratio ad se invicem, 281. 283.
- Ponderis aeris incrementum* ob variatum pondus atmosphæricum quomodo determinetur, a. 159.
- Potentia*. Definitio, 747. cuiam sit æqualis, 763.
- Potentia animata*, 869.
 inanimata, 869.
 movens, 747.
 resistens, ibid.
- Præponderatio corporum duorum extra centrum gravitatis commune suspensorum* quomodo determinetur, m. 152. quomodo plurium, 155.
- Præponderatio fluidi homogenei*, f. 35.
- Pressio fundi vasorum a fluidis*, f. 41. & seqq. quando eadem, 42. 43. 47. 200. quomodo decreseat, 44. 45. si bases vasis fuerint inæquales, 48.
- Pressiones fundi vasorum a fluidis* quam habeant rationem, 46.
- Principium rationis sufficientis*, m. 25. 26.
- Prismatici soliditas* quomodo inveniat, 197.
- Problema Archimædæum* de corona ex auro & argento mixta quomodo solvatur, f. 82.
- Problema de curva isochrona* ad omnem universalitatem revocatum, m. 345.
- Projectilis* motus per spatia horizontalia qualis, 490.
- Projectum horizontaliter vel oblique* qualem lineam describat, 480. 482.
- Projectio horizontalis*. Definitio, m. 476. qualis hinc oriatur motus, 480.
- Projectio obliqua*. Definitio, 477. qualis hinc oriatur motus, 488.
- Projectio perpendicularis*. Definitio, m. 479. quinam hinc oriatur motus, 479.
- Projectionis curva* quomodo inveniat, directionibus gravium suppositis parallelis, 516. iisdem suppositis convergentibus in centro Telluris, 518.
- Pyramidis truncata* centrum gravitatis, 184.
- Q**uantitas materia in diversis corporibus quomodo per pendula definitur, m. 406. & seqq. quod ponderi proportionalis, 412.
- Quantitas motionis*. Definitio, 22. 23.
- Quantitas motus*. Definitio, m. 22. 23. quando ante & post conflictum eadem, 581. 585. quando non, 582. & seqq. quando augeatur, 588. quando minuat, 589. in corporibus homogeneis quomodo se habeat, 139.
- Quies*, Definitio, m. 2.
- Quies* ex ictu corporum resultans, 533. 538. gravium unde pendeat, 222.
- R.
- R**adius vector. Definitio, m. 655.
- Rarefactio*. Definitio, a. 8.
- Rarefactio aeris* evicta, a. 23. quomodo eadem aqua expellatur, b. 91.
- Rarius*. Definitio, f. 10. quod specificè levius densiori, 11.
- Rectanguli* centrum oscillationis, m. 435. 448.
- Reflexio corporis oblique impingentis* qualis sit, m. 556.
- Reflexionis lex* analytice investigata, 557.
- Resistentia*, quam patiuntur corpora per fluida mota, b. 301. & seqq.
- Resistentia medii*. Definitio, m. 677. quomodo determinetur, 679. & seqq.
- Rosarii constructio*, b. 118. 119.
- Rota directæ*. Definitio, m. 899. constructio, 923. quomodo vi aquæ agitetur, 920.
- Rota retrograda*. Definitio, 899. quomodo vi aquæ agitetur, 924. & seqq.
- Rota simulis instructa* quomodo construatur, b. 120.

um dentatarum & radiatarum lineæ constructio, m. 997.

S.

Salis quantitas in aqua salsa quomodo determinetur, f. 108. & seqq.

Saltus aquæ per lumen horizontale, h. 58. & seqq. per verticale, 49. & seqq. vi æris compressi factus quantus sit, 96. & seqq. 101. vi rarefacti factus quantus, 102.

Sectala quænam vocentur, m. 757.

Sectio alvei. Definitio, h. 188.

Sectio alvei naturalis, 190. qualis figura, 192.

Sectio alvei artificialis, 190. qualis figura, 193.

Sectio alvei tardior, 196.
velocior, ibid.

Sectiones æquivalentes. Definitio, h. 195. 209.

Sectio fluminis. Definitio, m. 39. quomodo inveniatur, 914. 915.

Sectiones diversæ fluminis quam habeant rationem, 916.

Sectoris circuli centrum gravitatis, 166.

Segmenti circuli centrum gravitatis, m. 168.

Segmenti spheræ centrum gravitatis, 177.

Segmentorum circuli ratio, 364.

Segmentorum curvarum similium ratio, 364.

Semicirculi centrum gravitatis, 167.

Semita projectilis. Definitio, m. 488. quomodo describatur, 510. parameter quomodo inveniatur, 491.

Similitudinis principiorum in Geometria fecunditas, 365.

Sipho anatomicus, f. 52. usus, ibid.

Siphonis interrupti constructio & usus, h. 77. & seqq.

Siphonum constructio, 64. 66.

Sicula baculo supra mensam posito appensa quando non decidat, m. 233.

Solidum quanta sui parte mergatur, f. 94. quando profundius mergatur, 96. 97.

quando datum intra fluidum locum server, 98.

Solidum minimæ resistentiæ quomodo inveniatur, h. 319.

Solidorum æquiponderantium in partes fluido submersæ quando æquales, f. 102.

Sollicitatio ad motum. Definitio, m. 110. quomodo determinetur ex lege accelerationis, 112. in motu composito quomodo se habeat, 253.

Spatium motus. Definitio, m. 12.

Spatii parabolici mixtilinei centrum gravitatis, m. 189.

Specificæ gravius. Definitio, f. 6. quod sit densius, 9.

Specificæ levius. Definitio, f. 5. quod rarius, 11. quando fundo vasis incumbens a fluido non attollatur, 100. quando specificæ graviori connexum in fluido non ascendat, 118. 122. & seqq. 127.

Sphæræ centrum gravitatis, m. 178. centrum oscillationis, 460.

Sphæroidis elliptici centrum gravitatis, 181. 182. centrum oscillationis, 465.

Sphæroidis elliptici segmenti centrum gravitatis, 180.

Sphæroidis truncati centrum gravitatis, 185.

Spiritus vini quantum rarefiat, a. 152.

Statica. Definitio, m. 1.

Statera constructio, 774. & seqq.

Sulphuris gravitas specifica, f. 77.

Superinceffus radens, m. 936.
volvens, 937.
mixtus, 938.

Symmetria corporis humani ratio, 227.

Syrinx quomodo construatur, h. 107. quo impetu aqua expellatur, 108. 109.

T.

Tempus motus, Definitio, m. 11.

Tempus descensus per planum inclinatum, 309. & seqq. per curvam quomodo determinetur, 353. quomodo per convexitatem curvæ, 354.

Tempora descensus per plana similiter inclinata, 314. & seqq. per curvas similes & similiter positas, 316.

Tempora, quib. vasa deplentur, h. 41. & seqq.

Temporis curva in motu gravium, m. 100.
Tendentia. Definitio, 255.

Tendentia media. Definitio, 255. quomodo invenitur, 256.

Thermometrum. Definitio, a. 196.

Thermoscopium. Definitio, 196. constructio, 198. 202. & seqq. in usu notanda, 214.

Tractio. Definitio, m. 872.

Trabendo quomodo machina moveatur, 878. 879. 887.

Trabendo & deprimendo simul quomodo machina moveatur, 882.

Trabendo & protrudendo simul quomodo machina moveatur, 884.

Trajectoria quænam linea dicatur, m. 519. quomodo invenitur ex lege virium centripetarum, 664.

Trajectoria quomodo invenitur si vis centripeta fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris, 669. quomodo hujus æquatio invenitur, 670.

Trianguli centrum gravitatis, 158.

Trianguli aquicruri centrum oscillationis, 436. & seqq. 449. 450.

Trochlea. Definitio, m. 759. theoria & praxis, 826. & seqq.

Trudendo movere quid sit, 870.

Trudendo quomodo machina moveatur, 870.

Tubus in Hydraulica quid dicatur, b. 3.

Tubus Torricellianus. Definitio, a. 87. symptomata, 91. & seqq. 120. & seqq.

Turres Bononiensis & Pisana inclinata cur a lapsu immunes, m. 225.

Tympani constructio, quo aqua elevatur, b. 120.

U.

V *Alvula*. Definitio, b. 104. constructio, 106.

Vas ad hortos irrigandos aptum quomodo construatur, 163.

Vasa concordæ quomodo construuntur, 180.

Vellis. Definitio, m. 749. usus in expli-

candis instrumentis & motibus malium, m. 751. theoria in hypothesi directionum perpendicularium, 765. in hypothesi obliquarum, 272. & seqq. praxis, 768.

Vellis heterodromus. Definitio, 755. homodromus, 754.

Velocitas. Definitio, m. 13. quid proprie sit, 16. qua diagonalis in motu composito describitur, quanta sit, 247. 248.

Velocitatis in motu composito quantitas ab angulo directionis dependens, 251.

Velocitates aquarum per tubos fluentium quomodo sint inter se, b. 11.

Velocitas media aquæ in fluminibus, 208.

Ventus. Definitio, a. 166. celeritas quomodo determinetur, 167. & seqq. quomodo oriatur, 185. & seqq. ex baroscopio prædicatur, 188. 189.

Venti vi quomodo machina agitetur, m. 919.

Venti artificialis excitatio, a. 194. 195. ad flammam conservandam, b. 176. & seqq.

Versando movere quid sit, m. 875.

Versando quomodo machina moveatur, 880.

Vis requisita ad corpus in situ horizontali sustentandum, m. 230. ad grave super plano inclinato retinendum, 262. ad motum gravis impediendum, 267. ad solidum submersum attollendum, f. 92. ad specifice levius a fluido graviore ad ascensum urgendum, 99. ad solidum in fluido specifice leviori sustentandum, 126. ad vas vacuum in aquam immergendum, 113. ad specifice levius sub fluido graviore detinendum, 114. 120. 121. ad solidum in fluido demergendum, 106. qua solidum in fluido ascendit, 107.

Vis ulla num perdat, 116.

Vires æquales quænam sint, m. 275.

Vires æquiponderantium quomodo assemandæ, 146. 273. 274.

Vis

Vis centralis in omni curva quomodo se habeat, *m.* 657. in circulo, 658. & seqq. sectione conica quavis, 660. curva qualibet quomodo inveniatur, 662.

Vires centrales in circulo quomodo sese habeant, 623. & seqq.

Vis centrifuga. Definitio, *m.* 617.

Vis centripeta. Definitio, 619. quando urgeat corpus in linea curva motum versus aliquod punctum, 65.

Vires conspirantes quamnam sint, *m.* 238.

Vires fluidi in percussione quomodo sese habeant, 280. & seqq.

Vis mortua. Definitio, 910. quomodo æstimanda, 278.

Vires mortuæ quando sicut velocitates, *m.* 280.

Vis motrix. Definitio, 9.

Vires percutientes aquarum rotas molares agitantium quomodo ad mensuram revocentur, *b.* 286. & seqq.

Vis resistendi. Definitio, *m.* 20.

Vis venti, qua alas molendini convertit, *b.* 315.

Vis viva. Definitio, *m.* 9. 10.

Vires vivæ corporum quomodo æstimandæ, 325. & seqq.

Volumen. Definitio, *m.* 7.

Volumen solidi pondere alteri æqualis quomodo inveniatur, *f.* 80.

FINIS INDICIS QUINTI.

VI.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO III. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *o.* Opticam, *c.* Catoptricam, *d.* Dioptricam, *p.* Perspectivam, *f.* Sphærica & Trigonometricam sphæricam, *a.* Astronomiam, numeros vero §§. designare: ubi autem nulli numeri adscribuntur, eosdem referri ad literam præcedentem.

A.

A*D*nata quid sit, *o.* 23. ejus usus, 23.

Adspectus. Definitio, *a.* 926. signa, 929. momentum, quo celebratur, quomodo inveniatur, 936.

Æquatio centri. Definitio, *a.* 652. quomodo inveniatur, 687.

Æquationis pars physica, *a.* 688.

optica, ibid.

Æquationum Tabulæ quomodo construantur, *a.* 688.

Æquatio luminis, quid dicatur in theoria Lunæ, *a.* 857.

Æquatio menstrua Lunæ. Definitio, *a.* 844. quomodo inveniatur, 851.

Æquatio temporis. Definitio, *a.* 714. quomodo inveniatur, 715.

Æquationum temporis Tabulæ quomodo construantur, *a.* 726.

Æquator. Definitio, *a.* 48. proprietates, 49. 50. quomodo ab horizonte dividantur, 83. quomodo a meridiano, 84.

Æquatoris

Aëuatoris & horizontis interseſſio qualis ſit, a. 88.

Aëuatoris arcus inter horizontem & meridianaum interceptus quantus ſit, 89.

Aëquinoëtium. Definitio, a. 158. quomodo obſervetur, 653.

Aër num intensitatem luminis minuat, o. 90. 92.

Aëris altitudo quomodo inveniatur, a. 405.

Algebræ uſus in Catoprica, c. 112. & ſeqq. in Dioptrica, d. 487. & ſeqq.

Altitudo apparenſis ſideris. Definitio, a. 73. quomodo obſervetur, 109.

Altitudo luminofi. Definitio, o. 145.

Altitudo meridiana quomodo obſervetur, a. 129. 137. 142. Solis quomodo computetur, 202.

Altitudinis meridiane meſura, 95.

Altitudo minor quantum officiat viſioni remotioris, o. 255. & ſeqq.

Altitudo nonageſimi. Definitio, a. 220. cuiam æqualis, 221. quomodo inveniatur, 222.

Altitudinis nonageſimi Tabulæ quomodo computentur, a. 223.

Altitudo obiectiva quomodo ſe habeat ad perſpectivam, p. 54. quomodo exhibeatur, 55.

Altitudo oculi. Definitio, p. 21.

Altitudo poli quomodo inveniatur, a. 147. 154. ejus meſura, 96.

Altitudo puncti apparentis in tabula quomodo ſe habeat ad altitudinem oculi, p. 32.

Altitudo Solis quomodo ex umbra corporis inveniatur, o. 147. quomodo computetur, 215.

Altitudo ſtellæ. Definitio, a. 73. meſura, 94. quomodo ad datum tempus inveniatur, 300.

Altitudo vera. Definitio, a. 73.

Altitudines quomodo ex umbra reperiuntur, o. 153. & ſeqq. quomodo ope quadrati geometrici inveniuntur, 174.

& ſeqq. quomodo mediante ſpeculo,

c. 64. quando appareant inclinæ, o. 326. 327. quando erectæ, 328.

Altitudines apparentes quando æquales, a. 104.

Altitudines meridiane quomodo obſerventur, a. 129. 137. 142.

Altitudinum differentie quænam viſu non dignoſcantur, o. 250.

Altitudinum meridianarum obſervatarum utilitas in Aſtronomia, a. 130.

Amphibleſtroides. Definitio, o. 30.

Amphora ſive *Aquarius*, a. 160.

Amplitudo occidua. Definitio, a. 195. meſura, 196. quomodo ope globi inveniatur, 320. 322.

Amplitudo ortiva. Definitio, a. 195. meſura, 196. fixæ quomodo computetur, 265. quomodo ope globi inveniatur, 322. Solis quomodo computetur, 206. quomodo ope globi inveniatur, 318.

Amplitudinum ortivarum Tabulæ quomodo condantur, 207.

Anaclyſtica. Definitio, d. 1.

Anamorphoſis Definitio, p. 105. quomodo fiat, 106. & ſeqq. in ſuperficie conica convexa, 111. in concava, 113. in pyramide multilatera, 112. pro polyedro, d. 277.

Anamorphoſis mechanica, p. 109. 115.

Anamorphoſes quomodo adſpiciendæ, 114.

Anamorphoſes quomodo ſiant pro ſpeculo cylindrico, c. 290. pro conico, 301. pro pyramidal, 304.

Anamorphoſium pro ſpeculo cylindrico perſciendarum theoria, 254. & ſeqq.

Anguloſa quando appareant rotunda, o. 280. 281.

Anguli ſpecies in Triangulo rectangulo ſphærico quomodo determinetur, ſ. 133.

Angulus ad nodum orbitæ Cometæ quomodo inveniatur, a. 1138.

Angulus ad Solem. Definitio, a. 650. ad Terram, 762.

Angulus

Angulus circuli latitudinis cum via penumbrae quomodo invenitur, a. 1067.
Angulus commutationis. Definitio, a. 760. quomodo invenitur, 761.
Angulus eclipticæ cum meridiano quomodo in dato puncto computetur, 204.
Anguli eclipticæ cum meridiano Tabula quomodo condantur, 205.
Angulus elongationis. Definitio, a. 762. quo nodo supputetur, 792.
Angulus incidentiæ. Definitio, c. 19. d. 11.
Angulus inclinationis. Definitio, d. 12.
Angulus opticus, seu visorius. Definitio, o. 107.
Angulus orientis quomodo computetur, a. 218.
Angulus parallacticus. Definitio, a. 370. mensura, 371.
Angulus reflexionis. Definitio, c. 21.
refractionis. Definitio, d. 13.
Angulus refractionis. Definitio, d. 14. quomodo computetur, 30.
Angulorum refractorum & refractionis Tabula, d. 32.
Angulus sphericus. Definitio, f. 5. mensura, 31.
Angulorum sphericorum ratio, 43.
Animalia num dentur in Luna, a. 488. num in planetis, 526.
Anni solaris magnitudo quomodo invenitur, 669. quanta sit, 671.
Annulus circa Lunam in eclipsi Solis totali apparens, a. 454.
Annulus Saturni, a. 516. 517.
Anomalia. Definitio, a. 646.
Anomalie motus annuus quomodo invenitur, 706.
Anomalia coæquata. Definitio, a. 650. quid sit, 651. quomodo invenitur, 686. 690. 697.
Anomalia eccentrici. Definitio, a. 649. quomodo invenitur, 690.
Anomalia media s. simplex. Definitio, a. 647. mensura, 648. quomodo invenitur, 648.

Welfii Oper. Mathem. Tom, V,

Anomalia media secundo coæquata respondens pro Luna quomodo invenitur, a. 852.
Anomaliarum Solis Tabula quomodo construuntur, 707.
Anomalia secundo æquata pro Luna quomodo invenitur, a. 854.
Anomalia vera. Definitio, a. 650.
Aphelium. Definitio, 636.
Aphelii locus quomodo invenitur pro planetis superioribus, 734. pro inferioribus, 743. pro Tellure, 674. 810. ubinam sit ad A. 1700. in planetis superioribus, 739. in inferioribus, 745.
Aphelii motus annuus quomodo invenitur in planetis superioribus, 737. in inferioribus, 746. quantus sit in superioribus, 739. in inferioribus, 747.
Apogæum. Definitio, a. 636.
Apogæi solaris motus annuus quomodo invenitur, 702.
Apogæi solaris motuum Tabula quomodo construuntur, a. 703.
Apogæi Lune locus ad A. 1700. 835.
Apparentia. Definitio, p. 22.
Apparentia lineæ, ibid.
planæ, ibid.
solidi, ibid.
Arachnoides, o. 34.
Aranea, 34.
Arcitenens, a. 160.
Arcus quando instar rectæ appareat, o. 275. 276.
Arcus æquatoris datus quo tempore per meridianum transeat quomodo computetur, a. 211.
Arcus inter centra. Definitio, a. 945. quomodo invenitur, 946. & seqq.
Arcus latitudinarius in eclipsi terrestri. Definitio, 1069. 1070. quomodo invenitur, 1084.
Arcus visionis. Definitio, a. 281. quomodo determinetur, 286. quantus sit, 288.
Argumentum latitudinis. Definitio, a. 769.
Argumentum latitudinis mensuræ Definitio, 844. quomodo invenitur, 846.

Mmm

Argumen-

Argumentum menstruum latitudinis. Definitio, a. 870.

Aries. 160.

Ascensio obliqua. Definitio, a. 191.

Ascensio obliqua Solis quomodo inveniatur, 208. 209. quomodo ope globi reperitur, 318.

Ascensio obliqua stellæ fixæ quomodo inveniatur, 266. 267. quomodo ope globi inveniatur, 322.

Ascensionum obliquarum Tabulæ quomodo condantur, 210.

Ascensio recta. Definitio, 190.

Ascensio recta fixæ quomodo observetur, 228. quomodo computetur, 260. 261. 264. quod sit mutabilis, 235.

Ascensio recta puncti dati eclipticæ quomodo computetur, a. 204.

Ascensio recta Solis quomodo inveniatur ope globi, 313.

Ascensionum rectarum singulorum graduum eclipticæ Tabulæ quomodo condantur, 205.

Ascensionum rectarum duarum fixarum differentia quomodo inveniatur, 226. 227.

Asterismi quid sint, 245. eorum nomina, ibid.

Astrognoſia quibus adminiculis juvetur, 248.

Astronomia. Definitio, 1.

Astronomia spherica. Definitio, 2.
theorica. Definitio, 3.

Atmosphæra Solis stabilita, 419. 444. 446. figura ejus, 447.

Atmosphæra lunaris stabilita, 486.

Aurora. Definitio, d. 393.

Axis incidentiæ. Definitio, d. 9.
lentis. Definitio, 21.


mundi. Definitio, 44.

opticus. Definitio, o. 340.

partis conii umbrosi quomodo reperitur, a. 1049.

refractionis. Definitio, d. 10.

sphæra. Definitio, f. 9.

Azimuthum. Definitio, a. 194. eius  *sura.* 197.

Azimuthum solis quomodo inveniatur, 206. quomodo ope globi, 318.

Azimuthum stellæ quomodo inveniatur, 302. quomodo ope globi, 320. 322. B.

B*asis Tabulæ* quid in Perspectiva dicatur, p. 12.

Biceps quando quis appareat in speculo plano, c. 113.

Biquintilis quinam adſpectus fit, a. 931. C.

C*alor* quomodo ope speculorum concavorum intendatur, c. 226. 227.

Camera obscura quid sit, o. 79. 80. effectus ejus demonstratus, 119. & seqq. quomodo accuratior construatur, d. 236.

Cancer quid significet in Astronomia, a. 160.

Caper sive *Capricornus* quid significet in Astronomia, 160.

Capire ad pedes alterius jacentem quando quis se videat in speculo plano, c. 115.

Capire truncatum quando quis se videat in speculo plano, c. 113.

Caput Draconis. a. 819.

Cardines mundi. Definitio, a. 80.

Cardo meridiei. Definitio, ibid.

Cardo occidentis. Definitio, 80. quomodo inveniatur, 126.

Cardo orientis. Definitio, 80. quomodo inveniatur, 126.

Cardo orientis & occidentis quomodo sibi invicem opponantur, 102.

Cardo septentrionalis. Definitio, 130.

Catalogus fixarum quomodo construatur, 244. a quibusnam constructus, ibid.

Cathetus incidentiæ. Definitio, c. 16. in quonam sit plano, 39.

Cathetus obliquationis. Definitio, c. 18.

Cathetus reflexionis. Definitio, 17. in quonam sit plano, 39.

Catini ad polienda vitra commodi quomodo parentur, d. 527. & seqq.

Catoptrica

Catoptrica. Definitio, c. 1. principia, 24. & seqq.
Catoptrica analytica, 312. & seqq.
Cauda Dracopis, a. 819.
Celeritatum apparentium ratio, c. 359. & seqq.
Centrum mediorum motuum ubinam sit, a. 680.
Centrum penumbrae ubi sit, a. 1050.
Choroides, o. 27.
Ciliare ligamentum, 29.
Ciliares processus, 29.
Circulorum maximorum sphaerae proprietates s. 15. & seqq. 25. & seqq.
Circulorum minorum sphaerae proprietates, 36. & seqq.
Circulorum sphaera in planum projectio quando recta, quando circulus, 152.
Circuli excursuum. Definitio, a. 187.
Circuli polares. Definitio, 184. quales sint circuli, 185.
Circuli sphaerae mundanae sive caelestis. Definitio, 41. quomodo optime dignoscantur, 189.
Circulus quomodo projiciatur, p. 47.
Circulus equinoctialis. Definitio, a. 53. quod vulgo cum aequatore confundatur, 55.
Circulus declinationis. Definitio, 78. proprietates, 79.
Circulus diurnus. Definitio, a. 56.
 eccentricus. Definitio, 641. 642.
 latitudinis. Definitio, a. 239.
 immutus. Definitio, 43.
 mobilis. Definitio, 42.
 polaris arcticus, ibid.
 antarcticus, 184.
Circulus verticalis. Definitio, 93. quomodo horizontem sensibilem intersect, 93.
Cistula catoptrica, in qua objecta alia videntur, si per aliud foramen inspexeris, c. 119. in qua objecta videntur cistula majora, 259.
Caeli figura apparens, a. 10. motus apparens, 11. & seqq.

Cognitio rerum naturalium quotuplex, a. 627.
Colorum theoria optica, o. 183. & seqq.
Columnarum scenographia, p. 71.
Coluri. Definitio, a. 186.
Colurus aequinoctiorum, ibid.
 solstitiorum, ibid.
Cometae. Definitio, a. 1131. qualia sint corpora, 1168. num mundo coaeva corpora, 1158. an sint supra Solem, 1171. an supra Lunam, 1151. & seqq. num habeant parallaxin sensibilem, 1148.
Cometarum phaenomena, 1167. motus qualis appareat, 1161. caudae quid sint, 1173. longitudo & latitudo quomodo inveniatur, 1132. ascensio recta & declinatio quomodo inveniatur, 1134. quomodo distantia a Sole, 1135. motus proprius, 1136. distantia a Terra quamnam requiratur, ut datum tempus super horizonte consumant, 1150.
Conclave speculari quomodo construatur, c. 138. 139.
Coni scenographia, p. 64.
Conjunctio planetarum. Definitio, a. 535. 928. signum, 929.
Conjunctio corporalis, 935.
 centralis, 935.
 magna, 933.
 maxima, 933.
 platica, 935.
Conjunctionis Luna cum Sole vise momentum quomodo inveniatur, 999.
Conjunctiones planetarum inferiorum cum Sole quomodo observentur, 728.
Conspicilla. Definitio, d. 478.
Contigua & continua quando videantur visibilia, o. 69.
Conus penumbrosus. Definitio, a. 1040. quid proprie sit, 1044. quousque exporrigatur, 1042.
Coni penumbrosi angulus quantus sit, 1045. 1048. similitudo cum cono umbroso, 1047.

Conus umbrosus quem situm habeat respectu penumbrosi, a. 1043.
Coni umbrosi Lunæ axis quomodo inveniatur, 1025.
Coni umbrosi Terræ longitudo quomodo inveniatur, 939.
Coni umbrosi Terræ & Lunæ quales sint eodem tempore, 1024.
Cornea tunica. Definitio, o. 18. proprietates, 19. cur sit tenax, 22.
Corpus quando instar superficiæ appareat, 274.
Corpus diaphanum. Definitio, 11.
 illuminatum, 10.
 lucidum, 9.
 luminosum. ibid.
Corpus opacum. Definitio, o. 12. quando tegat oculo visibilia, 411. & seqq.
Corpus pellucidum. Definitio, 11.
 perspicuum, ibid.
Cosæcantes quando ad cotangentes prope accedant, d. 51. quando sint ut cotangentes quam proxime, 52.
Craticula ætÿpi in anamorphosis, p. 106. c. 292.
Craticula prototypi in anamorphosis, p. 106. c. 292.
Crepusculum. Definitio, a. 393. causa, 395. quando per integram noctem duret, 400. quo tempore hoc fiat quomodo inveniatur, 401.
Crepusculum matutinum. Definitio, a. 393. quando incipiat, 394. initium quomodo inveniatur calculo, 402. quomodo ope globi, 404.
Crepusculum Solis secundum quomodo observatum, a. 440. undenam sit, 443. 444.
Cubi ex angulo visi scenographia, p. 58.
Culminare quando stella dicatur, a. 133.
Culminatio stellæ. Definitio, 133. quomodo observetur, 134. quomodo computetur, 269.
Curtatio. Definitio, 772.
Curtationum Tabulæ quomodo construantur, 720.

Curvarum versus eandem partem quænam major, f. 48.
Curvilineæ figuræ projectio, p. 48.
Cylindri scenographia, 60.

D.

Decilis, a. 931.
Declinatio. Definitio, 75. qualis sit, 76. 77.
Declinatio eclipticæ quomodo observetur, a. 183. quomodo computetur, 198.
Declinatio maximæ eclipticæ quomodo observetur, 163. 168. quanta observata fuerit, 165. an sit mutabilis, 166. 167.
Declinatio Solis quando sensibiliter non muteur, 117. 118. quomodo ope globi inveniatur, 313.
Declinationum Solis circa solstitium differentie quomodo ope gnomonis præalti determinentur, 664.
Declinationum Solis a maxima paulo ante & post solstitium differentie quomodo se habeant, 661. & seqq.
Declinatio stellæ fixæ quomodo computetur, a. 260. 263. quomodo ope globi inveniatur, 311. an sit mutabilis, 233. 234. num in eadem rotatione muteur, 115.
Delineatio accurata objecti cujuscunque quomodo fieri possit, p. 3.
Descensio obliqua. Definitio, a. 192. quomodo computetur, 207. quomodo inveniatur ope globi, 320. 322.
Diameter apparens Lunæ quomodo muteur, 555. in Sole insensibilis, 1019.
Diameter apparens Planetarum quomodo observetur, a. 548. quantæ singulorum observatæ fuerint, 557.
Diameter apparens Solis quomodo observetur, 547. 548. quanta observata, 553.
Diametri apparentis Solis, Lunæ & planetarum magnitudo variabilis, 549.
Diameter penumbre. Definitio, o. 1050.
Diameter spheræ. Definitio, f. 9.
Diameter vera sideris quomodo inveniatur, a. 912. ejus ratio ad diametrum Solis quomodo inveniatur, 909. quanta sit, 911.

Diameter

Distantia vera planetarum in semidiametris Terræ quomodo inveniantur, a. 919. quanta sit uniuscujusque, 920. & seqq.

Diameter umbræ Lunæ, 1029.

Diei longitudo quomodo computetur, a. 213. quomodo ope globi inveniantur, 321.

Dies solares quod sint inæquales, 709.

Dierum solarium æquatio quomodo inveniantur, 715. æqualium & inæqualium differentia, 711.

Differentia ascensionalis. Definitio, a. 193. quomodo computetur, 206. 265.

Differentia ascensionalium Tabulæ quomodo condantur, 207.

Differentia descensionalis. Definitio, 193.

Differentiarum horariorum meridianorum Tabulæ quomodo construantur, 980.

Digitus ecliptici. Definitio, 950. quomodo inveniantur in Lunæ eclipsi, 951.

Digitus ecliptici Solis quomodo inveniantur, a. 1001. quomodo in eclipsi terrestri inveniantur, 1097.

Dioptra objectiva, a. 106. ocularis, 106.

Dioptra telescopica cur adhibeantur, 108.

Dioptrarum telescopicarum positio quomodo examinetur, 131.

Dioptrica. Definitio, d. 1.

Dioptrica analytica, 487. & seqq.

Directio planetæ. Definitio, a. 531.

Discus Terræ. Definitio, 1013.

Disjuncta quando contigua videantur, o. 308. quando continua, 309. 310.

Distantia duorum punctorum in superficie spheræ, f. 54.

Distantiarum differentie quænam visu non dignoscantur, o. 250.

Distantia Cometæ a Terra quomodo inveniantur, a. 1147.

Distantia curtata. Definitio, 771. quomodo inveniantur, 789.

Distantia Lunæ a Terra quomodo varietur, 556.

Distantia planetæ a Sole quomodo inveniantur, 812.

Distantia planetæ a Terra quomodo supputetur, a. 792.

Distantia Solis vera a Terra quomodo inveniantur, 894. & seqq.

Distantia Solis maxima & minima a Terra ubinam sit, 554.

Distantia Solis a nodo & apogeo lunari. Definitio, 841.

Distantia stellarum quomodo observetur, 225.

Dodecatemorion. Definitio, 188.

E.

E*ccentricitas. Definitio*, a. 638. 639.

Eccentricitas in ellipti, 679.

Eccentricitas Lunæ constans, 835.

Eccentricitas Lunæ menstrua quomodo inveniantur, 847.

Eccentricitas orbitæ ellipticæ Telluris quomodo inveniantur, 810.

Eccentricitas planetarum quanta, 750.

Eccentricitas planetarum superiorum quomodo inveniantur in orbita circulari, 734. quomodo in elliptica, 813.

Eccentricitas planetarum inferiorum quomodo inveniantur, 749.

Eccentricitas Solis quomodo inveniantur, 675. 678. quanta sit, 682.

Eclipsis Lunæ. Definitio, a. 937. quomodo appareat, 458. quænam ejus causa, 459. quid sit, 461. cur ubique ejusdem magnitudinis, 462. ejus magnitudo, 951. initium, medium, finis & duratio quomodo inveniantur, 971. typus quomodo describatur, 976. quomodo supputetur, 974. observetur, 977. 978.

Eclipsis Lunæ partialis. Definitio, 937. quando sit, 948.

Eclipsis Lunæ totalis. Definitio, 937. phænomena, 463.

Eclipsis Lunæ totalis cum mora. Definitio, 937. quando sit, 948.

Eclipsis Lunæ totalis sine mora. Definitio, 937. quando sit, 948.

Eclipsium lunarium termini necessarii. Definitio, 943. quomodo reperiantur, 944.

Mmm 3

Eclips

Eclipsium lunarium termini possibiles. Defin-
finito, a. 943. quomodo reperiantur,
944.

Eclipsis satellitum Jovis, a. 502. 505. 510.

Eclipsis Solis. Definitio, 982. quando ac-
cidat, 984. 985. quomodo appareat,
448. quænam ejus causa, 449. & seqq.
cur non in omnibus locis eodem mo-
mento accadat, 1081. quomodo suppu-
retur, 1008. observetur, 1010. o. 303.
initium & finis, a. 1004. 1101. duratio
quomodo invenitur, 1005. termini
quomodo determinentur, 995. 996.
typus quomodo describatur, 1007. ubi
totalis videatur, 1075. 1079. ubi par-
tialis, 1078. 1080. ubi nulla, 1077.

Eclipsis solaris totalis phænomena, 454.

Eclipsis Solis CHRISTO patiente num fuerit
præternaturalis, 986.

Eclipsis Terræ. Definitio, a. 1011. quan-
do detur, 1072. 1073. 1074. quomo-
do appareat Selenitis, 1037. termini
quomodo reperiantur, 1082. initium
& finis quomodo inveniantur, 1085.

Ecliptica. Definitio, 157. divisio, 160.
qualis sphaeræ circulus, 171. ejus situs,
172. & seqq.

Eclipticæ declinatio maxima quomodo ob-
servetur, 163. quanta observata fuerit,
165.

Ecliptica in disco Terræ. Definitio, a. 1059.
situs in eodem, 1060.

Elevatio poli. Definitio, 99. quomodo in-
venitur, 200. quomodo observetur,
154. super disco Terræ cuinam æqualis,
1086.

Elevatio æquatoris. Definitio, a. 99. men-
sura, 100. quomodo observetur, 154.
quomodo invenitur, 200.

Ellipsis quando instar circuli appareat,
o. 282. quando in parabolam degene-
ret, a. 1163.

Ellipseos descriptio per data tria puncta,
809. proprietates quædam, 803. & seqq.

Engstropium. Definitio, d. 402.

Epactæ. Definitio, a. 963. quomodo in-
veniantur, 965.

Epocharum Tabula quomodo construan-
tur, 719. 754.

Epochæ motus medii & apogei Solis quo-
modo constituentur, 718.

F.

F*aciem & tergum quomodo simul specie-*
mus in speculo plano, c. 109. 118. 129.

Facule solaris num dentur, a. 429.

Fasciæ in Jove observatæ, 499.

in Saturno observatæ, ibid.

Fenestrarum scenographia, p. 75.

Fenestrarum apertarum scenographia, 79.

Flamma e longinquo visa cur major appa-
reat, quam in vicinia, o. 265. 266.

Flamma candela quando appareat rotun-
da, o. 307.

Figura apparentia per quænam detur, p. 31.

Figura visio, o. 272. & seqq.

Figura curvilinea projectio quomodo fiat,
pag. 35.

Figura mixtilineæ projectio, 36.

rectilineæ projectio, 34.

Figura rotunda oblonga seu ovalis quando
instar circuli appareat, o. 282.

Figura vera polyoni regularis & circuli
quando videatur, o. 286. quando non,
287.

Fixæ (stellæ) quomodo in asterismos dis-
tinguantur, a. 246. quænam semper ap-
pareant, quæ semper lateant, quomodo
inveniantur, 277. quo lumine fulgeant,
1119. quid sint, 1120. quantæ sint,
1121. an habeant planetas circa se, 1122.
1123. num habeant parallaxin sensibi-
lem, 384. num sint Terra majores, 109.
num ultra Saturnum a Tellure distent,
1110. num inæqualiter a Terra distent,
1114. cur aliæ aliis minores appareant,
1115. num mutantur, 1129.

Fixæ in plures divise quænam subinde ob-
serventur, 543.

Fixæ per vices apparentes ac disparentes,
1124. & seqq.

Fixæ

Fixarum magnitudinis quantæ per telescopium apparent, a. 1111.

Fixæ temporaria, 1127.

Fixarum aberrationes annuæ, 605. num parallaxis eardem annua recte inde colligatur, 606. quanta hæc esse debeat, 607.

Fixarum distantia a Terra quomodo invenitur, 1116. quanta æstimetur, 1117.

Fixarum mora supra horizontem quomodo inveniatur, a. 268.

Fixarum magnitudines apparentes, 249.

Fixarum multitudo evicta, 1113.

Fixarum occultationes a planetis factæ, 542.

Fixarum a Luna occultandarum figura ovalis observata, 475. causa quænam sit, 476.

Focus. Definitio, d. 22. quomodo determinetur in lentibus convexis, 186. 217. 221. quomodo in meniscis, 298. quomodo in superficie spherica convexa, 89. 90.

Focus virtualis. Definitio, 23. quomodo determinetur in lente concava, 282. 290. quomodo in meniscis, 312.

Fulcrum telescopii longioris quomodo construatur, d. 382.

Fulguratio in medio disci Lune in eclipsi Solis totali observata, 454.

G.

Gemini, a. 160.

Globus celestis. Definitio, a. 303. constructio, 305. 309. usus, 311. & seqq. quomodo ad cæli situm componatur, 316.

Globus descendens quomodo representari possit tanquam ascendens, c. 73.

Gnomonis astronomici constructio & usus, a. 137. & seqq.

Gravitas coeorporis num in omnibus Terræ locis eadem, 569. 570.

H.

Heliocopium. Definitio, d. 465. constructio, 467.

Hemisphærium quomodo totum ab oculo conspici possit, o. 427.

Hemisphærium australe, sive meridionale mundi, a. 52.

Hemisphærium boreale sive septentrionale mundi, a. 51.

Hemisphærium inferius cæli, 65.

superius cæli, 64.

Homines num dentur in Luna, 488. num in planetis ceteris, 516.

Hora diei quomodo ex Solis altitudine eruatur, a. 216.

Horizon. Definitio, 61. quomodo a meridiano secetur, 84. quomodo a circulo verticali, 85.

Horizon apparens, sive sensibilis. Definitio, 66. proprietates, 67. poli ejus ubinam sint, 90.

Horizon occiduus. Definitio, 69.

ortivus. Definitio, 68.

Horizon rationalis, sive verus. Definitio, 61. proprietates, 62. 63. situs, 86. poli ubinam sint, 60.

Horologii motus quomodo rectificetur, vel probetur, 297.

Horopter. Definitio, o. 341.

Humor aqueus. Definitio, 33.

Humor crystallinus. Definitio, 34. figura, 35. 36. usus, 61. & seqq. effectus, 75.

Humor vitreus. Definitio, 37.

Hypothesis latitudinis Lune, a. 873.

Hypothesis Lune, 839. 84.

I.

Iannuarum in pariete scenographia, p. 71.

Iannuarum aperturarum scenographia, 77.

Ichnographia geometrica. Definitio, p. 23.

Ichnographia perspectiva, sive projecta. Definitio, p. 25. quomodo fiat, 33. & seqq.

Imago visibilis qualis in oculo delineetur, o. 62. & seqq. quando clarior, 77. qualis sit in presbytæ oculo, 383. qualis in oculo myopis, 386.

Imaginis locus in speculo concavo, c. 232. & seqq. 253. & seqq. in speculo convexo, 166. 167. 168. in planis, 51. & seqq.

Imago qualis sit in speculo concavo, 252. & seqq. in convexo, 183. in cylindrico, 280. & seqq. in cylindricis cavis, 298. & seqq.

seq. cur videatur in libero aëre, c. 100. in speculis planis, 60. quanta sit in speculo concavo, 240. & *seqq.* in convexo, 155. 175. 178. 179. 180. qualis appareat per vitrum planum, d. 83. qualis post lentem convexam, o. 387. & *seqq.* d. 224. & *seqq.*

Imago inversa post lentem convexam quomodo sistatur erecta, c. 231. 233. 334.

Imago lucidi cur multiplex videatur in speculo plano, c. 88.

Imago obiecti quomodo multiplicetur in speculis planis, c. 93. 100. 104. 106. 110. 112. 126. 127. quando verticalis appareat horizontalis & contra, 70. 71. quando infra horizontem situ inverso appareat, 57. 58. quando post speculum longius distare videtur, quam ante ipsum abest, 134. & *seqq.*

Imago prototypo similis quomodo mechanice delineetur, p. 110.

Imago deformis quomodo formosa restituatur per speculum cylindricum, c. 290. conicum, 301. pyramidale, 304.

Imagines monstroſæ quomodo in speculis planis exhibeantur, 112. 113. 114. 116.

Inæqualia quando appareant æqualia, o. 252. & *seqq.*

Inæqualitas prima. Definitio, 773.

Inæqualitas secunda, sc. motus planetarum, 775.

Inæqualitas Lunæ prima seu soluta, 823.

Inæqualitas Lunæ altera seu menstrua, 824. phænomena, 838.

Inæqualitatis tertiæ in motu Lunæ phænomena, 855.

Inclinatio. Definitio, a. 767. maxima quomodo observetur, 773. quanta sit in singulis planetis, 784.

Inclinationum Tabulæ quomodo construuntur, 785.

Inclinatio incidentis radii. Definitio, c. 22.

Inclinatio limitis menstrui. Definitio, a. 872. quomodo inveniat, 876.

Inclinatio planorum qualis, f. 97.

Inclinatio radii reflexi. Definitio

Inclinatio viæ penumbrae. Definitio, a. 1065. quomodo inveniat, 1066.

Incole planetarum num dentur, 527.

Insulae in Luna, 480.

Intensitas luminis. Definitio, o. 81. quando non metetur, 86. quomodo se habeat, 85.

Intervallum planetae. Definitio, a. 640. quomodo inveniat, 685.

Jovicola quantæ magnitudinis, 527.

Iris oculi, o. 25.

Jupiter. Definitio, 3. quale sit corpus, 505. 524. similitudo cum Tellure, 525. motus vertiginis, 496. figura ovalis in occultatione per Lunam facta, 475. 476.

Jupiter Jovialis, 501.

L.

L *Asteris species* in triangulo rectangulo spherico quomodo determinetur, f. 133.

Laterna magica. Definitio, d. 464. constructio, 470. quomodo in microscopium convertatur, 476. 477.

Latitudo. Definitio, a. 768.

Latitudo Lunæ simplex. Definitio, a. 865.

Latitudo Lunæ vera. Definitio, o. 867. quomodo inveniat, 880.

Latitudo Lunæ visæ. Definitio, 987. quomodo inveniat, 988. quomodo computetur in momento synodi visæ, 1000. quomodo inveniat initio & fine eclipsis Solis, 1006.

Latitudo menstrua. Definitio, 869. quomodo inveniat, 878.

Latitudo planetae quomodo observetur, 559. quomodo inveniat, 795. quomodo supputetur, 814.

Latitudo stellæ. Definitio, 236. mensura, 237. 238. quomodo inveniat, 243. 261. quomodo inveniat ope globi, 312. an sit mutabilis, 251.

Latitudo umbræ. Definitio, 1053.

Latitudo umbræ apparens. Definitio, 1055. quomodo inveniat, 1056.

Leo,

Lenis definitio, d. 15.
Lentes caustica. Vide *Vitra caustica*.
Lentes causticae ex glacie confectae, 201.
Lentes convexae quomodo refringant lumen, 266. & seqq.
Lentes hyperbolicae num sphaericis praestent, 325.
Lentis convexae effectus, o. 73. 75.
Lentis obiectivae apertura in telescopio quomodo determinatur, d. 394. ejus necessitas, 395. 398.
Lentium plano-convexarum theoria, 166. & seqq.
Lentium utrinque convexarum theoria, 184. & seqq.
Lentium concavarum theoria, 279. & seqq.
Leo, a. 160.
Libra, 160.
Limites in orbita Lunae, 872.
Linea apparentia per quam detur, p. 31.
Linea apsidum. Definitio, a. 636.
Linea apsidum postio quomodo determinetur, 674. 754. 743. quomodo in orbita elliptica planetarum superiorum inveniatur, 813.
Linea brevissima quam sit in superficie sphaerae, f. 53.
Linea distantiae. Definitio, p. 15. quam sit, 16.
Linea fiduciae quam dicatur, a. 107.
Linea fundamentalis. Definitio, p. 11.
Linea horizontalis in Perspectiva. Definitio, 17. qualis sit, 18.
Linea incidens. Definitio, c. 14.
Linea incidentiae. Definitio, d. 4.
Linea meridiana. Definitio, a. 81. situs, 82. quomodo inveniatur, 120. usus, 125. 128.
Linea obiectiva. Definitio, p. 27.
Lineae parallelae quando convergentes appareant, o. 227. & seqq.
Linea recta quando instar puncti appareat, o. 722.
Linea recta apparentia qualis, p. 28.
Linea reflexionis. Definitio, c. 15.
Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Linea refractionis. Definitio, d. 5.
Linea terrae. Definitio, p. 11.
Loci optica. Definitio, o. 334. theoria, 335. & seqq.
Loci visio, 308. & seqq.
Loci dati distantia a centro penumbrae quomodo inveniatur, a. 1099.
Locus ad eclipticam reductus. Definitio, 757. quomodo inveniatur.
Locus centricus planetae, 755.
Locus eccentricus in ecliptica. Definitio, 757.
Locus eccentricus in orbita. Definitio, 755. quomodo supputetur, 756.
Locus geocentricus. Definitio, 758.
Locus heliocentricus. Definitio, 757. quomodo ex geocentrico inveniatur, 812.
Locus imaginis in speculo ubinam sit, c. 41.
Locus imaginis in speculo concavo, convexo, 151. 152. 154. & seqq. plano.
Locus Lunae filius. Definitio, a. 862. prope verus, ibid.
Locus verus, ibid. quomodo supputetur, 863.
Locus medius Solis quomodo inveniatur, 704.
Locus opticus. Definitio, 364.
Locus opticus apparens. Definitio, 365.
Locus opticus verus. Definitio, ibid.
Locus physicus sideris. Definitio, a. 363.
Locus Solis in ecliptica quomodo observetur, 203.
Locus Solis verus quomodo supputetur, 720. & seqq.
Locus Terrae ubi Sol totus eclipsatus oritur vel occidit, quomodo determinetur, 1093.
Locus Terrae ad quem pervenit centrum penumbrae quomodo determinetur, 1094.
Loci Terrae quibus Sol oritur & occidit in principio ac fine eclipsis terrestris quomodo determinetur, 1092.
Longitudines quam visus comprehendere possit, o. 148. & seqq.
Longitudo Luna visa. Definitio, a. 989.
N n n quo-

quomodo inveniatur, a. 990. 997.
Longitudo planetae quomodo observetur, 559.
Longitudo planeta vera quomodo supputetur, 814.
Longitudo stellae. Definitio, a. 241. quomodo inveniatur, 243. 263. quomodo inveniatur ope globi, 312. quomodo ad datum annum computetur, 259.
Longitudo stellarum fixarum quomodo mutetur, 251. quando uno gradu augeatur, 258.
Lucerna lumen valde intensum projiciens quomodo construitur, d. 208.
Lumen. Definitio, o. 4. 5. quomodo propagetur, 45. 46. num unum officiat propagationi alterius, 99. & seqq. quomodo intendatur per lentes convexas, d. 203. & seqq. quomodo per specula concava, c. 224. & seqq. quomodo debilitetur per specula convexa, 191. & seqq. 195. per concava, 228. 229. quomodo in coloribus mutetur, o. 183. & seqq. quomodo reflectatur a speculis planis, 55. convexis, 144. & seqq. concavis, 208. & seqq. cylindricis, 277. 278. cylindricis concavis, 294. & seqq. ellipticis, 310. 311. quomodo refringatur in superficiebus planis, d. 49. & seqq. in lentibus convexis, 166. & seqq. utrinque convexis, 184. & seqq. concavis, 279. & seqq. sphaeris pellucidis, 178. & seqq. lentibus plano-convexis, 166. & seqq. superficiebus sphaericis, 87. & seqq.
Luminis a duobus luminosis propagati ratio, o. 104. & seqq.
Lumen propagatum per radios convergentes quomodo crescat, 89.
Lumen propagatum per radios divergentes quomodo decrescat, 87. 88.
Lumen album quod sit mixtum, o. 186.
Lumen coloratum solare immutabile, 201. & seqq.
Lumen diurnum unde, a. 407. 408.

Lumen Lunae undenam sit, a. 997.
Lumen Solis quomodo reflectatur a speculis parabolicis, c. 306. & seqq. cur non intendatur per reflexionem a speculis planis, 66. quomodo refringatur in lentibus plano-convexis & convexo-convexis, d. 197. quomodo in coloribus mutetur, 271. 272. quomodo per lentem concavam debilitetur, 228.
Lumen Solis per foramen angulosum transiens quando figuram circuli assumat, 296. & seqq.
Luminis solaris per foramen radiantis figura qualis sit, o. 290. & seqq.
Luminis solaris radii heterogenei quomodo a se invicem separentur, 200.
Lumen zodiacale a quibusnam observatum, a. 436. 440. quid sit, 437. & seqq. 441. & seqq.
Luna quale sit corpus, a. 453. 469. 479. unde lumen habeat, 460. cur sit luminare magnum, 457. ex qua materia constet, 484. an semper aequae distincte videatur, 473. an Terræ semper eandem faciem obvertat, 1103. quod Telluri propior quam Sol, 452. quando in umbra Terræ incidat, 940.
Luna atas media quomodo inveniatur, 959. 966.
Luna diameter apparens quomodo observetur, 548. quanta sit, 549.
Luna distantia a Terra quomodo invenitur, 888. 889. quanta sit, 893.
Luna eclipsata colores, 463. eorum causa, 464. causa diversitatis, 465. 466.
Luna illuminatio quomodo fiat, 455. 456. ejus causa, 460. a Terra facta, 914.
Luna magnitudo, 915.
Luna montes, valles & maria, 479.
Luna motus proprius quomodo innouetur, 23. 24.
Luna orientis & occidentis figura ovalis seu elliptica, 475. ejus causa, 476.
Luna similitudo cum Tellure, 487.
Lunatio. Definitio, a. 817.

Lux claudiales, a. 501.

Lanula. Definitio, d. 20.

Lux. Definitio, o. 4. 5.

Lux clarior quibusnam conducatur ad videndum, 396.

Lux debilior quibusnam conducatur ad videndum, 395.

Lux nimia quod visui officiat, 390.

M.

Machina anamorphotica cylindrica, c. 293. conica, 302.

Machina catoptrica, in qua objecti imago multiplicatur, 137. in qua una multiplicatur & deformatur, 118.

Machina catoptrico-dioptrica. Definitio, d. 458.

Machina hydromantica, in qua imago spectatori pro arbitrio oculis subducitur & adduci potest, d. 86.

Machina politoria quomodo construatur, c. 48. d. 539.

Macule Lunæ quales observentur, a. 468.

Macule Lunæ novæ, 468. quales sint, 472.

Macularum Solis phænomena, 411. theoria, 412. & seqq. motus, 422. undenam prodeant, 416. quid sint, 417. quomodo observentur, 427.

Macule Veneris, 494.

Magis myops quinam dicatur, d. 480. qualia ei conveniant perspicilla, 482.

Magis presbyta quinam dicatur, 120. qualia ei conveniant perspicilla, 522. quomodo determinentur, 523.

Magnitudo quando in vicinia minor appareat, quam in distantia remotiori, o. 254.

Magnitudinis visio, 209. & seqq.

Magnitudo apparens. Definitio, 208.

Magnitudinum apparentium theoria, 212. & seqq.

Manus sine corpore quando appareant in speculo plano, c. 113.

Maria in Luna num dentur, a. 479.

Mars. Definitio, 34. quale corpus, 524. similitudo cum Tellure, 525. phases, 491. motus vertiginis, 496. distantia

a Terra, a. 899.

Mediatio celi. Definitio, 272. quomodo invenitur, 273. quomodo ope globi invenitur, 315.

Medius motus Solis quomodo invenitur, 672.

Mediorum motuum Solis Tabula quomodo construatur, 673.

Mediorum motuum planetarum superiorum Tabula quomodo construatur, 733.

Mediorum motuum planetarum inferiorum Tabula quomodo construatur, 753.

Mediorum motuum Lunæ Tabula quomodo construatur, 827.

Meniscus. Definitio, d. 20. theoria, 295.

& seqq. quando æquipoleat lenti utrinque æqualiter convexæ, 301. 302. quando plano-convexæ, 304. 305. quando sphaeræ, 306. 307. quando utrinque concavæ, 315. 316. quando plano-concavæ, 317. 318. quæ nam sit lens caustica, 324.

Menisci elliptici & hyperbolici num prærent phæricis, 325.

Menisci improprie quænam dicantur, 322.

Menisci proprie quænam dicantur, 322.

Mensis anomalisticus. Definitio, a. 818. quantitas quomodo invenitur, 832.

Mensis draconiticus. Definitio, 819. quantitas quomodo invenitur, 831.

Mensis periodicus. Definitio, 816. quantitas, 835. quomodo ea invenitur, 825.

Mensis synodicus. Definitio, 817. quantitas, 835. quomodo ea invenitur, 825.

Mercurius. Definitio, 36. phases, 491. 538. in Sole observatus, 492. num circa axem gyretur, 498.

Mercurii digressiones maxima a Sole quomodo observentur, 740.

Mercurius Jovialis, 507.

Meridianus. Definitio, 72.

Meridianorum differentia horaria quomodo invenitur, 979.

Meridianus universalis. Definitio, 1087. positio super disco Terræ quomodo invenitur, 1089.

N n n 2

Meri-

Meridiei momentum quomodo observetur, a. 124.

Micrometri constructio & usus, 544. & seqq. *Microskopium*. Definitio, d. 402. quomodo optima parentur, 456.

Microskopii aquei constructio, 436.

Microskopium compositum. Definitio, 405. constructio, 439.

Microskopii reflectentis constructio, 452. inventor, 453.

Microskopium simplex. Definitio, 404. theoria, 407. & seqq. constructio, 421.

Micropscopia simplicia ex sphaerulis constantia quomodo fiant, 431. theoria, 423. & seqq. constructio, 434.

Minus presbyta quinam dicatur, 520. qualia ei convenient perspicilla, 522. quomodo determinentur, 523.

Mobilia quando quiescere videatur, o. 361. & seqq. 374. quando retrogradi, 368.

Modulus pro speculis sphaericis concavis fundendis quomodo paretur, c. 199.

Monoculus quando quis appareat in speculo plano, c. 113.

Montes in Luna num dentur, a. 479.

Montium lunarium altitudo quomodo invenitur, 917. nomina, 918. umbrae, 483.

Montes in Venere observati, 493.

Motus visio, o. 354. & seqq.

Motus anomalie quid sit, a. 820.

Motus aphelii Tabula pro planetis superioribus quomodo construuntur, 737. quomodo pro inferioribus, 746.

Motus apogei lunaris diurnis, 835.

Motus communis five diurnus, 21.

Motus horarius Lunæ & Solis verus quomodo invenitur, 968.

Motuum horariorum Lunæ & Solis verorum Tabula quomodo construuntur, 969.

Motus horarius in eclipsi terrestri. Definitio, 1068.

Motus horarius Lunæ a Sole visus. Defini-

tio, 4. 994.

Motus imaginis in speculo plano, c. 95. & seqq.

Motus latitudinis Lunæ diurnus, a. 836.

Motuum latitudinis Tabula pro Luna quomodo construuntur, 832.

Motus librationis. Definitio, 1104. causa, 1106.

Motus Lunæ ab apogeo diurnus, 836.

Motus Lunæ a Sole quid sit, 820. quomodo invenitur, 828.

Motus Lunæ a Sole visus quomodo invenitur, 998.

Motus Lunæ in latitudinem quid sit, 820.

Motus lunaris phenomena, 821. 822.

Motus medius. Definitio, 643. quidnam ad eum determinandum requiratur, 644.

Motuum mediorum Tabula quomodo construuntur, 673. 827.

Motus medius Lunæ diurnus, 835.

Motuum nodorum Tabula quomodo construuntur, 779.

Motus nodi Lunæ diurnus, 835.

Motus periodicus in longitudinem quid sit, a. 820.

Motus planetarum phenomena observata, 562. & seqq. demonstrata, 571. & seqq.

Motus primus. Definitio, a. 21. primi mobilis, 21.

Motus proprius, five secundus. Definitio, 30.

Motus proprius fixarum qualis sit, 252. quantitas annua quomodo invenitur, 255.

Motus vertiginis Lunæ, 1107. Solis, 422. 423. planetarum, 496. & seqq.

Motus verus. Definitio, 645.

Mundus num in Astronomia pro sphaera cava haberi possit; cujus superficiei stellæ affixæ, 18.

Myops. Definitio, o. 384. quinam sit, 401.

402. cur in luce minore legere possit quam presbyta, 408. cur legat scripturam minutam, 426. cur remota in spe-

culo

Convexo distinctius videat, quam directe, c. 193. qualia perspicilla ei conveniant, d. 479. quomodo hæc determinentur, 483. 485. quomodo se ligantur, 525.

N.

N*odis longitudo quomodo inveniatur, a. 213. quomodo ope globi inveniat, 321.*

Nodus. Definitio, 765.

Nodus australis, 765.

ascendens, ibid.

borealis, ibid.

descendens, ibid.

Nodi planeta quomodo observentur, 777.

Nodorum planetarum locus ad A. 1700. 780. motus quomodo inveniatur, 778.

Nodus orbita cometa quomodo inveniat, 1138.

Nodi Lune quomodo moveantur, 830. eorum locus quomodo inveniatur, 819.

Nonagesimus. Definitio, 220.

Novilunium medium quomodo supputetur, 959. 967. ejus epocha quomodo inveniatur, 960.

Novilunium verum quomodo supputetur, 970.

O.

O*bjectum quodnam videatur, o. 47. ubi videatur, 58.*

Objectum oculo testum quando videatur in speculo plano, c. 132.

ad Objectum procul remotum quando nunquam perveniat, o. 370.

Objectum totum quando visu comprehendatur, 237. quando non, 238.

Objectum valde minutum quando distinctius videatur, 425.

Objectum verum per polyedrum visum quomodo discernatur ab apparentibus, d. 274.

Obliquitas ecliptice quid & quanta sit, a. 178.

Observationes astronomica. Definitio, 5.

Observationes communes, a. 4.

Occasus siderum. Definitio, 19.

Occasus acronychus. Definitio, 279. quomodo inveniatur, 285.

Occasus cosmicus. Definitio, 278. quomodo inveniatur, 285. quomodo ope globi inveniatur, 319.

Occasus heliacus. Definitio, 280. quomodo inveniatur, 293. quomodo ope globi inveniatur, 331.

Occasus Solis quomodo computetur, 214. quomodo ope globi inveniatur, 320.

Occasus stellæ fixæ quomodo inveniatur, 270. quomodo ope globi inveniatur, 322.

Obilis, 931.

Oculus. Definitio, o. 16. 17. structura explicata, 78. quantum uno obrutu capiat spatium, 235. 236. quando ad objectum accedens & ab eodem recedens objectum idem semper videat sub eadem magnitudine, 232. 233.

Oculi artificialis constructio, 79.

Oculus valens quinam dicatur, 379. quinam sit, 404. 405. 406.

Oppositio planetarum. Definitio, a. 536. 528. signum, 929.

Oppositio planetarum superiorum & Solis quomodo observetur, 727.

Oppositio visibilis directæ. Definitio, o. 267. obliqua, ibid.

Optica. Definitio, o. 1. significatus latior, 2.

Orbita cometarum quales sint, a. 1164. 1165. 1166.

Orbita planetarum ellipticæ quomodo primum detectæ, 681. earum axis minor quomodo inveniatur, 696. & seqq.

Orbita Solis a circulari parum differt, 676.

Orbitarum dimensiones in semidiametris terrestribus quomodo inveniuntur, 907.

quantæ sint, 908.

Ortus siderum. Definitio, a. 19.

Ortus acronychus. Definitio, 279. quomodo inveniatur, 284.

Ortus cosmicus. Definitio, 278. quomodo inveniatur, 319.

inveniat, *a.* 283. quomodo ope globi inveniat, 319.
Ortus heliacus. Definitio, 280. quomodo inveniat, 293. quomodo ope globi reperiatur, 331.
Ortus Solis quomodo computetur, 214. quomodo ope globi reperiatur, 318.
Ortus stelle fixæ quomodo inveniat, 271. quomodo ope globi inveniat, 322.

P.

P*arallaxis.* Definitio, *a.* 367. theoria, 379. & seqq. quomodo altitudinem immutat, 368. quid proprie sit, 369. ubi nulla, 328. quomodo ascensionem & descensionem rectam & obliquam, declinationem, latitudinem & longitudinem mutet, 372.
Parallaxis altitudinis quomodo inveniat, 388. quomodo comete, 1145. quomodo Lunæ, 887.
Parallaxis ascensionis. Definitio, 375. quomodo inveniat, 390.
Parallaxis ascensionis rectæ fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
Parallaxis declinationis. Definitio, 374. quomodo inveniat, 390.
Parallaxis declinationis fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
Parallaxis descensionis. Definitio, 375. quomodo inveniat, 390.
Parallaxis latitudinis. Definitio, 377. quomodo inveniat, 390. 391.
Parallaxis latitudinis fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
Parallaxis longitudinis. Definitio, 376. quomodo inveniat, 390. 391.
Parallaxis longitudinis fixarum. Definitio, 596. qualis inveniat, 598. 599.
Parallaxis fixarum annua. Definitio, *a.* 596. quinam ea observare tentaverint, 600. & seqq. quanta sit, 608.
Parallaxis fixarum absoluta. Definitio. *a.* 596. an semper eadem, 597.
Parallaxis horizontalis quomodo inve-

niatur, *a.* 387.
Parallaxis horizontalis Lunæ quanta sit, 892.
Parallaxium horizontalium Lunæ Tabula quomodo construantur, 891.
Parallaxis horizontalis Solis quomodo inveniat, 895.
Parallaxis Lunæ a Sole. Definitio, 99. quanta sit, 992.
Parallaxis Martis diurna quomodo observetur, 897. & seqq.
Parallaxis Orbis. Definitio, 763. 776. mensura, 764. quomodo supputetur, 792.
Parallaxis Veneris diurna quomodo observetur, 897. & seqq.
Parietum scenographia, *p.* 71.
Pars media quænam dicatur in Trigonometria spherica, *s.* 92.
Partes conjunctæ triangulorum sphericorum quænam dicantur, 93.
Partes laterales quænam dicantur in triangulo spherico, *s.* 115.
Partes secundæ trianguli spherici quænam dicantur, 95.
Particula exfors. Definitio, *a.* 844. quomodo inveniat, 850.
Pavimentum lapidibus stratum quomodo projiciatur, *p.* 46.
Penduli ad singula minuta secunda oscillantis longitudo quomodo in diversis Telluris locis se habeat, *a.* 567.
Peninsula in Luna, 430.
Pentagoni regularis projectio, *p.* 49.
Penumbra. Definitio, *a.* 1039. quantum spatium in Terra occupet quomodo determinetur, 1058. via ejus quomodo in globo terrestri vel mappa geographica delineetur, 1095.
Perigeum. Definitio, 635.
Perihelium. Definitio, 635. quomodo locus ejus observetur, 674.
Perihelii Telluris locus quomodo inveniat, 810.
Periodis planetarum circa solem quæ in singulis, 732. 752. 800.

Perpen-

Picula *lucularia* quando in speculo convexo videantur eversa, c. 182.

Perspectiva. Definitio, p. 1.

Perspiciilla. Definitio, d. 478. qualia myopibus convenient, 479. 482. qualia presbytis, 519. quomodo selignantur, 525.

Phases Lunæ quomodo se habeant, a. 455.

Pylarum scenographia, p. 71.

Pisces, a. 160.

Planeta. Definitio, 31. quomodo dignoscantur, 37. signa, 38. quomodo moveantur circa Solem, 633. 634. quomodo secunda inæqualitate exuantur, 812. quomodo locus eorum in globo dato tempore exhibeatur, 314. quinam Soli opponantur, 537.

Planetarum distantia a Sole quomodo reperiantur, 796. quantæ sint, 797. 904.

Planetarum distantia a Terra quomodo inveniantur, a. 903. quantæ sint, 904. & seqq. num varient, 550. & seqq.

Planetarum motus proprius quomodo innotuerit, 28. 29.

Planetarum occultationes, 541.

Planetarum orbitæ quomodo se habeant respectu Terræ, 590.

Planetarum ratio ad Terram quoad superficiem & soliditatem, 921. 922.

Planetarum semidiametri veræ quomodo inveniantur, 919. quantæ sint, 920.

Planeta directus quando dicatur, 534. retrogradus, 534. stationarius, 534.

Planeta inferiores quinam dicantur, 489. eorum revolutio circa Solem quomodo inveniantur, 731.

Planeta primarii. Definitio, 529. quinam sint, 631.

Planeta secundarii. Definitio, 529. quinam sint, 631.

Planeta superiores. Definitio, 489. revolutio circa Solem quomodo inveniantur, 729.

Planæ num dentur in Luna, 488.

Planum quomodo refringat lumen, d. 49. & seqq.

Planum geometricum. Definitio, p. 8.

horizontale, 9.

horopteris, 343.

objectivum, 27.

perspectivum, 7.

refractionis, d. 8.

verticalè, p. 10.

Plenilunium medium quomodo supputetur, a. 959. 967.

Pleniluniorum mediorum epocha quomodo inveniantur, 961.

Plenilunium verum quomodo supputetur, 970.

Polemoscopium. Definitio, d. 460. constructio, 468.

Poli circuli in sphaera. Definitio, f. 12.

Poli eclipticæ distantia a polo mundi, a. 178.

Poli meridiani ubinam sint, 87. qualia sint puncta, 88.

Poli Mundi Definitio, 46. num sint mutabiles, 132. num in eadem revolutione mutantur, 114.

Poli sphaera. Definitio, f. 11.

Polyedrum quidnam dicatur in Dioptrica, d. 262. ejus theoria, 263. & seqq. usus in camera obscura, 276.

Polyoptrum. Definitio, 466. constructio, 470.

Presbyta. Definitio, o. 381. quinam sit, 398. 399.

Prismatis scenographia, p. 56. scenographice delineati umbra, 85.

Prismatis cavi scenographia, 70.

Prismatis in aëre penduli umbra, 92.

Prismatis quinquangularis cavi scenographia, 59.

Profunditas. Definitio, a. 73. mensura, 94.

Profunditas vera, 73. *apparens*, 73.

Profunditatis poli mensura, 96.

Profunditas Solis quomodo observetur, 287. quomodo sub finem crepusculi vespertini

- vespertini & initium matutini invenia-
tur, a. 397.
- Projectio*. Definitio, p. 22.
- Projectio lineæ, plani, solidi*, ibid.
- Projectio monstruosa*. Vide Anamorphosis.
- Promontoria Lunæ*, a. 481.
- Proportionalium quætitatum symptoma*
quoddam, f. 145.
- Prosthaphæresis*. Definitio, 652.
- Puncta accidentalitæ* quænam in Perspectiva
dicantur, p. 80.
- Puncta æquinoctialia*. Definitio, a. 158.
ubinam sint, 177.
- Puncta solstitialia*. Definitio, 159. ubinam
sint, 177. quomodo sibi invicem oppo-
nantur, 169. 170. quanto intervallo
distant ab æquatore, 176.
- Punctum æstivum*. Definitio, 159.
autumnale, 158.
brumale, sive hibernum, 159.
- Punctum concursus*. Definitio, d. 22. in
superficiebus planis, 73. & seqq. quo-
modo in his determinetur, 76. in su-
perficie cava, 112. & seqq. quomodo in
hac determinetur, 113. quomodo in
superficie sphaerica cava, 145. quomo-
do in convexa, 122. 155.
- Punctum dispersus*. Definitio, 23. in super-
ficiebus planis, 56. & seqq. in vitris
planis, 57. & seqq. in superficie conca-
va, 104. & seqq. in superficie sphaerica
concava, 139. in superficie sphaerica
convexa, 96. & seqq. 121. 128. 133.
- Punctum distantie*. Definitio, p. 19.
- Punctum eclipticæ*, cum quo stella culminat,
quomodo determinetur, a. 232. quo-
modo inveniat, cum quo oritur, 282.
- Punctum incidentie*. Definitio, c. 13. d. 7.
- Punctum objectivum*. Definitio, p. 27. ap-
parentia quomodo exhibeatur, 33.
- Punctum oculi*, sive visus. Definitio, 13.
ubinam sit, 14.
- Punctum oriens eclipticæ* quomodo com-
putetur, a. 218.
- Punctum principale*, p. 13.

Punctum radians. Definitio, o. 8.
reflexionis, c. 13.
refractionis, d. 7.
suboculare, c. 283.
verticale, a. 58. 59. 60.
vernale, 158.

Pupilla. Definitio, o. 26. magnitudo va-
riabilis, 55. & seqq. qualis in oculo va-
lente, 394.

Pyramis optica. Definitio, p. 4.

Pyramidis basi insistentis scenographia, 62.

Pyramidis scenographice delineatæ umbræ,
88. 90.

Pyramidis truncatæ scenographia, 65. 67.

Quadrantis astronomici constructio,
a. 106.

Quadrati apparentie quomodo invenian-
tur, p. 40. 42. 44.

Quadratum quando instat trapezii appa-
reat, o. 283.

Quadratum geometricum quale sit instru-
mentum & quomodo construatur,
172. usus, 174. & seqq.

Quadratus quinam adpectus dicatur, a.
928. ejus signum, 929.

Quies mobilis apparens, o. 361. & seqq. 374.

Quiescens quando moveri videatur, 366.

374 quando in plagam contrariam mo-
veri videatur, 369. 376. & seqq.

Quincunx quinam adpectus dicatur, a. 931.
R.

Radices motus Solis medii & apogei quo-
modo constituantur, a. 718.

Radicum mediorum motuum & aphelii pro
planetis superioribus Tabula quomodo
construantur, 736.

Radicum nodorum Tabula quomodo con-
struantur, 779.

Radiare quando visibile dicatur, o. 13.
quænam corpora radiant, 14. quomo-
do radiant, 59. 60.

Radiatura locus. Definitio, 15.

Radii colorati, rubens, flavus &c. Definitio;
177. num mutantur per reflexionem, 187.

Radii

convergentes quando haberi possint pro parallelis, o. 93. 94. quando in pupillam fere paralleli incident, 95.

Radii obliqui in superficie cava, d. 139.

& seq. in convexa refractio, 121. & seq.

Radii optici. Definitio, p. 5.

Radii paralleli quomodo in plana superficie refringantur, d. 49. quomodo in cava, 104. quomodo in convexa, 87. & seqq.

Radiatorum divergentia, o. 49.

Radius luminis. Definitio, o. 6.

Radius directus, 7.

incidentis, c. 14. d. 4.

Radius obliquus quomodo refringatur, d. 56. & seqq.

Radius perpendicularis cur intensior obliquo, o. 84.

Radius reflexus. Definitio, c. 15.

refractus, d. 5.

Rectangulum quando instar trapezii appareat, o. 283.

Reductio ad eclipticam. Definitio, a. 770. quomodo inveniat, 786.

Reductionum Tabula quomodo construantur, 787.

Reflexibilitas radiorum. Definitio, o. 181.

major, 182.

minor, ibid.

Reflexibilitas radiorum diversa evicta, 195. & seqq.

Reflexionis lex, c. 24. & seqq.

Reflexio luminis. Definitio, 38. evicta, 50.

53. 54. quid dicatur in theoria Lunæ, a. 857.

Refrangibilitas radiorum. Definitio, o. 179.

major, 180.

minor, ibid.

Refrangibilitas radiorum diversa evicta, 190. & seqq.

Refractio. Definitio, o. 39. evicta, 54. in vitro qua lege fiat, d. 25. 26. in aqua, 28. in spiritu vini & ære, ibid.

Refractionis lex prope vera, d. 33. 34. 39. vera, 25. & seqq. 42.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V,

Refractionis lex quomodo per experimenta detegatur, d. 24. quomodo a priori analytice, 36.

Refractionum Tabula, a. 349.

Refractio luminis in atmosphæra, a. 334. quod augeat altitudinem Solis & stellarum, 335. quomodo mutet ascensionem rectam, obliquam, declinationem, 352. longitudinem item & latitudinem, 353. num sit in dato loco constans, 341. ubi maxima, 344. quomodo decreascat versus zenith, 344. an eadem in Sole & stellis, 345. quomodo observetur, 347.

Refractio altitudinis. Definitio, 355.

Refractio ascensionis & descensionis. Definitio, 356. quomodo inveniat, 360.

Refractio declinationis. Definitio, 356. quomodo inveniat, 360.

Refractio latitudinis. Definitio, 359. quomodo inveniat, 361.

Refractio longitudinis. Definitio, 358. quomodo inveniat, 361.

Regula catholica Trigonometriæ sphericæ, f. 112.

Regula sinuum catholica in Trigonometria, 101. 102.

Regula tangentium catholica in Trigonometria, 109. 110.

Remotiora quando appareant sublimiora, o. 318. 319. 323. quando depressiora, 321. 322. 325. quomodo appareant ad dextram vel sinistram sita, 330. 331.

Remotius quando tardius moveri videatur, 354. quando eadem celeritate, 355.

Remotorum visio qualis sit, 314.

Representatio. Definitio, p. 22.

Rerum super pavimento elevatarum scenographia, 76.

Retina, o. 30.

Retrogradatio mobilis apparens, o. 368.

Retrogradatio planetæ. Definitio, a. 535. explicata, 587. 588. 591. 592.

Revelatio planetarum circa Solem quomodo determinetur, 729. 751. 782.

S.

Satellites planeta. Definitio, a. 489. distantia verè a suis primariis quomodo inveniuntur, 923.

Satellites Jovis a quonam fuerint detecti, 500. qualia sint corpora, 504. quales sint planetae, 530.

Satellitum Jovis figura, 509. maculae, 510. atmosphæra alterabilis, 511. tempora periodica quomodo inveniuntur, 882. eclipses, 502. 505. distantia a Jove, 924.

Satellites Jovis spurii, a. 519. qualia sint corpora, 523.

Satellites Saturni, 519. quomodo observati, *ibid.* quales sint planetae, 530.

Satellitum Saturni distantia a Saturno, 884. 925. eclipsis, 520. 521. tempora periodica quomodo inveniuntur, 882.

Saturnus. Definitio, 32. quale corpus, 523. 524. num circa axem gyretur, 498.

Saturni facies qualis observetur, 513. 514. similitudo cum Tellure, 525. a Luna occultandi figura ovalis, 475. hujus causa, 476.

Saturnus Jovialis, 501.

Scenographia. Definitio, p. 26. quomodo fiat, 55. & seqq.

Scenographia mechanica, 87.

Sclerotica tunica. Definitio, o. 21. cur sit tenax, 22.

Scorpius, a. 160.

Scrupula defectus. Definitio, 949. quomodo inveniatur pro Luna, 951. quomodo pro Sole, 1001.

Scrupula dimidia durationis. Definitio, 952. quomodo inveniuntur in eclipsi lunari, 956. quomodo in solari, 1003.

Scrupula dimidia moræ. Definitio, 953. quomodo inveniuntur, 957.

Scrupula emerſionis. Definitio, 955. quomodo inveniuntur, 958.

Scrupula incidentiæ, sive casus. Definitio, 954. quomodo inveniuntur, 958.

Scrupula menstrua longitudinis. Definitio,

a. 842. quomodo inveniuntur, 100.

Scrupula latitudinis. Definitio, 871.

Œctio quid dicatur in Perspectiva, p. 6.

Œctio obliqua coni scaleni quando circulus, f. 151.

Œctio obliqua cylindri qualis sit, c. 276.

Œctoris circuli ad arcum circuli ratio, a. 683.

Semidiametri apparentes Lunæ & Solis quomodo ad datum tempus inveniuntur, 972.

Semidiametrorum apparentium Lunæ & Solis Tabula quomodo construuntur, 973.

Semidiameter apparens penumbra. Definitio, 1055. quomodo inveniatur, 1056.

Semidiameter apparens Terræ in Luna vel planeta quanta sit, 1015. quod in Sole insensibilis, 1118.

Semidiameter penumbra. Definitio, 1050. *Semidiameter Solis* quomodo in camera obscura inveniatur, o. 306.

Semidiameter umbrae Lunaris apparens, a. 1029. quomodo inveniatur, 1030.

Semisextus quinam adſpectus dicatur, 931.

Sesquadrus quinam sit adſpectus, 931.

Sextilis. Definitio, 928. signum, 929.

Sidera Medicæa, 501.

Sidera Urbanoſtaviana, 519.

Signum caeleſte. Definitio, 160.

Signorum caeleſtium nomina, *ibid.*

Signa aſtiva quænam ſint, 161.

auſtralia, ſive *meridionalia*, 162.

autumnalia, 161.

borealia, ſeu *ſeptentrionalia*, 162.

vernalia, *ibid.*

Sinus & arcus differentia quomodo inveniatur, a. 695.

Sinus ſummæ duorum arcuum quadrante minorum ratio ad ſinum differentia eorundem, f. 143.

Sinus totius ratio ad tangentem & cotangentem, 104.

Sinum verſorum ratio, a. 659. 660.

Sirius num in ſpeculo convexo ſub aquis videatur in diebus canicularibus, c. 177.

Sinus

solis mobilis quando erectus, o. 346.
quando inversus, 347.
Sol qualis sit substantia, 431. num ignis purus, 434. an mutationibus obnoxius, 421. cur sit luminare magnum, 409. quomodo in verticali primario observetur, 127. in quonam semicirculo eclipticæ diutius commoretur, 655. 656.
Sol quid dicatur in oculo, o. 25.
Solis in quatuor eclipticæ quadrantibus mora, a. 668. ad Terram ratio quoad soliditatem & superficiem, 916.
Solis diameter apparens quomodo observetur, 547. 548. qualis observetur, 549.
Solis distantia a Terra quomodo invenitur, 894. quanta sit, 896.
Solis figura qualis sit, 425. 435.
Solis locus in ecliptica quomodo observetur, 203.
Solis motus proprius quomodo innoverit, 26. 27. quomodo observetur, 155. 156.
Solis orientis & occidentis figura ovalis seu elliptica, 475. ejus causa, 476.
Solidi cujuscunque scenographia, p. 56.
Soliditatum planetarum ratio ad soliditatem Solis quomodo invenitur, a. 910. qualis sit, 911.
Solstitium. Definitio, a. 159. quomodo observetur, 657. 666.
Solstitium æstivum, 159.
 brumale, ibid.
Spatia amplitudinem visus in diversis distantiiis definitientia quomodo se habeant, o. 243. 244.
Specillum. Definitio, d. 15.
Specularia. Definitio, c. 1.
Speculum. Definitio, 3. theoria analytice investigata, 312. & seqq.
Speculum planum. Definitio, 5. phænomena, 51. & seqq. cur lumen Solis non intendar, 66. quantum esse debeat, ut te integrum in eo contuearis, 77. 80. item objectum quodcunque aliud, 78. 84. quomodo poliatur, 43. & seqq. quomodo conficiatur, 49.

Speculum cavum. Definitio, c. 7. proprietates & symptomata, 208. & seqq. quomodo ex metallo paretur, 201. & seqq. quomodo vitreum terminetur, 207.
Speculum chalybeum quodnam dicatur, 203.
Speculum conicum. Definitio, 10. quomodo fiat, 142. 262. usus in anamorphosis, 301.
Speculum convexum. Definitio, 6. phænomena, 144. & seqq. usus in Arte pictoria, 176. quomodo fiat, 140.
Speculum cylindricum. Definitio, c. 9.
Speculum cylindricum convexum. Definitio, 9. theoria, 266. & seqq. 277. 278. quomodo fiat, 262.
Speculum cylindricum concavum. Definitio, 9. theoria, 294. & seqq.
Speculum ellipticum. Definitio, 12. cur difficillime paretur, 263. quomodo lumen in foco uno positum reflectat, 310. 311.
Speculum hyperbolicum. Definitio, c. 11. cur difficillime paretur, 142.
Speculum metallicum quomodo fiat, 201. quomodo poliatur, 204.
Speculum parabolicum. Definitio, 11. quomodo lumen Solis reflectat, 306. cur sit ustiorum præstantissimum, 307. cur difficillime paretur, 263.
Specula prismatica vitrea quomodo fiant, 142.
Specula pyramidalia quomodo fiant, 142. 262. usus in anamorphosis, 304. & seqq.
Speculum sphericum. Definitio, 8.
Specula ustoria quænam sint, 214. theoria, 209. & seqq. 215. & seqq. phænomena, 221. inter alia celebra, 220. 221. Tschirnhusiana, 221. quomodo ex ligno, gypso, charta, stramine & auro strepero parentur, 219.
Sphæra. Definitio, f. 6. proprietates & symptomata, 13. & seqq. quando instar circuli appareat, o. 277.
Sphæra illuminatio quomodo se habeat, o. 111. & seqq. pars illuminata quomodo

modo inveniatur, o. 115. & seqq.
Sphæra pars quantâ videatur, 246. 247.
Sphæra pars hemisphærio major quando ab oculo videri possit, 428. quando minor, 429.
Sphærarum theoria refractionis, d. 178. & seqq.
Sphæra activitatis luminis quomodo augeatur, o. 108. 109.
Sphæra armillaris, a. 189.
Sphæra mundana num motu æquabili moveatur, 135. 136.
Sphærica. Definitio, f. 1.
Statio planetæ. Definitio, a. 532. explicata, 587. 588.
Stellæ erraticæ. Definitio, 31.
Stellæ fixæ. Definitio, 25. quomodo interdiu observentur, 230. beneficio globi cognoscantur, 317.
Stellarum distantiarum quomodo observentur, 225. distantia a Terra æqualis quod appareat, 8. distantia a vertice num ob motum annum Telluris mutetur, 594. num hæc variatio cum parallaxi annua conveniat, 600. revolutio diurna num constantis magnitudinis, 110. mora supra & infra horizontem quomodo computetur, 268. quomodo ope globi inveniatur, 322.
Stellæ novæ quænam sint, 1127. 1128.
Subocularis quænam linea dicatur, c. 283.
Superficies quando instar lineæ appareat, o. 273.
Superficies Lunæ quomodo se habeat ad superficiem Terræ, a. 913.
Superficies planetæ quomodo se habeat ad superficiem Solis, 911. quomodo ratio hæc inveniatur, 910.
Superficies refringens. Definitio, d. 6.
Synodus. Definitio, a. 535.
Systema Copernicanum quodnam dicatur, 632.
Systema planetarium. Definitio, 528. explicatum, 630.
Systema Terræ motæ an Scripturæ adversum, 626. 627.

Systema Terræ quiescentis num ipsa nomia & Physica usui sit, a. 621.
Systema Tychonicum quodnam dicatur, 632. T.

T *Abula quid dicatur in perspectiva*, p. 6.
Tabularum astronomicarum nova forma, a. 713.

Tabule latitudinarie quænam dicantur, 791.

Tangentium ratio, 794.

Taurus, 160.

Telescopium. Definitio, d. 326. inventor, 327. quomodo in microscopium convertatur, d. 454. 455. quomodo longius a tubi molimine liberetur, 383. quantum augeat objecta, quomodo observetur, 399.

Telescopium astronomicum. Vide Tubus astronomicus.

Telescopium terrestre Vide Tubus terrestris.

Telescopium catadioptricum in usum observationum cælestium quomodo construatur, d. 385.

Tempus, quo arcus æquatoris per meridianum transit, quomodo computetur, a. 211. quo stella culminat, quomodo inveniatur, 294. nocturnum quomodo observetur, 295. 296. quomodo computetur, 297. 298.

Tempus æquale quam habeat mensuram, 710.

Tempus apparens, sive verum. Definitio, 713. quomodo in medium convertatur, 715.

Tempus incidentiæ & repletionis in eclipsi Solis quomodo determinetur, 1004.

Tempus medium. Definitio, 712. quomodo in apparens convertatur, 715.

Tempus obscurationis maxima in eclipsi terrestri quomodo inveniatur, 1084.

Temporum periodisum planetarum circa Solem ratio, a. 779. satellitum Jovis & Saturni circa suum primum, 885.

Tenebræ. Definitio, o. 122.

Terra num moveatur motu vertiginis & motu

et annuo circa Solem, a. 612. quando in umbram Lunæ incurrere nequeat, 1026. quando incurrat, 1027.

Terræ hemisphærium quomodo in Luna appareat, 1014.

Terræ motæ systema qualia admittat phænomena, 585. & seqq.

Terræ motus a quibusnam fuerit defensus, 625. num S.S. adversus, 626. num a membro Ecclesiæ Romanæ salva conscientia admitti possit, 628.

Terræ obscuratio quando maxima, 1071.

Terræ quiescentis systema qualia admittat phænomena, 611. & seqq.

Tessellate imagines quomodo construantur, quæ in partes dissectæ oculo integræ appareant, o. 312.

Tetraëdri super angulo solido constituti scenographia, p. 68. scenographice delineati umbra, 89.

Tetragonus qualis sit adspæctus, a. 928. signum, 929.

Theatrorum figura optima, o. 240. 231.

Theoria planetarum, a. 631. & seqq.

Transitus comete per eclipticam quomodo inveniatur, 1140. item per æquatorem, 1141.

Tremor circa limbum Lunæ in eclipsi Solis totali observatus, a. 454.

Trianguli apparentia quomodo inveniatur, p. 38.

Triangulum æquatorium quodnam a Keplero in theoria planetarum elliptica dicatur, a. 688.

Triangulum opticum. Definitio, p. 4.

Triangulum sphericum. Definitio, f. 3. proprietates, 55. & seqq.

Triangulorum rectangulorum proprietates, f. 49.

Triangulum sphericum. Definitio, 3. proprietates, 136. & seqq. 144. 146. 148. & seqq. 354. & seqq.

Trianguli spherici aquicruri proprietas, 147.

Triangulorum sphericorum obliquangulorum

proprietates, f. 154. & seqq. resolutio, 158. & seqq.

Triangulorum sphericorum rectangulorum proprietates, 98. & seqq. 165. & seqq. resolutio, 114. & seqq. 134.

Tridecilis quinam sit adspæctus, a. 931.

Trigonometria catholica, f. 103. 111.

Trigonometria spherica. Definitio, 2.

Trigonus, five *Trinus*. Definitio, 928. signum, 929.

Triostilis, quinam adspæctus dicatur, 931.

Tritura vitrorum quomodo fiat, d. 533. 535.

Tropici. Definitio, a. 181. distantia quantæ, 182.

Tropicus canceri. Definitio, 181. capricorni, 181.

Tubus. Definitio, d. 326.

Tubus astronomicus. Definitio, 333. constructio, 358. proprietates, 359. & seqq. quomodo construat, 376. quomodo in terrestrem convertatur, 388.

Tubus ductilius in usum telescopii quomodo construat, d. 337.

Tubus Galileanus. Definitio, 331. constructio, 340. proprietates, 341. & seqq.

Tubus Hollandicus. Vide *Galileanus*.

Tubi Newtoniani constructio, 376.

Tubus terrestris. Definitio, 334. constructio, 387.

Tunica Raysebiana num in oculo detur, a. 32.

V.

Valles in Luna num dentur, a. 479.

Variatio in motu Lunæ quid dicatur, 857. quomodo inveniatur, 860.

Variatio maxima quantæ sit, 859. quomodo inveniatur, 858.

Vas hydromanticum. Definitio, d. 462. constructio, 470.

Venus. Definitio, a. 35. quale corpus, 524. num Terræ similis, 525.

Veneris digressiones maximæ a Sole quomodo observentur, a. 740.

Veneris distantia a Terra, a. 901.
macula, 494.
motus vertiginis, 496. 497.
Veneris phases, quomodo appareant, 491.
 538. quales sint in conjunctione, 491.
Venus Jovialis, 501.
Vertex conii umbrosi, 1041.
Verticalis primarius. Definitio, 72.
Via cometa quomodo in globo designetur, 1142.
Via Luna a Sole, 1061.
Via penumbrae. Definitio, 1061. qualis sit, 1064.
Via umbræ quænam sit, 1061.
Vicina cur distinctius videantur remotis, o. 72. cur majora appareant remotioribus, 211.
Vicinius quando celerius moveri videatur, 358. quomodo ad alia remotiora relatum appareat, 333.
Virgo, a. 160.
Visibile quomodo in oculo delineetur, o. 76. quando non videatur, 71. quando clarius, 390. cur non prorsus distincte, 72. quando moveri, 68. augeri, 371. minui 372. proprius accessisse videatur, 373. quando majus, quando minus appareat, 66. quomodo per lentem convexam, d. 248. 252. & seqq. quomodo videatur per polyhedrum, 166. 268. quomodo radiet, o. 59. 60. cur duobus oculis unicum videatur, 345. quando geminatum, 350. & seqq. quomodo appareat per lentem concavam, d. 193. oblique oppositum quantum appareat, o. 268. & seqq.
Visibilia quando æqualia appareant, o. 67.
Visibilis locus ubinam sit, 344. & seqq.
Visibilium in camera obscura repræsentatio, o. 110. & seqq. d. 236. & seqq. per lentes convexas visorum theoria, 239. & seqq.
Visio quando eadem, o. 43. 44.
Visionis principium, 70.

Visio magnitudinis quo fundametur, o. 66. 67.
Visionis motus principium, 68.
Visio confusa. Definitio, o. 41.
distincta, 40.
directa, 3.
reflexa, c. 2.
refracta, d. 3.
Vitra caustica quænam sint, d. 198. & seqq. phænomena, 199.
Vitra quomodo ad poliendum apta feli-gantur, 532. ad trituram aptentur, 533. poliantur, 527. & seqq.
Vitrum quid dicatur in Perspectiva, p. 7.
Vitrum concavum quomodo poliat, d. 540.
Vitrum utrinque concavum seu concavo-concavum. Definitio, 19.
Vitrum utrinque æqualiter concavum, ibid. *inaqualiter concavum*, ibid.
Vitrum convexum quomodo atteratur & ad poliendum disponatur, 535. polliatur, 539.
Vitrum convexo-convexum, sive *utrinque convexum*. Definitio, 17.
Vitrum utrinque aqualiter convexum, ibid.
Vitrum utrinque inæqualiter convexum, ibid.
Vitrum obiectivum. Definitio, d. 328. *oculare*, 329.
Vitra plana quomodo poliantur, 541.
Vitrum plano-concavum. Definitio, 18. *plano-convexum*, 16.
Vitrum polyedrum quomodo poliat, 543.
Umbra. Definitio, o. 122. theoria, 123. & seqq. quomodo multiplicetur, 130. quando crescat & decrescat, 157.
Umbræ apparentia, sive projectio, p. 83. & seqq. 94. & seqq.
Umbra a sphaera projectæ longitudo quomodo inveniatur, o. 143.
Umbra intensitas, 131. & seqq. *figura*, 134. & seqq.
Umbra longitudo quomodo in plano horizontali inveniatur, 146. quando altitudini corporis æqualis, 148.

Umbra

Umbræ luminis per fenestram projecto convenientis projectio, p. 102.

Umbræ mera quid dicatur, o. 122.

Umbræ montium lunarium, a. 483.

Umbrarum perpendicularium opacorum longitudines quam habeant proportionem, o. 156.

Umbræ rectæ. Definitio, 159. theoria, 163.

& seqq. ad versam ratio, 165. 170. usus, 171.

Umbræ satellitum Jovis observata, a. 506. 507. figura ejus, 508.

Umbræ versa. Definitio, 161. theoria, 166. & seqq. usus, 171.

Umbræ Lunæ. Definitio, a. 1029. quo dirigitur, 485. num Terram totam tegere

possit, a. 1035. quantam Terræ partem tegat quomodo inveniatur, 1036.

Umbræ lunaris diameter vera quomodo inveniatur, 1034. via in globo terrestri, vel mappa geographica quomodo delineatur, 1095.

Umbræ terrestris semidiameter apprens in loco transitus Lunæ quomodo invenitur, 941.

Volantes quando nos conspiciamus in speculo plano, c. 74.

Uvea tunica. Definitio, o. 24.

Z.

Zenith. Definitio, a. 58.

Zodiacus. Definitio, 188.

Zodiacus cometarum, 1157.

FINIS INDICIS SEXTI.

VII.

INDEX
RERUM ET VERBORUM
TOMO IV.
CONTENTORUM.

Notes velim, literam g. Geographiam & Hydrographiam, c. Chronologiam, f. Gnomonicam, five Sciatericam, p. Pyrotechniam, m. Architecturam militarem, a. Architecturam civilem, & numeros §§. designare; ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

AB, c. 112. 121. 123.

Abacus, a. 104.

Abend, g. 215.

Aben meh, c. 113.

Abib, 121.

Accessus. Definitio, m. 239. quomodo paritur, 244.

Acroteria. Definitio, a. 275. situs, 276. dimensiones, 277. & seqq. quomodo construenda, 282. & seqq.

Acus magnetica. Definitio, g. 291. quomodo paritur, 297.

Adar, c. 112. 121. 123.

Adar meh, c. 113.

Adar prior, 121.

posterior, ibid.

Adès

Ædes in antis. Definitio, a. 236. quales sint, 239.

Ædificia quomodo extruenda, a. 4.

Ædificii area quam habere debeat figuram, a. 421. & seqq.

Ædificii dimensiones quomodo reperiantur, 428. & seqq.

Ædificii firmitas. Definitio, a. 6.

Ædificium quale esse debeat, 18. & seqq.

Æquator. Definitio, g. 13. proprietates, 14.

Æra. Definitio, c. 81.

Æra Abiaca, 268.

Hegira, 227.

Hispanica, 265.

Judaica, 212.

Martyrum, 225.

Persica, 225.

Yezdegerdica, 255.

Æstas. Definitio, g. 76. ubinam bis sit, 200. quando sub æquatore, 101. quando in zona temperata & frigida, 111. cur in zona torrida non ubivis eodem tempore, 105.

Æstatis initium & finis. Definitio, 76. in zona torrida quomodo inveniantur, 106.

Die aussere Böschung, m. 52.

Die aussere Polygon, m. 52.

Affirer meh, c. 113.

Africus quinam dicatur ventus, g. 215. 216.

Aiyar, c. 112.

Ala. Definitio, m. 32. num. concava fieri debeat, 74. quænam melior, 68. & seqq.

Alarum multiplicatio, 75.

retractio, 69. & seqq.

Ala secundaria. Definitio, 43.

Alfanus quinam ventus, g. 215. 216.

Altitudo objecti ad distantiam datam conficiendi quomodo inveniantur, 50.

Altitudo Solis quomodo ope globi inveniantur, 235.

Ambitus Telluris quomodo inveniantur, g. 35. 40. quantus sit, 41.

Ambulacrum valli. Definitio, m. 25. latitudo, 26.

Ambiproskylos. Definitio, a. 236. qualis sit ædes, 241.

Amphiscii. Definitio, g. 152. ubi ædificantur, 153.

Amplitudo occidua Solis quomodo ope globi inveniantur, g. 235.

Amplitudo ortiva Solis quomodo ope globi inveniantur, 235.

Analemma. Definitio, f. 132.

Analemma signiferum. Definitio, 132. constructio, 133.

Angulus centri. Definitio, m. 51.

Angulus defendens exterior, 50.

interior, 49.

Anguli horarii, quomodo inveniantur in horologio horizontali, f. 50. in meridionali, 58.

Angulus humeri. Definitio, m. 46.

Angulus imminutus, 47.

Angulus loxodromie, loxodromicus. Definitio, g. 18. quomodo inveniantur, 322.

Angulus polygoni. Definitio, m. 44.

Angulus propugnaculi. Definitio, 30. 45. magnitudo, 79.

Annuli solaris universalis constructio, f. 165.

Annuli solaris particularis constructio, 167.

Annus. Definitio, c. 66.

Anni epochæ unius quomodo reducuntur ad annos epochæ alterius, 84.

Anteci quales habeant vicissitudines tempestatum, g. 186. temporis, 177. 192.

Annus abundans. Definitio, c. 333. ejus character, 334.

Annus Egyptiacus. Definitio, 106. quale ejus principium, 107.

Annus æræ Abiacæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 271.

Annus æræ Hispanica quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 267.

Annus Ethiopius. Definitio, 111.

Arabum, 125.

Atticus, 117.

Annus CHRISTI quomodo reducatur ad annum Gratia, 226. ad Judaicum, 216. ad annum Olympiadum, 238. ad annum Græcorum & Russorum, 198. ad annum mundi, 209. ad annum periodi Julianæ, 185.

ad annum urbis conditæ, 246.
Annus ante CHRISTUM quomodo reducat-
 tur ad annum periodi Julianæ, c. 187.
Annus deficiens. Definitio, 331. character,
 332.
Annus Eusebianus, quomodo reducat-
 ur ad annum periodi Julianæ, 210. ad annum
 CHRISTI, 222.
Annus fixus. Definitio, 66.
Annus Galatens. Definitio, 113. ejus præ-
 stantia, 115.
Annus Græcorum. Definitio, 117.
Annus Græcorum & centiorum quomodo re-
 ducatur ad annos CHRISTI, 197. ad an-
 nos periodi Julianæ, 194.
Annus Gratiæ. Definitio, 225. quomodo
 reducat-ur ad annum CHRISTI, 226.
Annus Gregorianus. Definitio, 101. diffe-
 rentia ab astronomico, 102. a Juliano,
 103. num sit bissextilis quomodo inve-
 niatur, 105.
Annus Hebræorum antiquus, 121.
Annus Julianæ Epochæ quomodo reduca-
 tur ad annum CHRISTI, 263.
Annus Julianus. Definitio, 97. quantum
 deficiat ab astronomico, 98. num sit
 bissextilis quomodo inveniatur, 105.
Anni Juliani dies quomodo reducat-ur ad
 diem Judaici, 346.
Annus Judæorum recens, sive *Judaicus*. De-
 finitio, 123. quomodo reducat-ur ad an-
 num CHRISTI, 217. ejus species, 331.
 333. quomodo species inveniatur, 345.
Anni Judaici dies quomodo reducat-ur ad
 diem Juliani, 345.
Annus lunaris cælestis. Definitio, c. 72.
 quantitas, 73.
Annus lunaris civilis communis. Definitio,
 74. quantitas, 75.
Annus lunaris civilis embolimeus. Defini-
 tio, 74. quantitas, 75. 76.
Annus Macedonicus. Definitio, 119.
Anni mundi conditi epochæ Alexandrinæ quo-
 modo reducantur ad annos CHRISTI,
 210.

Anni mundi conditi Græcorum historicorum
 quomodo reducantur ad annos CHRIS-
 TI, c. 206. quomodo ad annos periodi
 Julianæ, 204.
Annus Nabonassareus quomodo reducat-
 ur ad annum CHRISTI, 254. quomodo ad
 annum periodi Julianæ, 251.
Annus nativitatis CHRISTI num sit certus,
 190.
Annus Numæus. Definitio, 91. quantitas, ib.
Annus olympiadum quomodo reducat-ur ad
 annos CHRISTI, 238.
Annus ordinarius. Definitio, 329. charac-
 ter, 330.
Annus periodi Julianæ quomodo ex datis
 cyclis Solis, Lunæ & Indictionum inve-
 niatur, 181. quomodo reducat-ur ad an-
 num ante CHRISTUM, 188. ad annum
 CHRISTI, 186. Judaicum, 213. Eusebia-
 num, 220. annum urbis conditæ, 242.
 annum Russorum & Græcorum, 194.
Annus Persicus. Definitio, 113. quomo-
 do reducat-ur ad annum CHRISTI, 259.
 quomodo initium in anno Juliano inve-
 niatur, 260.
Annus Romanorum veterum. Definitio,
 88. quantitas, 89.
Annus Russorum quomodo reducat-ur ad
 annum CHRISTI, 197. quomodo ad
 annum periodi Julianæ, 194.
Annus secularis ad quodnam seculum refe-
 rat-ur, 87.
Annus solaris. Definitio, 67.
Anni solaris civilis quantitas, 68.
Annus solaris bissextilis, 71.
communis, 69. 70.
Annus Syriacus, 112.
Annus Turcarum. Definitio, 125. quomo-
 do reducat-ur ad annum CHRISTI, 352.
 initium ejus quomodo computetur,
 353. 355.
Annus vagus. Definitio, 66.
Annus Urbis conditæ quomodo reducat-ur
 ad annum CHRISTI, 245. quomodo ad
 annum periodi Julianæ, 241.

Annus Yezdegerdicus. Definitio, c. 113. cum quo conveniat, 114.

Antepagmenta, a. 133.

Antipodes. Definitio, g. 180. quod duntur, 181. quinam sint, 182. 183. quomodo ope globi inveniantur, 237. quales habeant vicissitudines diei ac noctis, 185. tempestatum, 186.

Anteci. Definitio, 176. quinam sint, 177. quibus nulli sint, 195. quomodo ope globi inveniantur, 237. cum antipodibus comparati, 186. & seqq. 206.

Apeliotes quinam sit ventus, g. 215.

Apophygis. Definitio, a. 111. delineatio, 117.

Aprilis, c. 97.

Aquilo quinam ventus, g. 215. 216.

Architecti officium, a. 2. 3.

Architectura civilis. Definitio, 1. regulæ ejus quomodo inveniantur, 5.

Architectura militaris. Definitio, m. 1. ejus prima principia, 2. & seqq.

Archapeliotes qualis ventus, g. 215.

Arcus. Definitio, a. 253. delineatio, 257. partes & membra, 258. 259.

Arcuum Dispositio, 274.

Arcus æquatoris inter Loxodromiæ initium in æquatore & meridianum datum interceptus quomodo inveniat, g. 336.

Araosylon, a. 225.

Ardbascht meh, c. 113.

Areae subdialis necessitas, a. 442. 443. 444.

Arena qualitates, 59. examen, 60.

Argestes qualis ventus, g. 215. 216.

Artilleria, p. 2.

Arx. Definitio, m. 201.

Asensio obliqua Solis quomodo ope globi inveniat, g. 235.

Asensio recta Solis quomodo ope globi inveniat, ibid.

Ascii. Definitio, g. 149. quinam sint, 150. ubinam non dentur, 151. quinam sint dato die, quomodo inveniat, 168.

Asrudia meh, c. 113.

Astragalus. Definitio, a. 105. d. 110. 113.

Athyr, c. 106.

Atlantes. Definitio, a. 81.

Augustus, c. 97.

Auricula. Definitio, m. 72.

Aussenwercke, 109.

Auster, g. 211. 215.

Austro-Africus qualis ventus, 215.

Autumni initium & finis. Definitio, 79.

Autumnus quando sub æquatore, 103. ubi in zona torrida, 109.

Axis Telluris. Definitio, 12.

B.

Das B Encklein, m. 52.

Basis columna, a. 96. & seqq.

Basi columna & stylobata quænam membra conveniant, 132.

Basis columna & capituli Tuscani & Dorici, 198.

Basis stylobata, 95.

Basis & Coronidis stylobatæ ichnographia quomodo delineetur, 193.

Batterie, m. 227.

der Bedeckte Weg, 52.

Behen meh, c. 113.

Berne, m. 109.

Bestrichener Winckel, 52.

Bogenstellungen, a. 253.

Bollewerck, m. 52.

Bollwercks Winckel, 52.

Bomba. Definitio, p. 31. quomodo paratur, 42. & seqq.

Borapeliotes, g. 215. 216.

Boreas, 215.

Borolybicus, 215.

Brille, m. 109.

Brustwehre, ibid.

C.

Cæcias, quinam ventus, g. 215. 216. *Cementorum virtutes* quomodo explorentur, a. 48.

Calendæ quid sint, c. 95.

Calendarium quomodo conscribatur, 316. *Calen-*

Calendarium correctum. Definitio, c. 314.
Calendarium Gregorianum. Definitio, 291.
Calendarium Gregorianum perpetuum, 392.
Calendarium Julianum. Definitio, 272.
Calendarium Julianum perpetuum, 282.
Calibra. Definitio, p. 101.
Calx quomodo coquenda, a. 65. & seqq.
 quomodo examinetur, 71. conservetur, 72.
Camera. Definitio, 468. constructio, 471.
Camini constructio, 482.
Canun prior, c. 112.
 posterius, ibid.
Capital - Linie, m. 52.
Capitulum columna. Definitio, a. 96. quænam ei convenient membra, 171.
Capituli Corinthii ichnographia, 207.
 Ionici ichnographia, 202.
 Romani ichnographia, 205.
Carbas quinam ventus dicatur, g. 215. 216.
Carbones ad pulverem pyrium conficiendum idonei quomodo parentur, p. 13.
 & seqq.
Carbonum qualitates, 19. 20. 21.
Cardi meh. c. 113.
Carthæne, p. 100.
Caryatides. Definitio, a. 82.
Caslen, c. 121. 123.
Castellum. Definitio, m. 201. delineatio, 207. quomodo condi debeat, 202.
 & seqq.
Caurus quinam ventus, g. 215. 216.
der Centri - Winkel, m. 52.
Character anni, mensis, enneadecaeteridos. Definitio, c. 324. mensis quinam, 325. anni quinam, 326. enneadecaeteridos quinam, 327.
Characteres artificiales chronologici sive instituti. Definitio, 130.
Characteres astronomici chronologici sive naturales. Definitio, 128. quales sint, 129.
Characteres chronologici. Definitio, 127.
Characteres historici chronologici. Definitio, 132.

Charta quomodo super tabula expandenda, a. 174.
Chartæ reductionis in hydrographia. Definitio, g. 363.
Chojac, c. 106.
Chorda. Definitio, m. 31.
Chronologia. Definitio, c. 1.
Circius qualis sit ventus, g. 215. 216.
Circuli horarii sive horarum. Definitio, f. 28.
Circulus æquinoctialis. Definitio, g. 13.
 polaris antarcticus, 19.
 polaris arcticus, ibid.
Circumvallatio exterior. Definitio, m. 235.
 interior, 236.
Clima. Definitio, g. 114.
Climatis initium, 115. medium, 117. finis, 116.
Climatum Tabula quomodo construatur, 138. exhibentur, ibid.
Cochlidium. Definitio, a. 515. navi, 516. delineatio, 517.
Colli dimidium. Definitio, m. 37.
Columella. Definitio, a. 80.
Columna. Definitio, 75. quomodo super alia columna erigatur, 289. & seqq.
Columna conjugata. Definitio, a. 216. quomodo conjugatio fieri debeat, 217. & seqq.
Columna parietina. Definitio, 75.
Commoditas ædificii. Definitio, a. 7.
Compassus nauticus. Definitio, g. 296.
Computi vulgaris Autor, c. 189.
Conclavium altitudo, a. 435. & seqq. communicatio, 440. figura, ibid. locus, 441.
Corona, a. 104.
Coronis stylobata, 95. quænam membra ei convenient, 131.
Coronix, 100. qualis esse debeat, 102. quænam membra ei convenient, 131.
die Cortine, m. 52.
Centre - Mine, 109.
Contregarde, ibid.
Corus, g. 215. 216.
Craticula ad firmitatem fundamenti quomodo paranda, a. 328.

Crepusculi matutini initium quomodo ope globi inveniat, g. 235.
Crepusculi vespertini finis quomodo ope globi inveniat, 235.
Creutz-Gewölbe, a. 469.
Crucis gnomonica constructio, f. 163.
Cuniculi subterranei. Definitio, m. 154. quid de iis observatum, 155. & seqq. quomodo parentur, 160. 163.
Cyclos Indictionum. Definitio, c. 151. quomodo inveniat, 153.
Cyclos Lunæ. Definitio, 147. quantus sit & quamdiu valeat, 148.
Cyclos Solis. Definitio, c. 140. quomodo inveniat, 143.
Cycli Solis pro annis Gregorianis quomodo condantur, 145.
Cycli Solis, Lunæ & Indictionum anni dati periodi Julianæ quomodo inveniantur, 180.
Cylindrus pyrotechnicus. Definitio, p. 35.
Cylindricum horologium, f. 152. & seqq.
Cymatium Doricum. Definitio, a. 107. delineatio, 115.

D.

December, c. 97.
Declinatio plani quomodo inveniat, f. 90. 101.
Defensionis quantitas quomodo mensuretur, m. 58. & seqq.
Delineatio acus magnetica. Definitio, g. 293. quomodo observetur, 302.
Denticuli quid sint, a. 133. quomodo delineentur, 180.
Diameter Columnæ quomodo inveniat, a. 155. 156.
Diameter globi unius libræ quomodo inveniat, p. 110.
Diameter globorum pro singulis semunciis libræ quomodo inveniat, p. 109.
Diastylon opus, a. 225.
Dies. Definitio, g. 118. ubinam unicus, 128. ubi perpetuo nocti æqualis, 126. quandonam ubivis terrarum noctiæ qualis, 132.

Dies iidem ubinam æquales, g. 128.
Diei longitudo quomodo variet pro locorum latitudine, 134.
Diei brevissimi & longissimi longitudo quomodo inveniat, 136. 142.
Dies bissextilis seu intercalaris. Definitio, c. 71.
Dies civilis. Definitio, 3.
Dies naturalis. Definitio, 5. quantitas quomodo inveniat, 6.
Dies rescilæ. Definitio, 336.
Dies mensis anni Nabonassarei quomodo reductur ad diem anni Juliani, 202.
Dierum hebdomadæ nomina, 45.
Di meh, 113.
Dipteros, a. 216. quale sit opus, 244.
Distantia locorum quomodo ope globi inveniat, g. 264.
Distantia locorum magno intervallo distantium quomodo inveniat, 29.
Distantia locorum geographica. Definitio, 51. quomodo inveniat, 63. & seqq.
Distantia Solis a vertice mensura, 264.
Dulbeggia, c. 125.
Dulkaadab, ibid.

E.

Echinus. Definitio, a. 106. delineatio, 114.
Ecliptica. Definitio, g. 15. situs, 16.
Eclipticæ declinatio maxima quomodo inveniat, 140.
Ephora. Definitio, a. 150.
Einbohrende Defens-Linie, m. 52.
Einsfallendes Licht, a. 390. 391.
Elul, c. 112. 121. 123.
Enneadecaëteris Judaica. Definitio, c. 322. quot sit dierum, 323.
Epactæ annuæ. Definitio, 296. quantæ sint, 297. & seqq.
Epactæ mensuræ. Definitio, 294.
Epactæ quomodo per Calendarium disponendæ, 302.
Epactarum officium, 300.
Epactarum cyclos quando expiret, 299. cur non omni ævo satisfaciatur, 301. 303.
Epactæ

Epistola in expansa Tabula quomodo constructuratur, c. 306.

Epacta Juliana & *Gregoriana* anni dati quomodo inveniantur, 310.

Epiphi, 106.

Epistylum quid sit, a. 100. quale esse debeat, 101.

Epocha. Definitio, c. 81. quod sit arbitrarioria, 82.

Epocha Constantinopolitana, 171.

Dioeletiana, 225.

Juliana, 261.

Muhamedica, 227.

Mundi conditi Judæorum, 212.

Mundi Alexandrina, 207.

Mundi Eusebiana, 219.

Mundi recentiorum Græcorum & Russorum, 192.

Mundi Græcorum Historicorum, 201. 202.

Nabonassarea, 247.

Olympiada, 232.

Urbis condita, 239.

Epocha vulgaris Christiani nati quomodo reducat ad annum periodi Julianæ, 183.

Epocha diei civilis. Definitio, 10. quomodo constituitur, 11. & seqq.

Etesia, g. 216.

Ethanum, c. 121.

Eurauster quinam ventus, g. 215.

Euronotus quinam ventus, 216.

Europæ horæ quomodo in Babylonicas convertantur, c. 34.

Eurus quinam ventus, g. 215. 216.

Eurythmia. Definitio, a. 31. & seqq.

Eustylon opus, 225.

F.

Facies. Definitio, m. 30.

Facierum magnitudo, 63.

Falconet, p. 100.

Famulus pyrotechnicus. Definitio, 37. quomodo fiat, 63.

Fascia, a. 104.

Fastigium. Definitio, 262.

Favonius quinam ventus, g. 215. 216.

Februarius, c. 97.

Fenestra. Definitio, a. 381. quomodo construenda, 382. & seqq. 389. 390. dimensiones, 387. 388. 395. situs, 400. & seqq. figura, 393. ornatus, 402. 404. quot fenestrarum conclavi unicuique convenient, 425.

Fenestra podio septa. Definitio, a. 414. quomodo construenda, 415. & seqq.

Festa immobilia. Definitio, 274. quænam sint, 275.

Judaica quænam sint, 549.

Festa mobilia. Definitio, c. 276. quænam sint, 277.

Figura irregularis quomodo ad regularitatem reducat, m. 185. quomodo muniatur, 186. 188. & seqq.

Finitor. Definitio, g. 28.

Flores capitulorum quomodo delineentur, a. 210.

Focus quomodo exstruatur, a. 495. 496. & seqq.

Folia acanthina cum cauliculis, 133.

Forcipula composita. Definitio, m. 105. an utilis, 106. quomodo delineetur, 138. 179.

Fortipula simplex. Definitio, 103. an utilis, 104. quomodo delineetur, 137. 179.

Fornaces quomodo construendæ, a. 486. & seqq.

Fornices. Definitio, a. 468. quomodo construantur, 471.

Fossa necessitas, m. 15. latitudo, 16. latitudo quænam melior, 86. quales terminos habere debeat, 87.

Fosse operum externorum magnitudo, 122.

Frons primaria ædium quam plagam respicere debeat, a. 445. & seqq.

Frontispicium. Definitio, 262. figura, 264. 266. locus, 265. nævi, 267. 268. quomodo delineetur, 272.

Fulcrum. Definitio, 74. quodnam perfectius, 84. quale esse debeat, 85. & seqq.

Fumarii exstructio, 499. & seqq.

PPP 3

Fun-

Fundamentum adificii. Definitio, a. 311.
necessitas, 313. quale esse debeat, 314.
& seqq. dimensiones, 332. 333. quomodo ponatur, 332. & seqq. 334. quomodo in loco aquoso ponatur, 339.

G.

Galicus, quinam ventus, g. 215. 216.
Gangeticus quinam ventus, 215.

Geographia. Definitio, 1.

Gesichts-Linie, m. 52.

Gewälbe, a. 469.

Ginbat, c. 111.

Glacis, m. 52.

Globus æreus. Definitio, p. 71. quomodo componatur, 92.

Globus aquaticus. Definitio, 72. quomodo componatur, 96.

Globus særens. Definitio, 41. quomodo componatur, 68.

Globus fumans. Definitio, 40.

Globi incendiarii. Definitio, 38. qua materia repleantur, 52. quomodo repleti ligentur, 54. baptizentur, 55. granatis manuariis impleantur, 57.

Globus lucens. Definitio, 39. 74. quomodo componatur, 66. 96.

Globus obscurans quomodo componatur, 67.

Globus terrestris. Definitio, 73. quomodo componatur, 97.

Globus terrestris in *Geographia.* Definitio, g. 231. constructio, 233. 234. usus, 235. & seqq. quomodo ita constituatur, ut Sol omnes regiones illuminet, quæ in ipsa Tellure illuminantur, 261.

Gnomonica. Definitio, f. 1.

Gradus Meridiani terrestris quomodo mensurentur, g. 40.

Gradus paralleli quantitas quomodo inveniantur, 45. 46.

Græcus quinam ventus dicatur, 28.

Granata. Definitio, p. 31.

Granata manualis, ibid.

Grando pyrotechnica. Definitio, p. 32. quomodo parctur, 48.

H.

Hase, c. 111.

Halber Mond, m. 109.

Hamle, c. 111.

Haugender Mørser, p. 142.

Haupt-Linie, g. 52.

Haziram, c. 112.

Hebdomas. Definitio, 43.

Helakim, 40.

Hellepontius qualis ventus, g. 215.

Hemisphæria. Definitio, a. 468.

Heterostii. Definitio, g. 155. ubinam dentur, 156.

Hexastylon quale sit opus, a. 214.

Hiemis initium & finis. Definitio, g. 77.

Hiems ubinam unica, 17. quando sub æquatore, 101.

Hora. Definitio, c. 17.

Hora composita. Definitio, 17.
simplex, ibid.

Hora antiquæ, 24.

Hora astronomica. Definitio, 21. quomodo in *Babylonicas* convertantur, 31.

Hora Babylonica. Definitio, 19. quomodo in *astronomicas* convertantur, 31. quomodo in *Europæas*, 34. quomodo horologio inscribantur, f. 149.

Hora Europææ. Definitio, c. 22. quomodo convertantur in *astronomicas*, 30. *Italicas*, 35. *Judaicas*, 37.

Hora Italica. Definitio, 20. quomodo convertantur in *Europæas*, 35. quomodo horologio inscribantur, f. 149.

Hora Judaica. Definitio, c. 24. quales sint, 25. & seqq. quomodo in *Europæas* convertantur, 37.

Hora Norimbergenses, Definitio, 28.

Hora planetarie, 24.

Horizon. Definitio, g. 28.

Horizon physicus, 28.
sensibilis, ibid.

Hornwerck, m. 109.

Horologigraphia, f. 2.

Horolo-

Horologii descriptio generalis, f. 36. in baculo, 160.

Horologium aequinoctiale. Definitio, 5. quomodo eidem signorum paralleli inscribantur, 140.

Horologium aequinoctiale inferius. Definitio, 5. descriptio, 33. quot horas indicet, 7.

Horologium aequinoctiale superius. Definitio, 5. quot horas indicet, 6. quomodo describatur, 30.

Horologium aequinoctiale universale quomodo construatur, 34.

Horologium astrale. Definitio, 176. constructio, 184.

Horologii cylindrici descriptio, 152. & seqq. 161.

Horologia declinantia. Definitio, 76. descriptio, 94. 96. 102. 104.

Horologia deklinata. Definitio, 82. descriptio, 109.

Horologium horizontale. Definitio, 10. quo tempore ejus usus, 11. ejus perfectio, 12. quomodo describatur, 38. & seqq. quomodo sub sphaera parallela, 129. quomodo sub recta, 124. & seqq. quomodo paralleli signorum eidem inscribantur, 135.

Horologii horizontalis sine centro descriptio, 119. & seqq.

Horologii horizontalis universalis descriptio, 170.

Horologia inclinata. Definitio, 78. descriptio, 106.

Horologium lunare. Definitio, 75. descriptio, 180. 182.

Horologium meridionale. Definitio, 14. quasnam horas indicet, 15. quomodo describatur, 54. & seqq.

Horologium nocturnale. Definitio, 177.

Horologium occidentale. Definitio, 22. quas horas indicet, 23. quomodo describatur, 68.

Horologium orientale. Definitio, 20. quas horas indicet, 21. quomodo de-

lineetur, f. 66.

Horologium polare. Definitio, 25.

Horologium polare inferius. Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo describatur, 72. & seqq.

Horologium polare superius. Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo describatur, 69. & seqq.

Horologia reclinata. Definitio, 80. descriptio, 108.

Horologium septentrionale. Definitio, 16. quasnam horas indicet, 17. quo tempore nullus ejus usus, 18. quomodo describatur, 63. 64.

Horologium solare. Definitio, 3. diversitas unde, 4. quomodo vicem lunaris sustineat, 178. quomodo in superficie globi describatur, 150.

Horologia solaris primaria quomodo eidem trunco inscribantur, 74.

Horologia sine centro. Definitio, 115. ubi construenda, 116. & seqq.

Horologium verticale. Definitio, 12. quomodo sub sphaera recta describatur, 127. quomodo sub parallela, 130. quomodo sine centro, 122. & seqq.

Horologii universalis in Tabula quadam portatili descriptio, 172.

Hydar, c. 111.

Hydrographia. Definitio, g. 2.

Hypathros. Definitio, a. 236. quale sit opus, 247.

Hypafricanus qualis sit ventus, g. 215.

Hypaquito qualis sit ventus, 215.

Hypargestes, qualis sit ventus, 215.

Hyperboreas qualis sit ventus, 215.

Hyperenrus qualis ventus, *ibid.*

Hypeurus, 215.

Hypocacias qualis sit ventus, 215.

Hypocircius qualis ventus, *ibidem.*

Hypocorus, *ibidem.*

Hypolibs, *ibidem.*

Hypophenix, *ibidem.*

Hypothrafcias. Scirem, 215.

I.

- I** *Acatit*, c. 111.
Janua. Definitio, a. 372. dimensiones, 373. & seqq. figura, 378. locus, 410. 411. ornatus, 401. 404.
Januarius, c. 97.
Japyx, g. 215.
Ichnographia ædificii. Definitio, a. 524. quomodo fiat, 528.
Ichnographia munimenti. Definitio. m. 131.
Ichnographia partis alicujus columnæ. Definitio, a. 188.
Idus quid sint, c. 95. quot in quolibet mense, *ibid*.
Ijar, 121. 123.
Imbrices, a. 522.
Inclinatio acus magnetica. Definitio, g. 294. quomodo observetur, 307.
Inclinatio plani quomodo inveniat, f. 88. 89.
Incola ejusdem paralleli quomodo inter se comparentur, g. 196. & seqq. 202.
Incumbæ. Definitio, a. 255. membra, 256.
Initium diei civilis. Definitio, c. 10. quomodo constituatur, 11. & seqq.
Die innere Beschung, m. 52.
Drossirung, *ibid*.
Polygon, *ibid*.
Instrumentum, quo pulvis pyrius in tormentum immittitur, p. 127. in arcum spatium redigitur, 128. tormenta repurgantur, 129.
Instrumentum declinatorium. Definitio, f. 85. constructio, 86. usus, 88.
Intercolumnium. Definitio, a. 225. prope januas & portas quantum esse debeat, 232.
Jomada prior, c. 125.
posterior, *ibidem*.
Itineris quantitas quomodo in mari æstimetur, g. 351.
Iter confectum in mari quomodo inveniat, 386. 389.
Iter faciendum in mari quomodo inveniat, 384.
Junius, c. 97.

K.

- K** *Artetsche*, p. 32.
Eine Katze, m. 109.
Kebiz quid sint, c. 376.
Die Kehle, m. 52.
Der kleine Winckel, *ibid*.
Ein Kron-Werck, 109.
 L.
L *Acunar* quomodo construendum, a. 466.
Lagena pyrotechnica. Definitio, p. 34.
Laquear gypseum quomodo perficiatur, a. 467.
Lateres quomodo ducantur, 51. & seqq. examinentur, 58.
Latitudo loci. Definitio, g. 54. quomodo inveniat, 55. 137. 143. quomodo ope globi inveniat, 237. quomodo observetur, 344. & seqq.
Latitudinum locorum Tabulæ, 60.
Latitudinis mutatio in navigatione quomodo inveniat, 321. quomodo se habeat ad latus mecodynamicum, 327.
Latus exterius. Definitio, m. 35.
interius, 36.
Latus mecodynamicum. Definitio, g. 317. quale sit, 329. quomodo inveniat, 325. 328. 330. 383.
Lauffgraben, m. 240.
Lenco-notus qualis ventus, g. 215.
Libonotus qualis ventus, 215. 216.
Libs qualis ventus, 215.
Ligna qualia esse debeant, a. 43. quomodo cædenda, 46. exsiccanda, 47.
Ligni parsimonie principia, 474. & seqq.
Linen quantum esse debeat, 380.
Linea quid dicatur in Architectura militari, m. 233. quid in Geographia, g. 13.
Linea capitalis. Definitio, m. 40.
Linea communicationis. Definitio, 241.
Linea defensionis major. Definitio, m. 41. magnitudo, 55. 56.
Linea defensionis minor, sive stringens. Definitio, 42.
Linea semicollis quamnam melior, 77.

Linea

Lintæ hydaris. Definitio, f. 91. quænam sit, 92. 93.

Literæ ardentes quomodo efformentur, p. 98.

Litera dominicalis. Definitio, c. 133. quomodo variet, 136. & seqq. quando ordo restituitur, 139. quomodo inveniat, 143.

Loca quænam in zona torrida sita, g. 69. quænam in temperata, 71. quænam in frigida, 75.

Loca secreta ne fatore sint molesta quomodo impediatur, a. 448. & seqq.

Loca Terræ, ubi simul meridies, g. 23.

Loca Terræ quomodo ope globi inveniantur, in quibus dies est datarum horarum, 251. 252. quibus Sol oritur, vel occidit, quæ meridiem, quæ mediam noctem, quæ diem, quæ noctem habent, 255. quæ vident eclipses medium, 256. quibus planeta, 257. stella vel aliud phænomenon sit verticale, 258. 259. quibus hoc oriatur, vel occidat, 260. quibus Sol, 261. vel Luna lucet, 262. quibus Sol & Luna oriuntur, vel occidunt, 263.

Loca zonæ frigide quomodo inveniantur ope globi, in quibus dierum dato numero Sol non occidit, 254.

Locus ad fluctum situs quomodo muniat, m. 208.

Longitudo diei quomodo ope globi inveniat, g. 235. quomodo in horologiis solaribus indicetur, f. 142.

Longitudo jactus tormentorum quanta sit, p. 137.

Longitudo loci. Definitio, g. 52. quomodo inveniat, 56. & seqq. quomodo ope globi inveniat, 237.

Longitudinum locorum differentia quomodo inveniat, 58. 59.

Longitudinum locorum Tabulæ, 60.

Longitudo maris quomodo inveniat, 335. 354. 385.

Longitudinum in mari differentia quomodo Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

modo inveniat, g. 386.

Longitudinis mutatio quomodo inveniat, g. 337. 338. 387.

Longitudo noctis quomodo ope globi inveniat, 235.

Lorica. Definitio, m. 21. crassities, 22. altitudo, 23. 24.

Lorica fenestrarum. Definitio, a. 431. dimensiones, 432. & seqq.

Loricæ transversæ utilitas, m. 124.

Loxodromia. Definitio, g. 309. proprietates, 310. 311. 313. & seqq. quomodo inveniat, 320.

Loxodromiæ longitudo quomodo se habeat ad latus mecdynamicum, 324. quomodo ad mutationem latitudinis, 319. 323.

Lunula. Definitio, m. 99. delineatio, 136. M.

M *Agabit*, c. 111.

Maius, 97.

Mappa composita per rhombos & distantias. Definitio, g. 367.

Mappa geographica. Definitio, 266.

Mappæ hydrographica. Definitio, 356.

Mappæ planæ. Definitio, 358. quales sint, 359. & seqq. quomodo construuntur, 368.

Mappa particularis. Definitio, 268. quomodo construatur, 278.

Mappæ reductæ. Definitio, 363. quales sint, 364. 365. quomodo construuntur, 375.

Mappæ universales. Definitio, 267.

Marchesiam, c. 121. 123.

Mare circumfluit terram, g. 7. latitudo in mari quomodo observetur, 340. inveniat, 342.

Margo fosse. Definitio, m. 27.

Martius, c. 97.

Mascaran, 111.

Materia adificiorum. Definitio, a. 341. qualis sit eligenda, 35. & seqq.

Materia liquefacta quid dicatur, p. 61.

Mccheir, 106.

Qqq

Meba

Meba meb, c. 113.
Membra Ordinum architectonicorum. Definitio, a. 103. divisio, 103. altitudines eorum quomodo determinentur, 151.
Membra essentialia. Definitio, 125. quænam sint, 126. & seqq.
Mensis astronomicus. Definitio, c. 58.
Mensis civilis. Definitio, 60.
Mensis illuminationis. Definitio, c. 55. quantus, 56.
Mensis lunaris periodicus. Definitio, 51. quantus sit, 52.
Mensis lunaris synodicus. Definitio, 53. quantitas, 54.
Mensis lunaris astronomicus. Definitio, 58.
Mensis lunaris civilis. Definitio, 60. quantus sit, 61. & seqq.
Menses Numæi quales fuerint, 93.
Mensis solaris. Definitio, 48. quod omnes non sint æquales, 50. quantus statuatur, 50.
Mensis solaris civilis. Definitio, 60. quantitas, 64. 65.
Menses Romulæi quales fuerint, 93.
Mensium Tarcicorum initium in anno Juliano quomodo reperiatur, 356.
Merced meb, c. 113.
Meridianus. Definitio, g. 20. situs, 21. officium, 23. numerus Meridianorum, 24.
Meridiani diversorum locorum quomodo eidem horologio inscribantur, f. 144.
Meridianus primus. Definitio, g. 26. quinam sit, 27. 61.
Meridies quænam plaga dicatur, g. 215.
Meridies cur citius in locis orientioribus, quam occidentalioribus, 25. ubinam sit dato momento quomodo ope globi inveniatur, 174.
Mesquillo quinam ventus, g. 215.
Mesargestes, ibid.
Mescurus, ibid.
Mesoboreas, ibid.
Mesocacias, ibid.
Mesocircius, ibid.

Mesocorus, quinam ventus, g. 215.
Mesolibonotus, ibid.
Mesolibs, ibid.
Mesophænix, ibid.
Mesori, c. 106.
Mesozephyrus, quinam ventus, g. 215.
Mijazia, c. 111.
Milliaria longitudinis. Definitio, g. 317. quomodo inveniatur, 383.
Minutum primum. Definitio, c. 39. secundum, ibid.
Mittag, g. 215.
Mitternacht, ibid.
Modulus. Definitio, a. 148.
Modulus ornatus januarum & fenestrarum, 403.
Molad Tobu. Definitio, c. 320. character, 328.
Monopteros ædes rotunda, a. 251.
Mörser, p. 142.
Mortarii præparatio, a. 361.
Mortarium in Artilleria. Definitio, p. 140. quomodo delineetur, 143. & seqq. oneretur, 148. dirigatur, 150.
Muharram, c. 125.
Muniendi forma Belgica. Definitio, m. 126. calculus geometricus, 128. 129. delineatio ichnographica, 133. 141. orthographica, 142.
Muniendi forma Blondelliana. Definitio, 151. calculus geometricus, 152. delineatio, 153.
Muniendi forma Paganiana. Definitio, 145. calculus geometricus, 146. delineatio, 148.
Muniendi forma Scheiteriana. Definitio, 170. calculus geometricus, 171. delineatio, 173.
Muniendi forma Vanbaniana. Definitio, 157. calculus geometricus, 159. delineatio, 161.
Muniendi forma Vanbaniana recentior. Definitio, 166. delineatio, 168.
Munimenti forma qualis esse debeat, 61. & seqq.

Muni-

Munitio campestris. Definitio, m. 217. orthographia, 219. delineatio, 220. & seqq.
Munitum irregulare. Definitio, 180. undenam tale sit, 183. 184.
Munitum regulare. Definitio, 125.
Munitum stellatum quomodo delineatur, m. 223.
Muri quomodo construendi, a. 341. & seqq. quomodo anchoris firmentur, 370. quomodo testorio vestiuntur, 363.
Murus ante fenestram qualis esse debeat, 413.
Mutuli compositi. Definitio, 133. delineatio, 182.
Mutuli simplices. Definitio, 133. delineatio, 181.

N.

Navigatio circularis. Definitio, g. 381. theoria, 391. & seqq.
Navigatio Mercatoris. Definitio, 380.
Navigatio plana. Definitio, 379.
Neben-Streiche, m. 52.
Neomenia omnium mensium quomodo inveniuntur, c. 344.
Neomenia Tisri quomodo inveniatur, 339. & seqq.
der Niedrige Wall, m. 52.
Nisan, c. 112. 121. 123.
Nitri qualitates, p. 17. 20. 22. defæcatio & pulverisatio, 5. & seqq.
Nonæ quid sint, c. 95. quot sint in quolibet mense, ibid.
Nord, g. 211.
Nord gen Osten, 215.
Nord gen Westen, ibid.
Nord-Nord-Ost, ibid.
Nord-Nord-West, ibid.
Nord-Ost, ibid.
Nord-Ost gen Osten, ibid.
Nord-Ost gen Norden, ibid.
Nord-Ost gen Westen, ibid.
Nord-West, ibid.
Nord-West gen Norden, ibid.

Nord-West gen Westen, g. 215.
Notapeliotes, ibid.
Notolybicus, ibid.
Notozephyrus, ibid.
Notus, ibid.
November, c. 97.
Nox. Definitio, g. 118. c. 8. quomodo quantitas inveniatur, 9. ubinam unica, g. 128.
Numerus aureus. Definitio, c. 149. quomodo inveniatur, 150.

O.

Obsidionis processus, m. 249. defensio contra eandem, 250.
Occasus Solis quomodo ope globi invenitur, 235. quomodo in horologio indicetur, f. 142.
Occidens. Definitio, g. 211. 215.
Ofastylon, a. 214.
Oktober, c. 97.
Olympias, g. 215.
Opera campestris. Definitio, m. 216.
Opus coronatum. Definitio, 108. quomodo delineatur, 140. 178.
Opus cornutum. Definitio, 107. quomodo delineatur, 131. 176.
Opera externa. Definitio, 94. utilitas, 95. qualia esse debeant, 96.
Opus rusticum. Definitio, a. 366. quibus ædificiis conveniat, 367. & seqq.
Ordo architectonicus. Definitio, a. 90. divisio, 153. quomodo componantur, 160. & seqq. 137. quomodo delineantur, 176. 178.
Ordo Corinthius, 145. quod sit ornatissimus, 146.
Ordo Doricus, 140.
Ionicus, 141.
Romanus, sive *compositus*, 143.
Tuscanus, 139.
Oriens. Definitio, g. 211.
Ornatus ædificii. Definitio, a. 15.
Ornithias qualis ventus, g. 216.
Orthographia externa ædificii. Definitio; a. 525. quomodo fiat, 529.

Orthographia interna ædificii. Definitio, a. 256. quomodo fiat, 530.

Orthographia munitimenti. Definitio, m. 132.

Orthographia partis alicujus columnæ. Definitio, a. 188.

Ortus Solis quomodo ope globi inveniantur, g. 235. quomodo in horologiis solaribus indicetur, f. 141.

Ost, g. 211. 215.

Ost gen Norden, 215.

Ost gen Sâden, ibid.

Ost - Nord - Ost, ibid.

Ost - Sâd - Ost, ibid.

P.

Pachon, c. 106.

Pagomen, 111.

Paophi, 106.

Paralleli locorum quomodo horologio solaris inscribantur, f. 146.

Parastata. Definitio, a. 78.

Parmula. Definitio, m. 98. usus, 110. qualis esse debeat, 111. & seqq. quomodo delineetur, 135.

Partes ordinum quomodo componantur, 137.

Pascha quomodo celebrandum, c. 279.

Pascha Gregorianum quomodo computetur, 112.

Pascha Judaicum quomodo computetur, 347.

Pascha Julianum quomodo computetur, 288.

Pavimenta qualia esse debeant, 457.

Pauni, 106.

Perfectio ædificii. Definitio, a. 8.

Periodus Calippica. Definitio, c. 154. quanta sit, 156. quot lunationum, 157. quamdiu valeat, 158.

Periodus Hipparchi. Definitio, c. 161. quanta sit, 164. quot lunationum, 165. quamdiu valeat, 166.

Periodus Juliana. Definitio, 175. quanta sit, 176. ejus usus, 178. inventor, 179.

Periodus Victoriana. Definitio, 167. quot

sit lunationum, c. 173. quantum valeat, 171. quamdiu valeat, 174.

Periæci. Definitio, g. 178. quinam sint, 179. quibus nulli sint, 195. 205. quomodo numerent horas, 204. quomodo ope globi inveniantur, 237.

Peripteros. Definitio, a. 236. quale sit opus, 242.

Peripteros ædes rotunda, 251.

Periscii. Definitio, g. 157. abinam dentur, 158. quinam sint dato loco, quomodo inveniantur, 169. 170.

Perysiliium. Definitio, a. 212. genera apud veteres, 236.

Petarde, p. 151.

Phamenot, c. 106.

Phœnicias qualis ventus, g. 215.

Phœnix, ibid.

Photostaterica, f. 2.

Pila. Definitio, a. 77.

Pila parietina, ibid.

Plaga. Definitio, g. 207. quot sint, 208. quomodo indicentur, 210. quomodo determinentur, 217.

Plaga cardinales. Definitio, 211.

Plaga collaterales, vel *intermediae.* Definitio, 211. *species*, ibid.

Plaga collaterales primariæ, ibid.

secundariæ, ibid.

secundariæ primi ordinis, ibid.

secundariæ secundi ordinis, ibid.

Plinthus, a. 104.

Pluvia ignea quomodo efficiatur, p. 61.

Pluvia pyrotechnica. Definitio, 33.

Podium. Definitio, a. 414.

Poli Telluris. Definitio, g. 12.

Polus Terræ antarcticus, sive *australis*, ibid.

Polus Terræ arcticus, sive *borealis*, ibid.

Poli elevatio ubi nulla, 125. quomodo inveniantur, 143.

Polygonorum distantia in methodo munienti recentiore quomodo inveniantur, m. 209.

Poly-

Polys. Winckel, m. 52.
Postes. Definitio, a. 79.
Posticum, 236.
Principium anni. Definitio, c. 78. ubi statuendum, 79. 80.
Profunditas Solis quomodo ope globi inveniatur, g. 235.
Projectio sphaerae. Definitio, g. 269. quomodo fiat, 272. 275.
Projectio orthographica, 270.
Stereographica, ibid.
Projectura, sive *Projectio*. Definitio, a. 94.
Pronas qualis ædes, 236.
Prostylus. Definitio, 236. quale sit opus, 240.
Propugnaculum. Definitio, m. 29. forma, 62.
Propugnaculi exterius vallum. Definitio, 101. usus, 116. 117.
Pseudodipteros. Definitio, a. 236. quale sit opus, 243. 244.
Pseudodipteros ædes. Definitio, 249. qualis sit, 250.
Pulebritudo. Definitio, a. 10. principia, 11. & seqq.
Pulvis pyrius. Definitio, p. 4. compositio, 24. & seqq. examen, 29. 30.
Pycnostylon opus, a. 225.
Pyropologia, p. 2.
Pyrobolus. Definitio, 69. quomodo conficiatur, 77. qua materia impleatur, 78. quomodo terebretur, 79.
Pyroboli forma quomodo paretur, 75. 76.
Pyrobolus aquaticus quomodo componatur, 94.
Pyrotechnia. Definitio, p. 1.
Pyxis nautica, seu *magnetica*. Definitio, 296. quomodo contruatur, 297.

Q.

*Q*uadra, a. 104.
Quadrantis horodisticti constructio, f. 157.
Quintilis, c. 88.

R.

*R*abia prior, c. 125.
posterior, ibid.
Rajab, ibid.
Radius major. Definitio, m. 39.
minor, 38.
Rationum symptoma, g. 84.
Ravelin, m. 109.
Reductus quomodo delineetur, 224. & seqq.
Refractio horizontalis Solis quomodo inveniatur, g. 144.
Regula quale membrum in Ordinibus, a. 104.
Regula ad delineandum Ordines atque adificium utilis quomodo contruatur, 175.
Regula Calibrae. Definitio, p. 102. quomodo paretur, 103. usus, 105. & seqq. examen, 111.
Rhombus. Definitio, g. 286. quomodo inveniatur, 387. 388. quomodo inveniatur, in quo navigandum, 384. juxta quem facta navigatio, 322. 326.
Rosa nautica. Definitio, 289.
Rosa pyrotechnica quomodo fiat, p. 82. 83.
Ruderatio quomodo fiat, a. 461. & seqq.
 S.
*S*abat, sive *Shebat*, c. 121. 123.
Saccus globi incendiarii quomodo delineetur, p. 49. 51.
Saccus pyrotechnicus. Definitio, 36.
Samadan, c. 125.
Saphar, ibid.
Sappa, sive *suffissio*. Definitio, m. 242. quomodo paretur, 246.
Säulenstellungen, a. 213.
Saxa quomodo cædenda, 49.
Saxorum virtutes quomodo cognoscantur, 48.
Scala. Definitio, a. 502. quomodo construenda, 503. & seqq. delineanda, 514.
Scale constructio ad delineandos Ordines necessaria, a. 172. quæ errores distantiarum in mappis planis corrigat, g. 372.

QQQ 3

Scapus

Scapus columnæ, a. 96. quomodo contrahatur, 183.
Scenographia ædium. Definitio, a. 527.
Scharis meh, c. 113.
Scheere, sive *Scheer-Werck*, m. 109.
Schieß-Scharten, 109.
Schlangen, p. 100.
Schutter-Winkel, m. 52.
Sciaterica, f. 2.
Sciatericum. Definitio, 3.
Scintilla pyrotechnica quomodo conficiantur, p. 87.
Scrupulum Chaldaicum. Definitio, c. 40. quomodo in horaria convertatur, 42.
Seculum. Definitio, c. 86.
Semidiameter Terræ quanta sit, g. 41. & seqq. quomodo inveniatur, 30. 32. & seqq. 38.
September, c. 97.
Septentrio. Definitio, g. 211.
Septimana. Definitio, c. 43.
Serpentinel, p. 100.
Sextilis, c. 88.
Shaaban, 125.
Shabat, ibid.
Shawal, ibid.
Signorum paralleli quomodo horologiis solaribus inferbantur. f. 135. & seqq.
Sima. Definitio, a. 110. delineatio, 119.
Sivan. c. 122.
Sol ubinam fiat verticalis, ubinam non, g. 91. quando hoc fiat, 94. ubinam dato momento verticalis, quomodo inveniatur, 173. quando in zona torrida loco alicui fiat verticalis quomodo ope globi inveniatur, 242. & seqq. quando mediam distantiam a vertice in zona torrida habeat, quomodo inveniatur, 95. & seqq. ubinam ter per annum mediam distantiam a vertice habeat, 98. ubinam bis, 99. quo momento plenum declinans illustrare incipiat, quomodo determinetur, f. 110. & seqq. quando in zona torrida appareat retrogradus, g. 171. ubinam dato momento

oriatur & occidat, quomodo inveniatur, g. 175. quando in zona torrida non occidat, quomodo ope globi inveniatur, 248. item quando non amplius oriatur 249. Solis non occidentis mora supra horizontem quomodo inveniatur, 146.

Solis meridiani a vertice distantia quanta sit, g. 159.

Solanus quinam ventus, 215. 216.

Soli conditio quomodo exploranda, a. 320.

Soliditas Terræ quanta sit, g. 44.

Sphæra obliqua. Definitio, 121. ubinam sit, 124.

Sphæra parallela. Definitio, 120. ubinam sit, 123. phenomena ejus, 125. 128. & seqq.

Sphæra recta. Definitio, 119. phenomena, 125. & seqq. ubinam sit, 122.

Spreng-Kugel, p. 58.

Statio vallaris. Definitio, m. 25.

Stehender Mörtser, p. 142.

Stellula pyrotechnica quomodo conficiantur, 84.

Die Streiche, m. 52.

Die streichende Defens-Linie, ibid.

Der Streich Winkel, ibid.

Structura Græca, a. 354.

incerta, 352.

isodoma, 356.

pseudisodoma, 357.

revincta, 359.

reticulata, 349.

Stupa pyrotechnica præparatio, p. 59.

Stylobata. Definitio, a. 95.

Subsolanus qualis ventus, g. 215.

Substructio, a. 311.

Subvesperus qualis ventus, g. 215. 216.

Sud, c. 211.

Süd gen Osten, g. 215.

Süd gen Westen, ibid.

Süd-Ost, ibid.

Süd-Ost gen Osten, ibid.

Süd-Ost gen Norden, ibid.

Süd-Süd-Ost, ibid.

Süd-West, g. 215.

Süd-West, ibid.

Süd-West gen *Süden*, ibid.

Süd-West gen *Westen*, ibid.

Suggestus mortuorum. Definitio, m. 228.

Suggestus tormentorum. Definitio, 227. delineatio, 229.

Sulphuris depuratio, p. 10. qualitates, 18. 21. 22.

Supercilia, a. 104.

Superficies Terra quanta sit, 44. quomodo se habeat ad zonam frigidam, 88. & seqq. quomodo ad temperatam, 85. torridam, 80. 81.

Supernas quinam ventus, g. 215. 216.

Symmetria quid sit & in quo consistat, a. 24. & seqq.

Syne, c. 111.

Systylon opus, a. 225.

T.

T*Abula loxodromica*. Definitio, g. 331. quomodo construantur, 333.

Tania, a. 104.

Tamuz, c. 112.

Tebeth, 123.

Tecta quomodo construenda, a. 519. & seqq. 523.

Tegula hamata, 522.

imbricata, ibid.

Tekupha quid sint, c. 337. quomodo inveniantur, 348.

Tempestates annua quomodo se habeant sub æquatore, g. 100. & seqq. quomodo in zona torrida extra æquatorem, 104. & seqq.

Tempestates vage. Definitio, g. 227. causæ, 229.

Templi Cella sive *Corpus*, a. 236.

Temponis momentum quomodo ex altitudine Solis ope globi inveniantur, g. 236.

Termini paschales. Definitio, c. 284.

Terminorum paschaliu Tabulæ Gregoriana quomodo construantur, 309.

Terra cur circumnavigari poterit, g. 5.

Terra figura qualis sit, 3. 4.

Terra figura spherica num in Tellure citra errorem sensibilem assumi possit, 10.

Testudines. Definitio, a. 468.

Tetrastylon, 214.

Thamuz, c. 121. 123.

Thir meh, 113.

Thisri, 121. 123.

Thot, 106.

Throscias qualis ventus, g. 215. 216.

Tishrin prior, c. 112.

posterior, ibid.

Tonnen-Gewölbe, a. 469.

Tormentum. Definitio, p. 99. species, 100. delineatio, 115. & seqq.

Tormentum quomodo oneretur, p. 130. dirigatur, 133. 134. cur explosum retrocedat, 138.

Tormentum institutum. Definitio, 151. quomodo paretur & oneretur, 152.

Torus, a. 105. quomodo delineetur, 113.

Trabeatio. Definitio, a. 100. quænam cui libet intercolumnio conveniat quomodo inveniantur, 227. & seqq.

Traversen, m. 109.

Trenchéen-Kugel, p. 58.

Triacontaëteris Muhammedana. Definitio, c. 350.

Triglyphi cum guttis quid sint, a. 133. quomodo delineentur, 179.

Trochilus, a. 108. quomodo delineetur, 116.

Tropicus cancri. Definitio, g. 17. situs, 18.

Tropicus Capricorni. Definitio, 17. situs, 18.

Truncus stylobata, a. 95.

Tybi, c. 106.

Tykymt, 111.

Tympani altitudo, a. 270. 271.

Tyr, c. 111.

Tysas, ibid.

V.

- V**allum. Definitio, m. 13. cur munitis conveniat, 14. altitudo, 18. 82. declivitas, 19. defensio qualis esse debeat, 53.
- Valli operum externorum dimensiones, 120.
- Veadar, c. 123.
- Ventus. Definitio, g. 215. divisio, 215. qualis sit, qui per terram continentem spirat, 222. 225. qualis, qui per maria spirat, 220.
- Ventus cardinalis, 215.
collateralis, ibid.
collateralis primarius, ibid.
collateralis secundarius primi vel secundi ordinis, ibid.
- Venustus. Definitio, a. 10.
- Veris initium & finis. Definitio, g. 78.
- Ver quando sub æquatore, 103. ubinam bis, 109.
- Versorium. Definitio, 296.
- Versura composita quomodo delineandæ, a. 408.
- Versura simplices quomodo delineandæ, 407.
- Vertex objectorum cur iter facientibus prius videatur quam radix & contra, g. 8. 9.
- Via navis qualis sit, 339.
- Vinea. Definitio, m. 243. quomodo pareretur, 248.
- Visus distantia, quam in superficie maris vel planitie terræ attingit, quomodo invenitur, g. 47.
- Umbra meridiana quo die altitudini corporis æqualis, g. 166. quando quolibet die, 167. quomodo variet in diversis locis, 164.
- Umbra solstitiales quomodo se habeant in diversis locis, 164.
- Umbra rectæ ratio ad altitudinem opaci, 160.

Umbra versæ ratio ad altitudinem opaci, g. 161.

Voluta. Definitio, a. 133. quomodo delineetur, 135.

Urnæ pyrotechnicæ. Definitio, p. 34.

Utilitas ædificii. Definitio, a. 7.

Vulturinus quinam ventus, g. 15. 16.

W.

Waffen-Plätze, m. 109.
der Wall, m. 52.

der Wallgang, ibid.

West, g. 212.

West gen Norden, 215.

West gen Süden, ibid.

West-Nord-West, ibid.

West-Süd-West, ibid.

Winckel der Flanck und Cortine, m. 52.

Z.

Zephyroboreas qualis ventus, g. 215.
Zephyrus, ibid.

Zius, c. 121.

Zonæ inter se collatæ quoad magnitudinem, g. 91. 92.

Zona frigida australis. Definitio, 73. latitudo, 74.

Zona frigida borealis. Definitio, 73. latitudo, 74.

Zona temperata ratio ad superficiem Terræ, 85. 86. magnitudo, 87.

Zona temperata australis. Definitio, g. 70. latitudo, 72.

Zona temperata borealis. Definitio, 70. latitudo, 72.

Zona torrida. Definitio, 66. latitudo, 68. magnitudo, 82. ratio ad superficiem Terræ, 80. 81. quomodo ab æquatore dividatur, 68.

Zophorus. Definitio, a. 100. qualis esse debeat, 101.

der Zwischen-Wall, m. 52.

VIII.

INDEX

Rerum in Commentatione de Studio Mathematico recte
instituendo contentarum, quæ legitur Tomo V
Elementorum Matheseos.

A.

A Equatio ad parabolam quomodo deducatur ex sectione conici, 205.

Equatio curvæ particularis quomodo reducatur ad generalem, 197.

Equationes ad curvam, in qua origo abscissarum non est in aliquo puncto curvæ, quomodo tractentur, 206.

Equationis cubicæ & biquadraticæ constructio, quod supponat inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas, 223.

Equationum inventio cur subinde non uno modo tentanda, 174.

Equationum usus in curvis mechanicis ostenditur, 207.

Aerometriæ studium quomodo instituendum, 264. & seqq.

Agrimensores an theoriâ Geometriæ recte negligant, 129. & seqq.

Algebra quomodo tractanda, 143. & seqq. quomodo ad Geometriam applicanda, 173. & seqq. qualis primum fuerit & quomodo deinceps ulterius perfecta, 165. quousque perfecta, 188. cur ad tertium cognitionis gradum aspiranti cognitu necessaria, 681. quod subinde suppeditet absque ulla ambage constructiones problematum veterum, 183.

Algebraicum studium quomodo facilitetur, 166.

Analysis mathematica quomodo exercenda, 143. & seqq. cur ad tertium cognitionis gradum aspiranti cognitu necessaria, Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

cessaria, 81.

Analysis Diophantæa quomodo tractanda, 171. 172.

Analysis infinitorum quomodo tractanda, 226. & seqq.

Analysis Veterum qualis fuerit, 145.

Approximationes quomodo per series infinitas inveniantur, 244. & seqq.

Architecti militares an theoriâ Geometriæ tuto negligant, 129. & seqq.

Architecturæ civilis studium, 337. & seqq.

Architecturæ militaris studium, 333. & seqq. scientifica cognitio num proficit Architecto militari, 335.

Arithmetica quomodo in usum Artis, inveniendi tractanda, 121.

Arithmetica infinitorum in infinitum extensa, 251.

Arithmetica literalis quomodo tractanda, 146. & seqq.

Arithmetica literalis usus in inveniendi, 154.

Arithmetica practica quomodo tractanda, 113. & seqq.

Arithmetica practica compendium quomodo ex Elementis Autoris exscribendum, 120.

Arithmetica theoretica quomodo tractanda, 118.

Ars inveniendi quomodo ope Architecturæ civilis exerceatur, 339.

Artificia analytica cur probe notanda, 166. 167. 192. inter se conferenda, 192.

Artis characteristicæ notio quomodo acquiratur,

R r r

ratur, 147. usus in inveniendi, 156.
Artis inveniendi regulæ abstrahendæ ab
 Arithmetica communi, 122. a literali,
 157. 163. 164.
Artis inveniendi causa quomodo Mathefis
 tractanda, 106.
Artium scientiam excolenti quid notasse
 profit, 329.
Astronomia studium, 290. & seqq. cogni-
 tio historica quomodo acquirenda,
 293. & seqq.
Astronomia quid conferat ad Artem inve-
 niendi, 302. & seqq.
Astronomia practica quomodo addiscatur,
 297. & seqq.
Asymptotos determinandi methodus quo
 principio nitatur, 231.
 C.
Calculus algebraicus a perplexitate libe-
 ratus, 187. num theoriam suppo-
 nat in solvendis problematis, 145.
 de Calculi differentialis inventore controver-
 sia quomodo intelligenda, 228.
Calculi integralis notio explicata, 235.
Calculus literalis in Algebra quomodo per
 numeros explicetur servata univer-
 sitate, 168.
Calculus numerosus quomodo ad formam
 universalis reducat, 154. quomodo
 in locum literalis surrogari possit, 169.
Calculus situs quid sit, 144. quales sup-
 ponat in Geometria definitiones, 155.
Catoptrica studium, 274. & seqq.
Chronologia studium, 323. & seqq.
Circulus cur per æquationem algebraicam
 definiri possit, 195.
Circuli proprietates algebraice erutæ, 193.
 & seqq. 206.
Circuli quadratura per series infinitas ex-
 plicata, 238.
Citationes in demonstrationibus quem ha-
 beant usum, 45.
Cognitionis humane gradus quot dentur, 1.
 quod non eadem facilitate acquiran-
 tur, 2. quomodo acquirantur, 3.

Cogitandi modus naturalis quomodo ser-
 vetur in studio mathematico, 108.
Conchoidis proprietates quomodo ex æqua-
 tionē ad eandem deducantur, 203.
 constructio facillima inde deducta, *ibid.*
 tangens quomodo ducenda, 232.
Constructio æquationum quomodo ad Ana-
 lylin Veterum propius adducatur, 181.
Constructiones æquationum superiorum quo-
 modo inventæ, 218. 219. cur analyti-
 cas dederit Autor, 220.
*Constructiones geometricæ formularum alge-
 braicarum* num pure enunciandæ, 180.
 an semper synthetice demonstrandæ,
 177. quodnam inter elegantes & inele-
 gantes intercedat discrimen, 185.
Corollaria quid sibi velint, 58. quomodo
 expendenda, 59. quomodo symbo-
 licè representanda eorum demonstra-
 tio, 60.
Curiositatis gratia quomodo Astronomia
 tractanda, 292.
Curvæ quænam per æquationes algebrai-
 cas definiri nequeant, 196. quænam ab
 Autore considerentur in Elementis suis,
 209. quomodo ad curvas alias referan-
 tur, 208. quænam in constructione pro-
 blematis alteri præferenda, 221.
Curvarum doctrina quantum adhuc distet
 a perfectione sua, 217.
Curvarum proprietates quomodo per
 æquationes eruantur, 193.
Curvarum quadraturæ a quadratura para-
 bolæ pendentes, 237. quod reducantur
 ad quadraturam circuli & hyperbolæ,
 239.
Cycloidis proprietas singularis, 250.

D.

Definitiones quomodo expendendæ, 5.
 quomodo expendendæ in usum Ar-
 tis inveniendi, 82. & seqq. cur ab iis in-
 cipiendum, 4. cur exemplis & quomo-
 do illustrandæ, 5. quo ordine collo-
 candæ & legendæ, 6.
Definitiones arithmetice quomodo exem-
 plis

pius. Austrentur, 11. 12. objectio quædam remouetur, 16.
Definitiones geometricæ quomodo ad euidentiā sensus reducendæ, 13.
Definitiones nominales quales esse debeant, 10.
Definitiones reales quomodo inveniuntur præsuppositis nominalibus, 87. 88. num nominalibus præferendæ, 89.
Definitionum representatio symbolica, 11. & seqq.
Demonstrandi principia qualia supponantur, 71.
Demonstrationes quando sint naturales, 62. quales ab Autore exhibeantur, 63. quales vulgo, 64. quomodo resolvendæ, 31. 38. 40. & seqq. 47. quomodo faciant ad perficiendum intellectum, 99. & seqq. 102. & seqq. quomodo libris inserantur, 46. quomodo in Hydrostatica facilitandæ, 163.
Demonstrationes arithmeticae cur servant universalitatem ad exempla applicatæ, 50.
Demonstrationes astronomicæ quatenus recedant a rigore, 301.
Demonstrationes catoptricae num sint superflue, 177.
Demonstrationes dioptricae quod pluribus modis fieri possint, 281.
Demonstrationes mechanicæ quales sint, 32. cur in locum cæterarum non surrogandæ, 33. quod æquipolleant exemplis numericis, 34. quibusnam satisfaciant, 36. quomodo ad tertium cognitionis gradum conducant, 72. 73.
Demonstrationes problematum quomodo resolvendæ, 52. quomodo symbolice represententur, 53. 55.
Demonstrationes syntheticae num recte negligantur, 101. num ex calculo algebraico erui possint, 178. quænam cum iis non confundendæ, 179. cur analyticis misceantur ab Autore, 260.
Demonstrationum forma, 31. 37. symbolica

lica representatio, 39. 42. quem habeat usum, 44. 48. 49.
Dioptrica studium, 280. & seqq.

E.

Ellipseos constructio ex æquatione elicita, 215. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 200.
Experientiæ ac rationis connubium cur perpetuum esse debeat, 312.

F.

Fractionum in calculo algebraico usus, 189.
Figure in Mathesi quales requirantur, 10.
Formula algebraica quomodo applicandæ, 158. & seqq.

G.

Geographiæ studium, 317. & seqq.
Geographiæ historica cognitio quomodo acquiratur, 318.
Geometria quomodo in usum Matheos reliquæ tractanda, 162. usus in reliqua Mathesi stabilitus, 133. 136. quomodo intellectus perficiendi gratia tractanda, 134.
Geometria elementaris supplementum in usum Algebrae conscribendum, 186.
Geometria practica quomodo tractanda, 122. & seqq. quomodo ex Elementis Autoris extrahenda, 128.
Gnomonica studium, 326. & seqq.

H.

Hydraulicæ studium quomodo instituendum, 267. & seqq.
Hydrographiæ studium, 322.
Hydrostatica studium, 261. & seqq. usus in Philosophia naturali, 262.
Hyperbolæ constructio ex æquatione elicita, 216. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 201. 202.
Hypotheses quomodo excolendæ, 309. 310. qualibus in Philosophia locus, 311.

I.

- I**nductio quomodo pariat, 35.
Integratio differentialium cur subinde requiratur quantitatem adji-
 cendam, 236.
Intellectus cur & quomodo studio Ma-
 theseos perficiatur, 92. & seqq. quo-
 modo perficiatur, si ad primum tan-
 tummodo cognitionis gradum adspi-
 res, 94. & seqq.
Intellectus perfectio quænam maxima, 106.
Intellectus perficiendi gratia quomodo in
 Geographia versandum, 321.
Intellectui quæ patent quomodo ad evi-
 dentiam sensus reducantur, 11. &
 seqq.
Irrationalium existentia, 225. ad for-
 mam rationalium reductio quem ha-
 beat usum, 152.

L.

- de **L**ocis geometricis notanda, 210. &
 seqq.
Logica genuina unde agnoscatur, 104.
Logica studio quodnam præmittendum,
 105.

M.

- M**athesis an in usum Artis invenien-
 di tractari possit, 314. & seqq.
 quomodo in hunc usum tractetur,
 106.
Matheseos studium quomodo intellectus
 perficiendi causa tractandum, 90.
Matheseos sublimioris studiosi quænam ex
 Mechanicis addiscere debeant, 259.
Mechanica quantum a Veteribus promo-
 ta, 252. quantum a Recentioribus,
 ibid. quomodo tractanda in usum tertii
 gradus cognitionis, 255. 256.
Mechanica praxis quomodo addiscenda,
 253. 254.
Mechanica principia ad phænomena na-
 turæ explicanda, utilia, 258.
Mechanica studium quomodo tractandum,
 252.
Methodus mathematica num Theologiæ,

Jurisprudentiæ & Medicinæ conveniat,
 107.

- Methodus de maximis & minimis* quo
 nitatur principio, 234.
Methodus tangentium inversa quomodo
 expendenda, 248.

N.

- N**otiones ontologica quomodo ex Ma-
 thesi derivandæ, 340.

O.

- O**ptica studium quomodo instituen-
 dum, 271. & seqq. quod ad Phy-
 sicam conducatur, 272.

P.

- P**arabola proprietates quomodo ex
 æquatione ad eandem deducantur,
 198.
Perspectiva quomodo tractanda, 273.
*Philosophiæ naturalis principia mathema-
 tica* quænam proprie dicantur, 257.
Philosophus quomodo versari debeat in
 Catoptrica, 276. quomodo in Diop-
 trica, 282.
Preparatio ad demonstrationem cur ne-
 cessaria, 74. 75. quomodo ad eam
 perveniatur, 76.
Preparatio ad tertium gradum cognitionis
 per secundum, 71.
Praxis quomodo reddatur oculata, 140.
Problemata quomodo in theorematum con-
 vertantur, 51. 54. quomodo tractan-
 da, ac si resolutio inveniendi esset,
 77. & seqq.
Problematum symbolica representatio,
 26. 27.
 de *Problematis physico-mechanicis* notan-
 da, 257.
Propositiones quomodo rite exponendæ,
 17. quomodo a nobis enunciandæ,
 18. 19. quomodo a Veteribus & Cla-
 vio, 20. cur pure enunciandæ, 21. 57.
Pyrotechnia studium, 330. quid conferat
 ad artem inveniendi, 332.

Quadraturæ per series infinitas pendet a quadratura infinitarum Parabolarum, 239.

R.

Radices due in contactu æquales, 199.
Rationum doctrina quomodo facilitetur, 160. 161.

Rationum inæqualitatis tractatio ad modum æquationum, 191.

Regressus serierum explicatur, 241.

Regulæ arithmeticae cur formulis algebraicis ab Autore non fuerint adscriptæ, 175.

Resolutiones problematum quomodo illustrandæ, 22. quomodo in potestatem redigendæ, 23. quomodo sola attentione ad theorematum innotescant, 80.

Resolutiones problematum numericæ quomodo exemplis illustrandæ, 29.

Resolutionum spuriarum examina quomodo subinde instituantur, 180.

S.

Saltus in ratiocinando expenditur, 61.
Scientiæ conjunctis viribus excolendæ, 313.

Sensus quid adjumenti afferant intellectui in veritate intelligenda, 7. 8. 9.

Series magis convergentes pro circulo quomodo deducantur ex minus divergentibus, 242. 243.

Sphæricorum studium, 285. & seqq.

Studium mathematicum quibusnam difficile videatur, 98.

Subnormalium formulæ algebraicæ quomodo geometricè construantur, 230.

Subtangentiæ notio explicata, 233.

Subtangentiæ formulæ algebraicæ quomodo geometricè construantur, 229.

T.

Tabulæ astronomicæ expendantur, 298.

Tangentium methodus Barrowiana, 227. 228. quomodo inde prodeat differentialis, 228.

Theorematum quomodo in usum Artis inveniendi expendenda, 68. quod eo modo inveniri potuerint, quo demonstrantur, 70. quomodo in problemata resolvenda convertantur, 67.

Theorematum symbolica repræsentatio, 24. 25.

Theorica Planetarum quomodo ab autore tradita, 309.

Trigonometria in quem usum primum inventa, 137. quomodo in usum praxeos tractanda, 138. & seqq.

Trigonometria spherica studium, 286. & seqq.

V.

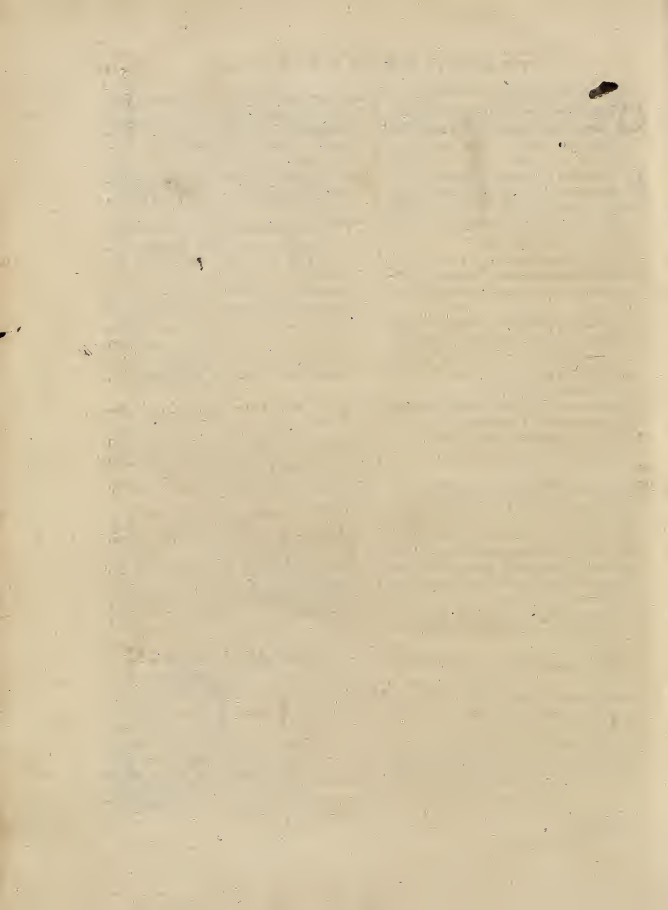
Veritas inveniendæ quod alias cognitæ supponat, 71.

Veritatis inveniendæ utilitas cur non attendenda, 176.

Vulgarium meditatio quem habeat usum, 170.

FINIS TOMI V. ELEMENTORUM MATHHESEOS.









A 077(240)/113

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



600157611

i 24645998

